

# 動力学的非ホロノミックシステム—自由関節マニピュレータ—

Dynamical Nonholonomic Systems —Free-Joint Manipulators—

鈴木 高宏\*

Takahiro SUZUKI

## 1. はじめに

非ホロノミックシステムは、ロボットや制御工学において近年注目を集めている分野の一つである。系の拘束条件が位置や姿勢などを表す一般化座標と時間のみの方程式で表される時、それをホロノミックな拘束条件というのに対して、非ホロノミックとはそうでない時をいう。特に、速度や加速度のような座標の微分量を含む不可積分な等式拘束を受ける系が注目されている。

非ホロノミック系の大きな特長は、拘束条件の不可積分性から来る *underactuated* 性である。これは、例えば少ない数のモータでより多次元の一般化座標を制御できることを意味する。車両型移動ロボットや宇宙ロボット、非ホロノミックマニピュレータ<sup>1)</sup>など、速度までを含む拘束が不可積分な系は、一階非ホロノミック系と呼ばれ、その状態方程式が対称アフィン型になることから任意の次元の一般化座標を制御するには最低2つのモータを必要とする。一方、振り子や自由関節マニピュレータ、テザー衛星のような加速度までを含む拘束が不可積分な系は二階非ホロノミック系<sup>2)</sup>と呼ばれる。その状態方程式はドリフト項をもつ非対称アフィン型となり、1つのモータでも多くの次元を制御できる可能性を持っている。

しかし一方でそのような系は、従来の制御理論上で扱うのが難しく、例えば可制御性の証明は一般に困難である。振り子については、正立ないし倒立時が平衡点であり、その近傍での線形化によって可制御な系が得られるが、その反面、平衡点以外への制御は行えない。一方、自由関節マニピュレータはいわば水平振り子であり、その自由関節が重力による漸近的安定平衡点を持たないため、全ての関節角が停止可能な非漸近的安定平衡点となり、任意の関節角への制御が可能である。反面、特定の平衡点周りでの線形化系は可制御とならず、従来の方法では可制御性を証明で

きないことが知られている。しかし、筆者らなどにより自由関節マニピュレータの制御が可能であることが示されている<sup>3,4)</sup>。ただこれまでの研究では簡単のためモデル化において自由関節における摩擦を無視してきた。

本研究では、2R自由関節マニピュレータについて自由関節における摩擦を考慮したモデル化を行ない、平均化法<sup>5)</sup>を用いてその挙動を解析する。また自由関節マニピュレータの制御法として、安定な多様体へのフィードバック制御を提案し、実験によってその有効性を検証する。

## 2. 2R自由関節マニピュレータ

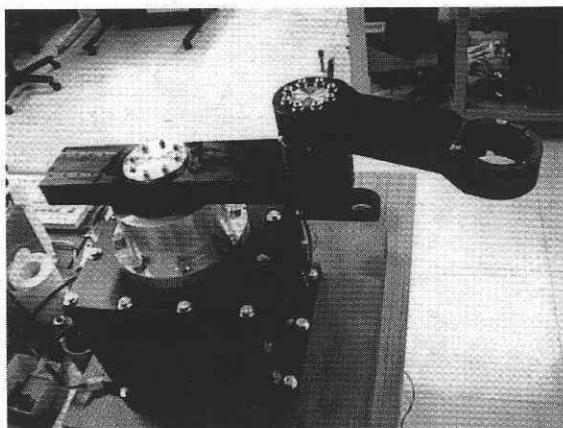


Fig. 1 2R Free-Joint Manipulator

Fig. 1のような第1関節のみが駆動され第2関節は非駆動関節である水平2Rマニピュレータを考える。非駆動関節に摩擦のない場合については2,3,6)等で研究されているが、本研究では関節に粘性摩擦を仮定する。系の力学方程式は次のように求められる。

$$\begin{pmatrix} A_1 & B \cos \theta_2 \\ B \cos \theta_2 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \\ B \sin \theta_2 \cdot \theta_1 \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ -\gamma \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

式(1)の第2行は一般に二階非ホロノミック拘束となり

\*東京大学生産技術研究所 第2部

研究速報  
次のように書き直せる。

$$\ddot{\theta}_2 = -\gamma' \dot{\theta}_2 - (1 + \mu \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 - \mu \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \dots\dots\dots (2)$$

ただし  $\mu = B/A_2$  また  $\gamma = \gamma/A_2$  である。

この第2関節の非線形挙動を平均化法によって解析する。今、第1関節へ  $\dot{\theta}_1 = \varepsilon \cos \omega t$  なる周期入力を加える。この時、第1関節は周期毎に初期角度に戻る一方で、第2関節は第1関節の摂動による効果で非線形な挙動を示す。第2関節の挙動は、全位相空間の断面を取って得られるポアンカレ写像の離散的な点列によって表されるが<sup>3)</sup>、平均化法<sup>5)</sup>によって得られる平均化系は、ポアンカレ写像による離散的軌道を滑らかに結ぶような軌道を描く。5)より、式(2)の平均化系は次式のようになる。

$$\ddot{\theta}_2 = -\gamma' \dot{\theta}_2 + \varepsilon^2 \frac{\mu^2 K}{2} \sin 2\bar{\theta}_2 \dots\dots\dots (3)$$

右辺第一項が摩擦による項である。摩擦が0である時の第2関節の挙動は Fig. 2 で表されるような位相平面上における楕円状の閉軌道となる。図の横軸は第2関節の角度を、縦軸は角速度を表す。楕円状の軌道は第2関節が  $\theta_2 = \pm \pi/2$  を中心に大きく振動する挙動を表し、その上下に見られる位相平面を横断する軌道は第2関節が回転する挙動を示している。これらの軌道が全て閉軌道となっていることは、この系が保存的であることを示している。第1関節に常に入力がかわっているため実際のエネルギーが保存されているわけではないが、平均化による解析からエネルギー的保存量が存在することが示せる<sup>6)</sup>。

次のようなエネルギーの量を定義する。

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \mu^2 K \cos^2 \bar{\theta}_2 \dots\dots\dots (4)$$

ただし  $E_k, E_p$  はそれぞれ運動エネルギーの項、ポテンシャルの項を表す。無摩擦下において  $E$  が保存されることは容易に示され、よってこれを無摩擦自由関節マニピュレータの平均化ハミルトニアンと呼ぶ。

一方、自由関節における摩擦がある時には、平均化系の挙動は Fig. 3 のように位相平面  $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$  上において平衡点  $(\pm \frac{\pi}{2}, 0)$  へ収束していく渦巻状の軌道を描く。これは無摩擦下での平均化系が保存的であるのに対し、摩擦によって系が散逸的になることを示している。ここで、式(4)の平均化ハミルトニアンを摩擦のある場合に適用する。式(3)により式(4)の微分を求めると、

$$\dot{E} = -\gamma' \dot{\theta}_2^2 \dots\dots\dots (5)$$

となり、よって  $E$  はリアプノフ関数となり、系の散逸性・

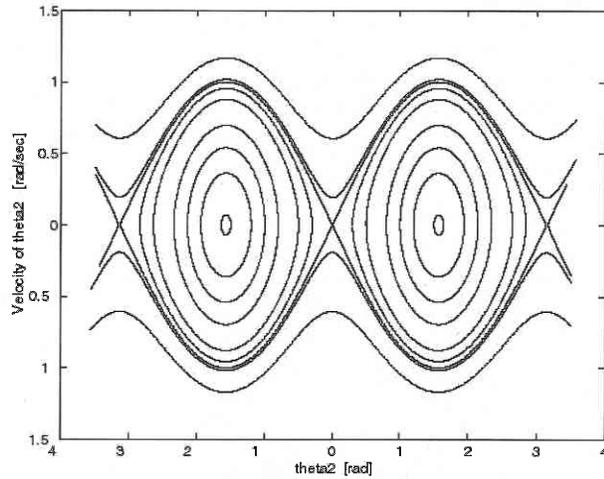


Fig. 2 Behavior of 2 R FJM without friction

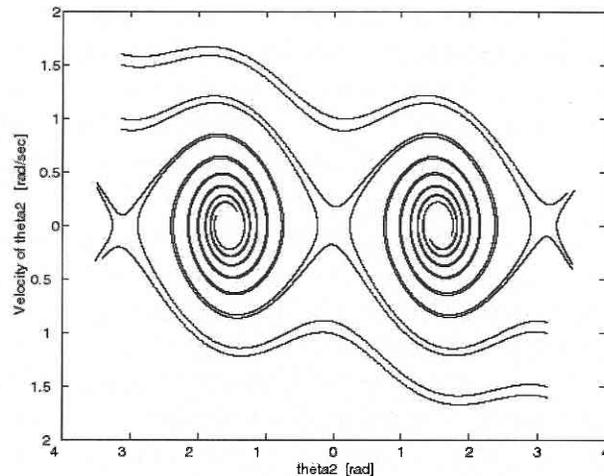


Fig. 3 Behaviors of 2 R FJM with friction

漸近安定性が示される。ただし、定義から  $E$  は二つの平衡点  $(\pm \frac{\pi}{2}, 0)$  を持つため、それらの吸引領域は位相平面のそれぞれ半平面となることに注意しなければならない。

### 3. 多様体へのフィードバック制御

自由関節に働く摩擦が微小であれば、摩擦を考えない保存系に基づいて構築された制御法を適用することが可能である<sup>3,6)</sup>。ここでは平均化ハミルトニアンを用いて多様体へのフィードバックを行う制御法として、振幅正規化エネルギーを用いる方法と、リアプノフ的な方法を提案する。

平均化ハミルトニアンは第二関節の角度および角速度の関数であるが、入力振幅もパラメータとして含んでいるため、入力振幅の変調により定義が変わる。よってここで、速度を入力振幅で割った振幅正規化速度  $p_2 = \dot{\theta}_2/\varepsilon$  を導入し、それによって表された系の位相状態  $(\theta_2, p_2)$  によ

で定義される振幅正規化エネルギー

$$E_{nom} = \frac{E}{\varepsilon^2} = E_{nom,k} + E_{nom,p} = \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}\mu^2 K \cos^2\theta_2 \dots\dots (6)$$

は入力振幅に陽に依らないエネルギー関数となる。このとき入力振幅の変調は、定義より振幅正規化速度の不連続な変調として表される。入力周期毎に振幅正規化エネルギーが目標値となるような変調則は次式のように求められる。

$$\varepsilon_{new} = \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{E_{nom,k} - E_{nom,kd}}{E_{nom,pd} - E_{nom,p}}} = \sqrt{\frac{\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_{2d}^2}{E_{nom,pd} - E_{nom,p}}} \dots\dots (7)$$

この制御の特徴は、目標楕円状多様体へ変更可能な時には一度に目標へ到達するが、その時の状態によって多様体に安定化された時の入力振幅の大きさを選べない点である。

上に挙げた問題点から、目標多様体へのフィードバック安定化制御を構成する上で、制御が連続的に行なわれ、かつ安定化達成時の入力振幅を決める必要がある。よって、まず入力基準振幅  $\varepsilon_{std}$  を規定し、その基準振幅における平均化ハミルトニアン

$$E_{std} = \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_{std}^2 \mu^2 K \cos^2\theta_2 \dots\dots (8)$$

を入力振幅に依らないエネルギー関数として定義する。 $E_{std}$  はもはや無摩擦系に対しても基準振幅以外では保存量とはならず、入力振幅により増減する。そこで  $L = \frac{1}{2}(E_{std} - E_d)^2$  (但し  $E_d$  は  $E_{std}$  の目標値) なる関数がリアプノフ的に 0 に収束する振幅変調則を次のように設計できる。

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_{std} \sqrt{1 - k_3 (E_{std} - E_d) \sin 2\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2} & ; k_3 (E_{std} - E_d) \sin 2\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 < 1 \\ 0 & ; k_3 (E_{std} - E_d) \sin 2\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 \geq 1 \end{cases} \dots\dots (9)$$

ここで  $k_3$  は  $L$  の収束速度を決めるゲインである。この方法では、右辺の根号の中が負になる時には、入力振幅を 0 にして第 2 関節をその時の運動量によって自由運動させ、根号内の値が正になったら再び周期入力による駆動を行なう、より効率的な制御法となっている。

これらの制御則は振幅変調が不連続に行なわれることと収束目標が点でなく多様体である点で、通常のリアプノフ的方法と異なる。むしろ入力振幅という系のいわばパラメータを変更して系の挙動を変化させるという点で、カオス制御によく用いられる OGY 法により近い。OGY 法との相違点は制御される多様体が、鞍状平衡点の安定多様体ではなく、平衡点を持たない中心多様体だという点である。

#### 4. 摩擦を利用した制御

上記の方法は摩擦が比較的小さい時は有効であるが、摩擦が大きい時は平均化ハミルトニアン の減衰により制御が困難になる。そこで摩擦を積極的に利用する制御法を考える。式 (3) において入力がない場合の挙動

$$\ddot{\theta}_2 = -\gamma \dot{\theta}_2 \dots\dots (10)$$

は目標点  $(\theta_{2d}, 0)$  へ収束する安定多様体

$$\dot{\theta}_2 = -\gamma'(\theta_2 - \theta_{2d}) \dots\dots (11)$$

を形成する。この安定多様体を目標直線としてそれへの距離に応じてフィードバックを行なう次のような振幅変調制御則を考える。

$$\varepsilon = k_f \left| \theta_2 - \theta_{2d} + \frac{\dot{\theta}_2}{\gamma'} \right| \dots\dots (12)$$

ここでこの目標直線と x 軸  $\dot{\theta}_2 = 0$ , y 軸  $\theta_2 = 0$  ( $|\theta_2| > \frac{\pi}{2}$  の時は  $\theta_2 = \pm \pi$ ) で囲まれた三角形の領域を捕獲領域と呼ぶことにする。

Fig. 4 は目標点  $(1.0 [\text{rad}], 0)$  に対して捕獲領域外の点  $(1.2 [\text{rad}], 0)$  からの制御を行なったシミュレーション結果である。摩擦係数は  $\gamma = 0.8/3.02$ , フィードバックゲインは  $k_f = 0.15$  とした。図において領域 I が捕獲領域を表し、式 (12) の制御則はここにおいてのみ適用されるとする。一方、領域 II もしくは III にある場合には、式 (7) または (9) によって捕獲領域 I を通るような楕円多様体へのフィードバック制御を行う。図は目標点が  $0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$  の場合だが、 $\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \pi$  の場合についても同様の制御戦略を構成できる。

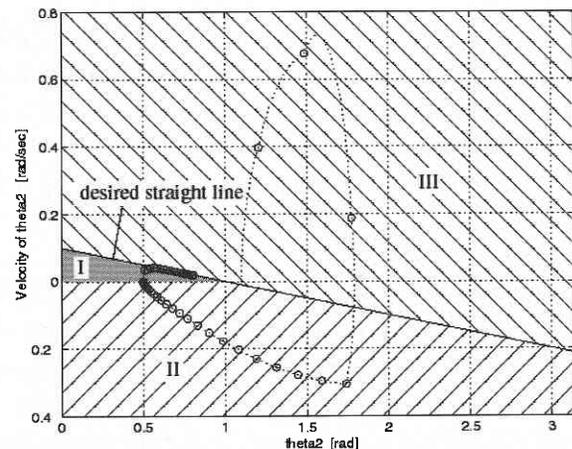


Fig. 4 Capturable area of control to straight manifold

## 5. 実 験

Fig. 1の自由関節マニピュレータ実験装置によって実験を行なった。平均化ハミルトニアンを用いた二つの方法における実験では、関節の摩擦はおおよそ $\gamma = 0.14$ であった。振幅正規化ハミルトニアンによる方法はゲインなどの設計が不要な非常に単純な制御であり、目標角 $-130$  [deg]など簡単な場合では目標を達成できたが、特に $-80$  [deg]など直角付近を目標とした場合には目標到達までに非常に時間が掛かる場合があった。一方、リアプノフ的な方法はゲインを目標に応じて適切に選ぶ必要があったが、第2関節の自由運動を利用してより効率的に目標の達成を行なった。また、摩擦を大きくした状態でも実験を行なったが、これらの方法では目標を達成できず多くの場合、直角方向へ収束してしまった。

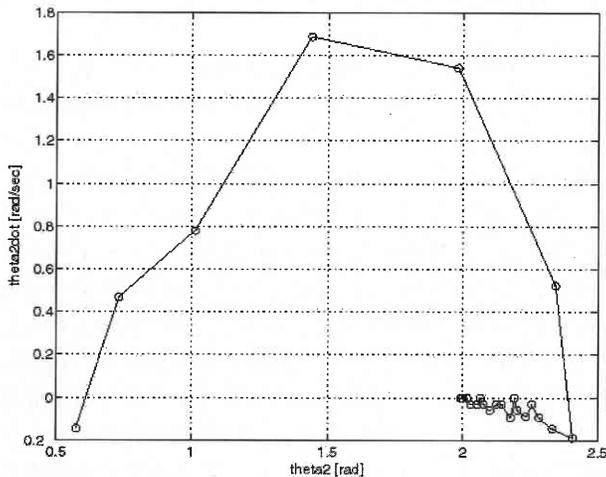


Fig. 5 Experiment of control by friction to (1.9[rad], 0)

一方、摩擦を利用する方法は摩擦が小さい時にはうまく行かないがおおよそ $\gamma = 0.85$ という大きい摩擦がある状態では以下のように有効に目標を達成できた。Fig. 5に示される実験結果ではおおよそ(0.6 [rad], -0.1 [rad/s])を初期点として、目標点(1.9 [rad], 0)への制御を行なっている。ここでは関節の摩擦は粘性的としたが、実際にはクーロン摩擦などによるモデル化誤差があり、そのため摩擦による安定多様体は厳密には直線とならない。しかし捕獲領域中では目標直線より内側に落ち込むため、式(12)の制御則により目標直線へのフィードバックが繰り返され、結局目標直線に沿って目標点に収束する。よって図のように位相平面上の目標直線近傍において鋸歯状の軌道が描か

れる。ただ本制御法は捕獲領域外における制御は楕円状多様体へのフィードバック制御に依っているため、捕獲領域外においても摩擦を利用した制御が必要であるのが今後の課題である。

## 6. 結 論

本研究では、2R自由関節マニピュレータについて自由関節における摩擦を考慮して平均化解析を行ない、その挙動が位相平面上で平衡点へ収束する渦巻状軌道を描く散逸的なものであることを示した。また、摩擦が微小な場合に対して平均化ハミルトニアンを用いた方法を提案し、摩擦が大きい場合に対しては直線多様体を目標とするフィードバック制御則を提案した。またこれらの方法の有効性を実験により検証した。

本研究は東京大学工学部機械情報工学科の中村仁彦教授および三好渉氏の協力によって行われた。また同学科の吉本堅一教授には数々の貴重な助言を頂いた。なお、本研究は日本学術振興会特別研究員制度(No. 4032)および文部省科学研究費補助金(No. 08004032, 07245105, 07455110)による研究の一部である。

(1999年2月5日受理)

## 参 考 文 献

- 1) 中村, ソルダレン, 鄭:「非ホロノミック・マニピュレータの理論的設計と非線形制御」, 日本ロボット学会誌, 13-5, pp. 674-682, 1995.
- 2) G. Oriolo and Y. Nakamura: "Free-Joint Manipulators: Motion Control under Second-Order Nonholonomic Constraints", IEEE/RSJ Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems (IROS'91), pp. 1248-1253, Osaka, 1991.
- 3) 中村, 濃沼, 鈴木:「自由関節を持つ平面アームのカオスの挙動と非線形制御—ドリフトを持つ非ホロノミック機械の制御—」, 日本ロボット学会誌, 14-4, pp. 602-611, 1996.
- 4) 荒井:「非駆動関節を有する3自由度マニピュレータの非ホロノミック拘束下における可制御性」, 日本ロボット学会誌, 14-5, pp. 751-758, 1996.
- 5) J. Baillieu: "Stable Average Motions of Mechanical Systems Subject to Periodic Forcing", In "Dynamics and Control of Mechanical Systems: The Falling Cat and Related Problems: Fields Institute Communications", Providence, R.I., American Mathematical Society, Vol. 1, 1993.
- 6) 中村, 鈴木:「非ホロノミック機械系の平均化法による挙動解析と振幅変調制御—平面2R自由関節マニピュレータの位置制御—」, 日本ロボット学会誌, 16-3, pp. 407-416, 1998.