研究速報

圧縮性一様剪断乱流の圧力揺らぎの効果

Effects of Pressure Fluctuations in Compressible Homogeneous Shear Turbulence

半場藤弘*
Fujihiro HAMBA

1. はじめに

境界層やチャネル流のように薄い剪断流と，乱流混合層や一様剪断流のように空間的時間的に発達する剪断流に対しては乱流に対する圧縮性効果が異なることが知られている[1,2]．前者では平均密度分布の変化を考慮すれば非圧縮性乱流とほとんど変わりないのに対し，後者ではマッハ数が大きくなると成長率が減少するという圧縮性効果がある．この効果は圧縮性散逸率などの直接的な影響ではなく乱流エネルギーの各成分の非等方性の変化が主な原因であることがわかってきた[3,4]．

Yoshizawa[5] は密度揺らぎの重要性に着目し乱流エネルギーと散逸率に密度分散を加えた3方程式モデルを提案し，乱流混合層の成長率の減少を説明した[6]．しかし密度揺らぎによるモデル化では密度比の大きい低速混合層の密度効果を過大評価する欠点が示唆されている[2]．一方Rubinstien et al.[7] は密度の代わりに圧力とエントロピーを用いて2スケール統計理論を定式化し圧縮性乱流のk-εモデルを導出した．筆者はその方法を用いて乱流エネルギーの圧縮成分とエントロピー分散を追加した4方程式モデルを提案した[8]．

本研究では乱流エネルギーの圧縮成分の代わりに圧力分散の発展方程式に着目する．一様剪断乱流の直接数値計算（DNS）を行い統計量を求め，成長率の減少の機構を考察する．また発展方程式中の主要項のモデル化を試みる．

2. 圧力とエントロピー分散の発展方程式

密度ρの代わりに圧力pとエントロピーsを基礎物理量として採用する．ただしエントロピーsは

$$s \equiv s/c_v = \log(p/p_0) - \gamma\log(\rho/\rho_0) \quad \cdots\cdots(1)$$

と定義する．それぞれの分散の発展方程式は

$$\frac{D}{Dt}\langle p'^2\rangle = -2\langle p'u_i'\rangle\frac{\partial P}{\partial x_i} - 2\gamma\langle p'^2\rangle\frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \varepsilon_p - 2\gamma P\left\langle p'\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right\rangle - \frac{\partial}{\partial x_i}\langle p'^2u_i'\rangle - (2\gamma-1)\left\langle p'^2\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right\rangle \quad \cdots(2)$$

$$\frac{D}{Dt}\langle s'^2\rangle = -2\langle s'u_i'\rangle\left(\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\gamma}{\bar\rho}\frac{\partial\bar\rho}{\partial x_i}\right) - 2\bar\kappa\left\langle\frac{\partial s'}{\partial x_i}\frac{\partial s'}{\partial x_i}\right\rangle - \frac{\partial}{\partial x_i}\langle s'^2u_i'\rangle + \left\langle s'^2\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right\rangle \quad \cdots(3)$$

ただし，

$$\varepsilon_p = 2(\gamma-1)\bar\lambda\left\langle\frac{\partial p'}{\partial x_i}\frac{\partial\theta'}{\partial x_i}\right\rangle \quad \cdots\cdots(4)$$

であり，$\bar\lambda$は分子拡散率［$\bar\kappa = \bar\lambda/(\bar\rho c_p)$］，かっこ〈〉はアンサンブル平均を表す．また$U_i$，P，$\bar\rho$は平均値，$u_i'$，p'，s'，θ'は揺らぎの値を表す．一様剪断乱流のDNSの結果を調べると乱流マッハ数M_t［＝$(2K)^{1/2}/c$，cは音速］が0.3程度の場合はエントロピー揺らぎはパッシブスカラーのようにふるまい速度場の発展に関する寄与は小さかった．マッハ数が大きい場合や浮力の働く場合は（3）のモデル化が重要となりうるが，本研究では（2）の圧力分散の方程式に着目する．

3. 一様剪断乱流の圧力揺らぎの効果

一様剪断乱流では剪断により乱流エネルギーが時間とともに増加するが圧縮性効果によりその成長率が減少することが知られている[3]．そこで本研究でも一様剪断乱流の

*東京大学生産技術研究所　第1部

DNSを行いM_tの初期値が0.1と0.3の場合を計算し統計量を求めた．図1に乱流エネルギーの成長率を示す．ただし乱流エネルギーKと剪断率S（$=\partial U_x/\partial y$）によって規格化されている．$M_t=0.1$のときの成長率は非圧縮性乱流（$M_t=0$）の場合とほとんど変わらないが，$M_t=0.3$のときの成長率は減少し$M_t=0.1$に比べ約70％となっている．

Sarkar[3] は乱流エネルギーの各成分の非等方性が強くなり生産項が減少することが成長率減少の主な原因であることをDNSを用いて示した．主流方向をx，速度勾配の方向をyとすると$\langle u'^2_y\rangle$が相対的に小さくなり$\langle u'_x u'_y\rangle$が減少するためである．そこで$\langle u'^2_y\rangle$の発展方程式

$$\frac{1}{SK}\frac{\partial}{\partial t}\langle u_y'^2\rangle = -\frac{\varepsilon_{yy}}{SK} + \frac{1}{SK\bar{\rho}}\left\langle p'\frac{\partial u_y'}{\partial y}\right\rangle \qquad (5)$$

を調べる．ここでε_{yy}は粘性による散逸項である．各項の時間発展を図2に示す．$\langle u'^2_y\rangle$の減少は右辺第2項の圧力歪み相関の減少が主な原因であり，圧力揺らぎの影響が重要であることが確認される．

Verman et al.[4] は乱流混合層のDNSを行い成長率の減少の原因は上記と同様に圧力揺らぎの相対的な減少による乱流エネルギーの非等方性の変化であることを示した．圧力揺らぎはマッハ数とともに増加するが圧力は非負である束縛条件から増加が制限され，規格化した圧力揺らぎは逆に減少するためである．そこで一様剪断乱流の圧力の確率密度分布を調べた．分散の大きい$M_t=0.3$の場合でも平均値は0.789，標準偏差は0.135，最小値は0.367で，非負である束縛条件は直接に圧力揺らぎの減少には寄与していないと考えられる．そこで圧力分散の発展方程式（2）に着目する．一様剪断乱流の場合の主要項は

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle p'^2\rangle = -2\gamma P\left\langle p'\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right\rangle - \varepsilon_p + \mathrm{Re\,s.} \qquad (6)$$

と書ける．ただしRes.は残りの項で値は小さい．図3に$M_t=0.1$の場合の主要3項の値を，図4に$M_t=0.3$の場合を示す．両図とも右辺第1項の圧力膨張相関項が大きな値を持つ．圧力膨張相関は乱流エネルギーの収支に対する寄与は小さいことが知られているが，圧力分散の時間発展には非常に重要であることがわかる．また$M_t=0.3$のときは右辺第2項の散逸項ε_pも大きな値を持ちその結果圧力分散の増加を押さえていることが示された．

乱流の統計理論を用いると散逸項ε_pは

$$\varepsilon_p \cong 2(\gamma-1)\bar{\kappa}\left\langle\frac{\partial p'}{\partial x_i}\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right\rangle \propto \frac{\bar{\nu}}{P_r}\int dk\,k^2 E_p(k) \qquad (7)$$

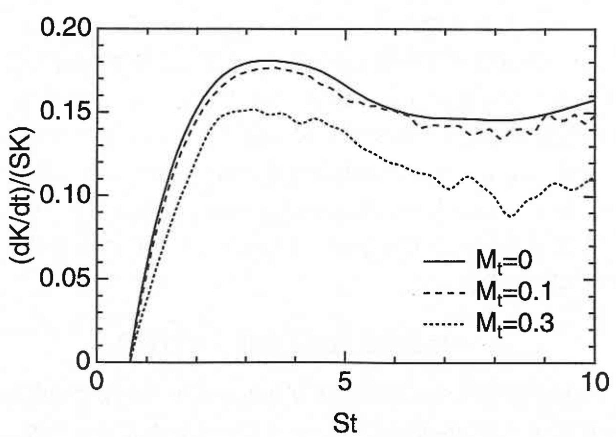

図1　乱流エネルギーの成長率

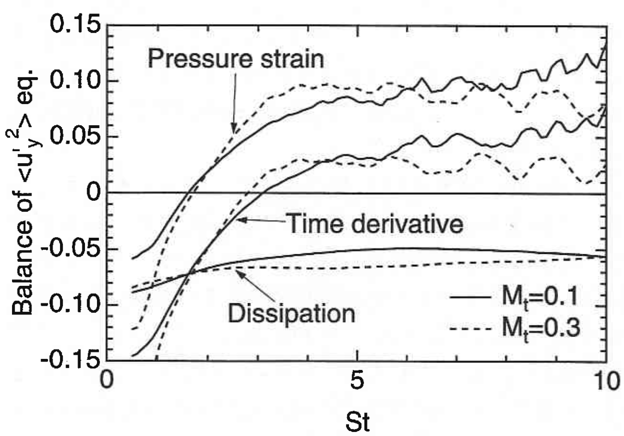

図2　$\langle u'^2_y\rangle$方程式の収支

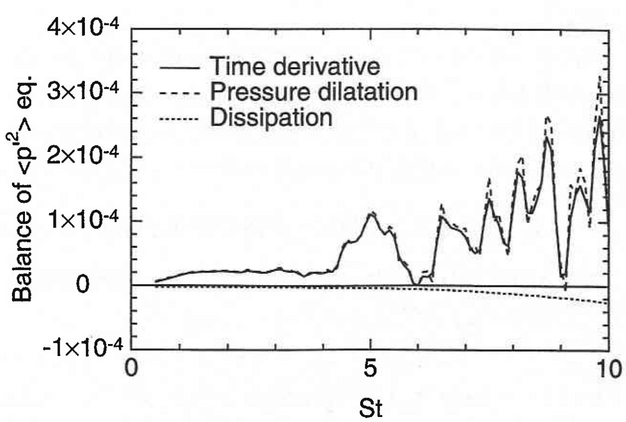

図3　圧力分散方程式の収支（$M_t=0.1$）

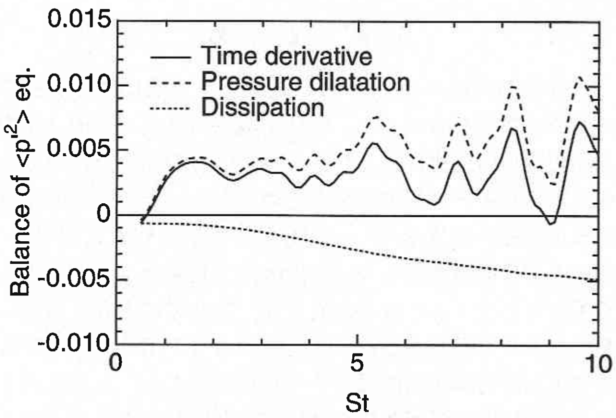

図4　圧力分散方程式の収支（$M_t = 0.3$）

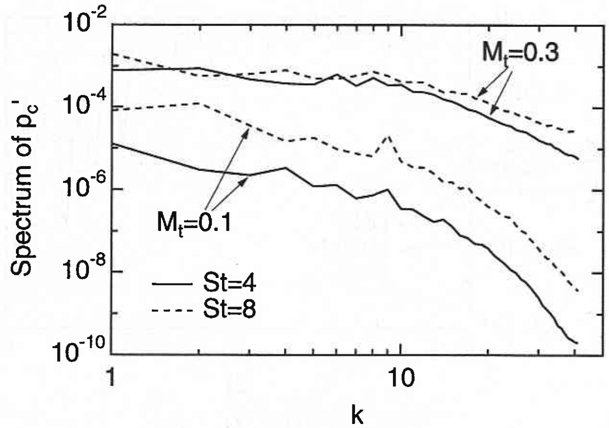

図5　圧縮成分の圧力スペクトル

と評価できる．ただし E_p（k）は圧力分散のスペクトルである．さらに圧力揺らぎを非圧縮成分と圧縮成分に分けて考えそれぞれのスペクトルを次のように仮定する．

$$E_p(k) = E_{ps}(k) + E_{pc}(k) \quad \cdots\cdots (8)$$

$$E_{ps}(k) \propto \bar{\rho}^2 \varepsilon^{4/3} k^{-7/3} \quad \cdots\cdots (9)$$

$$E_{pc}(k) \cong \bar{\rho}^2 \bar{c}^2 E_c(k) \propto k^{-5/3-\alpha} \quad \cdots\cdots (10)$$

ただし圧縮成分の圧力スペクトルは圧縮成分の乱流エネルギースペクトルに比例するとし，5/3乗則からのずれを α とした．Bataille et al.[9] は M_t が1に近い場合は $\alpha = 0$，M_t が1よりずっと小さい場合は $\alpha = 2$ であることを理論的に示した．図5に圧縮成分の圧力スペクトルのDNSの値を示す．レイノルズ数が低いためべき数 α は評価できないが，$M_t = 0.1$ の場合は高波数になると急激に落ちるのに対して $M_t = 0.3$ の場合は高波数成分がかなり残っていることがわかる．すなわち乱流マッハ数が大きくなると圧力揺らぎの高波数成分が5/3乗則と同等に大きくなり，散逸率 ε_p が大きくなることが示唆される．

4. 統計理論によるモデリング

2スケール統計理論[10,11]を用いて散逸率 ε_p と圧力膨張相関のモデル化を試みる．(8)－(10)を(7)に代入し積分を行い統計理論を用いると

$$\varepsilon_p \propto \begin{cases} (\varepsilon/K)\langle p'^2 \rangle & \text{for } \alpha = 0 \\ (\varepsilon/K)\langle p'^2 \rangle R_T^{-1/2} & \text{for } \alpha > 2/3 \end{cases} \quad \cdots\cdots (11)$$

［ただし $R_T = K^2/(\bar{\nu}\varepsilon)$］と表される．$M_t$ が大きい場合は乱流エネルギー散逸率 ε と同様に粘性率 ν には依存しないが M_t が小さい場合は $\nu^{1/2}$ に比例して小さくなることが示唆される．

また圧力膨張相関は

$$\left\langle p' \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \right\rangle = -(1 - C_{pd3}\chi_p)\left[C_{pd1} M_t^2 \frac{D}{Dt}(\bar{\rho}K) + C_{pd2}\gamma\bar{\rho} M_t^2 K \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right] \cdots (12)$$

ただし

$$\chi_p = \langle p'^2 \rangle / (2\bar{\rho}^2 \bar{c}^2 K) \quad \cdots\cdots (13)$$

とモデル化される．一様剪断乱流では右辺角かっこ内の第1項の時間微分項が残る．無次元パラメータ χ_p は規格化した圧力分散で，弱い乱れに対してはポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの比に対応する．図6に $M_t = 0.1$ の場合の圧力膨張相関項を，図7に $M_t = 0.3$ の場合を示す．ここでは $C_{pd1} = 1.2$ と $C_{pd3} = 6$ を用いることにより，モデルとDNSの値をおよそ一致させることができた．もし χ_p が無視できると圧力膨張相関は $D(\bar{\rho}^2 K^2)/Dt$ に比例する．これは圧力分散が $\bar{\rho}^2 K^2$ に比例することに対応している．また(12)の $1\text{-}C_{pd3}\chi_p$ の部分は乱流マッハ数が大きくなると規格化した圧力膨張相関が小さくなるという圧縮性効果を

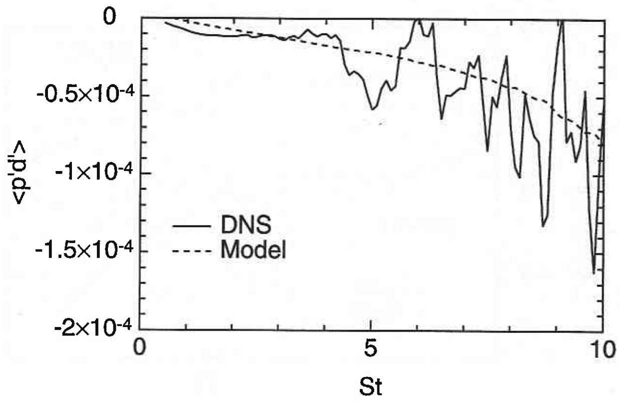

図6　圧力膨張相関（$M_t = 0.1$）

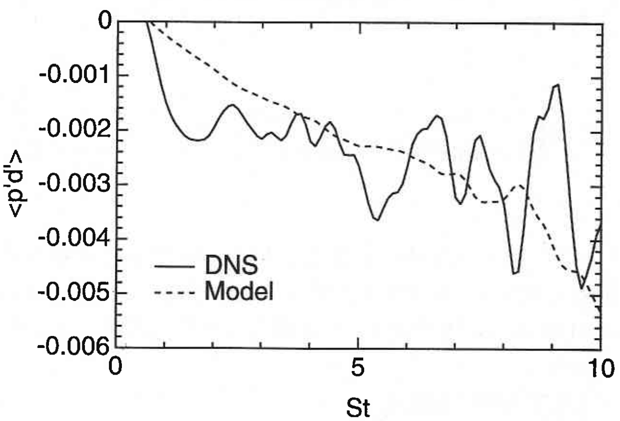

図7　圧力膨張相関（$M_t = 0.3$）

表す．

Sarkar[3] は勾配マッハ数 $M_g = Sl/c$（l は乱流長さスケール）を用いて成長率の違いを説明した．M_g や P_k/ε など非定常性を表すパラメータを導入することで一様剪断流と境界層の圧縮性効果の違いを表せる[2]．本モデルによるとその物理的機構は非定常性によって圧力膨張相関が大きくなり圧力分散の時間変化に影響を及ぼすことであると説明できる．

5. ま　と　め

一様剪断乱流のDNSを行い乱流マッハ数による成長率の減少の機構を考察した．成長率減少の直接の原因は圧力歪み相関項の変化によりレイノルズ応力の非等方性が変わり，エネルギー生産項が減るためである．そこで圧力歪み相関項に強い関連を持つ圧力分散の発展方程式に着目し，特に圧力分散散逸項について調べた．乱流マッハ数によって圧力スペクトルの分布が異なり，散逸項の大きさの違いができることがわかった．また統計理論を用いて圧力分散散逸項と圧力膨張相関項のモデル化を試みた．乱流場の非定常性が圧力膨張相関項を通じて圧力揺らぎを大きくすることが示された．

（1998年10月6日受理）

参　考　文　献

1） S. K. Lele: Annu. Rev. Fluid Mech. **26** (1994) 211.
2） P. Bradshaw: ながれ **15** (1996) 354.
3） S. Sarkar: J. Fluid Mech. **282** (1995) 163.
4） A. W. Vreman, N. D. Sandham, & K. H. Luo: J. Fluid Mech. **320** (1996) 235.
5） A. Yoshizawa: Phys. Fluids **9** (1997) 3024.
6） A. Yoshizawa, W. W. Liou, N. Yokoi, & T. H. Shih: Phys. Fluids **7** (1995) 3105.
7） R. Rubinstein & G. Erlebacher: Phys. Fluids **9** (1997) 3037.
8） 半場: 生産研究 **50** (1998) 7.
9） F. Bataille & J.-P. Bertoglio: FED-Vol. 151, Transitional and Turbulent Compressible Flows, ASME, (1993).
10） 半場：生産研究 **49** (1997) 75.
11） F. Hamba & G. A. Blaisdell: Phys. Fluids **9** (1997) 2749.