

3 次非線形 k-ε モデルによる外壁が回転している 円管内旋回乱流の数値解析

Turbulent Swirling Flow in a Rotating Pipe Using a Third-Order Nonlinear k-ε Model

西 島 勝 一*

Shoiti NISIZIMA

1. はじめに

工学における乱流の数値解析では、k-ε モデルが多用されている。このモデルは工学上重要な幾つかの乱流を的確に予測出来ないという欠点も指摘され、改良が図られてきている。旋回を伴う流れの特性再現をめざして、3 次の非線形効果を取り込んだモデルも提起されてきている¹⁻³⁾。

本論文では、統計理論の考察に基づき、レイノルズ応力表現に対して歪み速度テンソル $S_{\alpha\beta}$ と渦度テンソル $\Omega_{\alpha\beta}$ の 3 次非線形渦粘性表現を用いた k-ε モデル⁴⁾を示す。このモデルを外壁が回転している直円管内の発達した旋回乱流の解析に適用し、結果を実測値や 2 次以下のモデルによる解析値と比較検討し、高次項の効果を明らかにする。

2. 3 次非線形 k-ε モデル

2.1 統計理論からの示唆

速度、圧力（密度で割ったもの）の平均部分を (\bar{v}, \bar{p}) と表すと、三次元非圧縮・粘性流体に対する平均部分の方程式は、

$$\frac{D\bar{v}_\alpha}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) \bar{v}_\alpha = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(R_{\alpha\alpha} + \nu \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \right), \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \dots (2)$$

で与えられる。ここで、 ν は動粘性率、 $R_{\alpha\beta}$ はレイノルズ応力である。吉澤は TSDIA (Two-Scale Direct-Interaction Approximation) 理論の結果を用いて、擾乱場の基本的統計量として乱流エネルギー k とエネルギー散逸率 ε を選び、次の非線形表現を提案した^{4,5)}：

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{2}{3} k \delta_{\alpha\beta} + \nu_{TN} S_{\alpha\beta} \quad \leftarrow \boxed{0 \sim 1 \text{次}}$$

$$- N_1 \left(S_{\alpha\alpha} S_{\alpha\beta} + S_{\beta\alpha} S_{\alpha\alpha} - \frac{2}{3} S^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \quad \leftarrow \boxed{2 \text{次 (SS)}}$$

$$- N_2 (S_{\alpha\alpha} \Omega_{\alpha\beta} + S_{\beta\alpha} \Omega_{\alpha\alpha}) \quad \leftarrow \boxed{2 \text{次 (S}\Omega\text{)}}$$

$$+ N_3 (S_{\alpha\alpha} S_{\alpha\beta} \Omega_{\beta\beta} + S_{\beta\alpha} S_{\alpha\beta} \Omega_{\beta\alpha}) \quad \leftarrow \boxed{2 \text{次 (SS}\Omega\text{)}}$$

$$+ N_4 \left(S_{\alpha\alpha} \Omega_{\alpha\beta} \Omega_{\beta\beta} + S_{\beta\alpha} \Omega_{\alpha\beta} \Omega_{\beta\alpha} - \frac{2}{3} S_{\alpha\beta} \Omega_{\beta\gamma} \Omega_{\gamma\alpha} \delta_{\alpha\beta} \right). \quad \dots (3)$$

↑ $\boxed{3 \text{次 (S}\Omega\Omega\text{)}}$

これは、乱流特性長さスケール l と k との次の対応関係、

	k, ε	\longleftrightarrow	ε, l
1次:	$\frac{k^2}{\varepsilon} S$	\longleftrightarrow	$\varepsilon^{1/3} l^{4/3} S$
2次:	$\frac{k^3}{\varepsilon^2} SS$	\longleftrightarrow	$l^2 SS$
3次:	$\frac{k^4}{\varepsilon^3} SS\Omega$	\longleftrightarrow	$\frac{l^{8/3}}{\varepsilon^{1/3}} SS\Omega$

..... (4)

を用い、通常の $l \propto \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$ を、 $l \propto \frac{1}{1+C\chi^2} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$ と置換して導出される。 χ は式 (13) で記述。

このような S および Ω の高次項までをレイノルズ応力表現へ反映させた k-ε モデルは、Shih ら¹⁾、Craft ら²⁾、岡本・島³⁾ によっても提案されている。それらと本モデルとは導出過程、諸定数や関数、エネルギー散逸率 ε 方程式等への新付加項など異なっているが、 S や Ω の高次項が乱流の特性再現にどのように振る舞うのかを定性的に検討することは、各乱流モデルの評価にとって共通して有効であると考えられる。

2.2 低レイノルズ数形モデルとの結合

本レイノルズ応力表現を壁乱流へ適用するために、安倍らにより提起されている低レイノルズ数型 k-ε モデル⁶⁾ と結合する。以降の解析計算は、安倍らによって最適化され

*東京大学生産技術研究所 第 1 部

研 究 速 報

ているモデル定数は一切変更しないで進める。

$$\frac{Dk}{Dt} = R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ \left(\frac{v_t}{C_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x_a} \right\}, \dots \dots \dots (5)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ \left(\frac{v_t}{C_{\varepsilon 3}} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a} \right\}, \dots \dots (6)$$

$$v_t = C_v f_v \frac{k^2}{\varepsilon}, \dots \dots \dots (7)$$

$$f_v = \left[1 + \left(\frac{5}{R_t^{3/4}} \right) \exp \left\{ - \left(\frac{R_t}{200} \right)^2 \right\} \right] \left\{ 1 - \exp \left(\frac{-y^*}{14} \right) \right\}^2, \dots \dots (8)$$

$$f_{\varepsilon} = \left\{ 1 - \exp \left(\frac{-y^*}{3.1} \right) \right\}^2 \left[1 - 0.3 \exp \left\{ - \left(\frac{R_t}{6.5} \right)^2 \right\} \right], \dots \dots \dots (9)$$

$$y^* = \frac{u_{\tau} y}{\nu}, \quad u_{\tau} = (\nu \varepsilon)^{1/4}, \quad R_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon}, \dots \dots \dots (10)$$

ここで y は壁からの距離で、モデル定数は次の通り決められている。

$$\begin{aligned} C_v &= 0.09, & C_k &= 1.4, & C_{\varepsilon 1} &= 1.5, \\ C_{\varepsilon 2} &= 1.9, & C_{\varepsilon 3} &= 1.4, & & \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

3. 外壁が回転している円管内旋回流への適用

3.1 未定数数の決定

レイノルズ応力表現内の未定数値は、溝乱流の数値解析において対数速度則を再現出来るように、まず、式 (3) の 1 次項内の値を決める。次ぎに、同溝乱流において、乱流強度各成分の分布が実験結果に近づく様に、式 (3) 2 次項の定数を確定する。3 次の定数決定は、既決定の定数を固定し、回転円管内旋回流の解析における管軸方向流速や円周方向流速値が実験結果を再現できる様に行った。以上決定した定数を固定し、溝乱流等の数値解析を繰り返して行い、実験結果の再現に最も良い値を確定していった。

$$v_{TN} = v_t \frac{(1 + C_{v\chi} C_v')}{(1 + C_v \chi^2)^{2/3}}, \dots \dots \dots (12)$$

$$\chi = \sqrt{\frac{k^2}{\varepsilon^2} (C_s S^2 + C_{\Omega} \Omega^2)}, \quad C_s + C_{\Omega} = 1 \dots \dots \dots (13)$$

$$N_1 = \frac{C_{N1}}{C_v} \frac{k}{\varepsilon} \frac{v_t}{(1 + C_v \chi^2)},$$

$$N_2 = \frac{C_{N2}}{C_v} \frac{k}{\varepsilon} \frac{v_t}{(1 + C_v \chi^2)}$$

$$N_3 = C_{N3} \frac{k^4}{\varepsilon^3} \frac{1}{(1 + C_v \chi^2)^{4/3}} \approx C_{N3} \frac{v_{TN}^2}{\varepsilon},$$

$$N_4 = C_{N4} \frac{k^4}{\varepsilon^3} \frac{1}{(1 + C_v \chi^2)^{4/3}} \approx C_{N4} \frac{v_{TN}^2}{\varepsilon} \dots \dots \dots (14)$$

$$\begin{aligned} C_v &= 0.09, & C_v' &= 0.1, & C_{v\chi} &= 13., & C_{N1} &= 0.04, \\ C_{N2} &= 0.05, & C_{N3} &= -0.3, & C_{N4} &= 0.03, & C_{\Omega} &= 1. \dots \dots (15) \end{aligned}$$

本レイノルズ応力表現は、 $C_v = C_{N1} = C_{N2} = C_{N3} = C_{N4} = 0$ とすることにより、安倍らの k - ε モデル⁶⁾ に帰結する。

3.2 支配方程式と数値計算方法

境界条件は管中心で対称性を仮定し、軸方向 x と円周方向 θ への統計量の変化無し、半径方向流速 \bar{v}_r 零、壁上で

$$\bar{v}_x = k = 0, \quad \varepsilon \approx \nu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dk}{dr} \right), \quad \bar{v}_{\theta} = 0 \sim \bar{v}_{xave} \dots (16)$$

計算格子は溝間の半分に 61 個を不等分割に配分し、空間を不等間隔中心差分、時間発展に Crank-Nicolson 陰解法を用いて、以下の方程式を解いた。

$$\frac{d\bar{v}_x}{dt} = - \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r R_{xx}) + \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{v}_x}{dr} \right) \right\} \dots \dots \dots (17)$$

$$\frac{d\bar{v}_{\theta}}{dt} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 R_{r\theta}) + \nu \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^3 \frac{d}{dr} \left(\frac{\bar{v}_{\theta}}{r} \right) \right\} \right] \dots \dots \dots (18)$$

$$\begin{aligned} R_{xx} &= v_{TN} S_{xx} - N_3 S_{r\theta} (S_{xx} \Omega_{r\theta} + S_{r\theta} \Omega_{xx}) \\ &\quad - N_4 \{ S_{xx} (2\Omega_{xx}^2 + \Omega_{r\theta}^2) - S_{r\theta} \Omega_{xx} \Omega_{r\theta} \} \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{r\theta} &= v_{TN} S_{r\theta} + N_3 S_{xx} (S_{xx} \Omega_{r\theta} + S_{r\theta} \Omega_{xx}) \\ &\quad - N_4 \{ S_{r\theta} (\Omega_{xx}^2 + 2\Omega_{r\theta}^2) - S_{xx} \Omega_{xx} \Omega_{r\theta} \} \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

$$R_{xx} = - \frac{2}{3} k - 2N_1 (S_{xx}^2 - \frac{S^2}{3}) + 2N_2 S_{xx} \Omega_{xx} \dots \dots \dots (21)$$

$$R_{rr} = - \frac{2}{3} k - 2N_1 (S_{xx}^2 + S_{r\theta}^2 - \frac{S^2}{3}) - 2N_2 (S_{xx} \Omega_{xx} - S_{r\theta} \Omega_{r\theta}) \dots (22)$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{2}{3}k - 2N_1(S_{\theta\theta}^2 - \frac{S^2}{3}) - 2N_2S_{r\theta}\Omega_{r\theta} \dots\dots\dots (23)$$

$$S_{xr} = \frac{d\bar{v}_x}{dr} = S_{rx}, \quad S_{r\theta} = \frac{d\bar{v}_\theta}{dr} - \frac{\bar{v}_\theta}{r} = r \frac{d}{dr} \left(\frac{\bar{v}_\theta}{r} \right) = S_{\theta r},$$

$$\Omega_{xr} = -\frac{d\bar{v}_x}{dr} = -\Omega_{rx}, \quad \Omega_{r\theta} = \frac{d\bar{v}_\theta}{dr} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\bar{v}_\theta). \quad \dots (24)$$

3.3 数値解析結果

数値解析は、菊山らの実験結果⁷⁾と比較検討するために、断面平均流速 \bar{v}_{xave} と直径に基づくレイノルズ数 $Re \approx 20000$ 、管壁の周速度 $\bar{v}_{\theta wall}$ で表す回転率 $N = \bar{v}_{\theta wall} / \bar{v}_{xave}$ を 0 ～ 1 まで変化させて行った。

図1の軸方向流速の結果は、2次までのモデルでも管中心部分の \bar{v}_x の層流的隆起を再現できることを示している。3次まで入れると、2次に比べて \bar{v}_x の層流的傾向を抑制することがわかる。尚、図1, 3, 5中の Ord.2とはレイノルズ応力表現を2次項まで、Ord.3は3次項まで取り込んだ結果を各々表している。図2に $N=1$ における式(19)中の各項の収支を示したが、3次項総体としては壁近くの R_{xr} を正方向に変化させる働きをしていること、しかし、 $SS\Omega$ の3次項は \bar{v}_x の実測特性に逆らう様にはたらいっていることがわかる。この $SS\Omega$ 3次項は実測 \bar{v}_θ の特性再現に有効であるので、省くわけにいかない。

図3には円周方向流速、図4にはレイノルズ応力 $R_{r\theta}$ の結果を示してある。図3から、3次項を取り込まないと実測で明らかにされている剛体回転からのズレを再現できないことがわかる。図4から、1次の $R_{r\theta}$ 表現は実測 \bar{v}_θ の再

現を妨げる様に働き、3次の2項の働きによって1次の正成分を打ち消して、総体の $R_{r\theta}$ を補正していることが読みとれる。

図5, 6は、同定数値で無回転円管内乱流を解析した結果を示している。図6の乱流強度の非等方は式(21)～(23)の2次項から表現される。

定数(15)の $C_\Omega = 1$ は、 \bar{v}_x 値に作用する R_{xr} の(13) χ への Ω_{xr} (24)の寄与度を S_{xr} に比して大きくする目的で決められた。これは、河村らの結果⁸⁾と同傾向である。

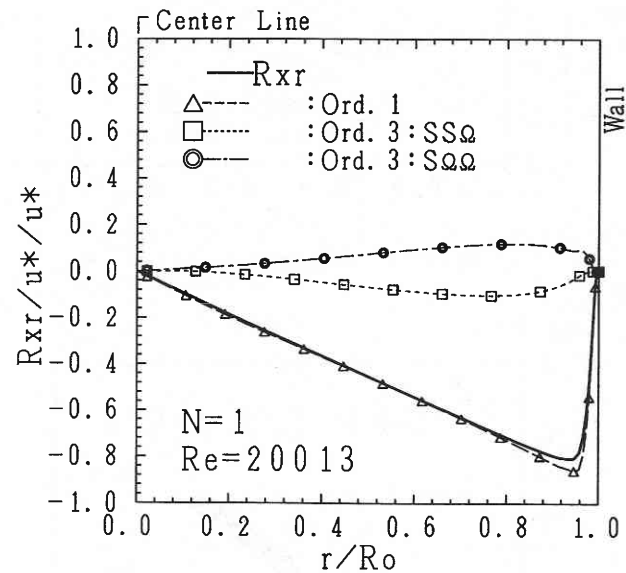


図2 レイノルズ応力 $R_{xr} / u_*^* / u_0^*$

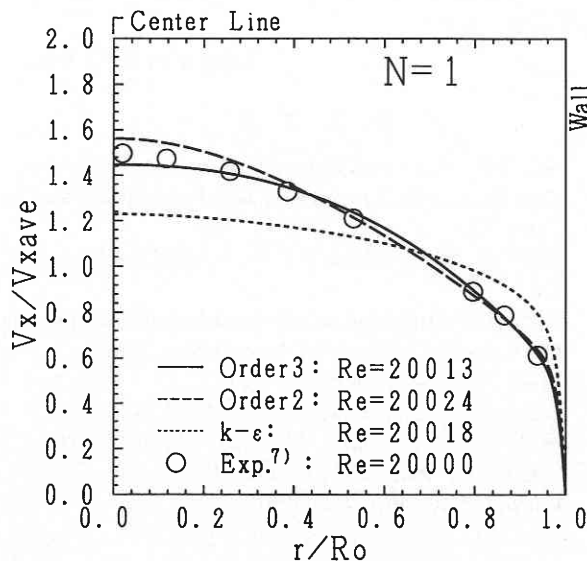


図1 管軸方向の流速 $\bar{v}_x / \bar{v}_{xave}$

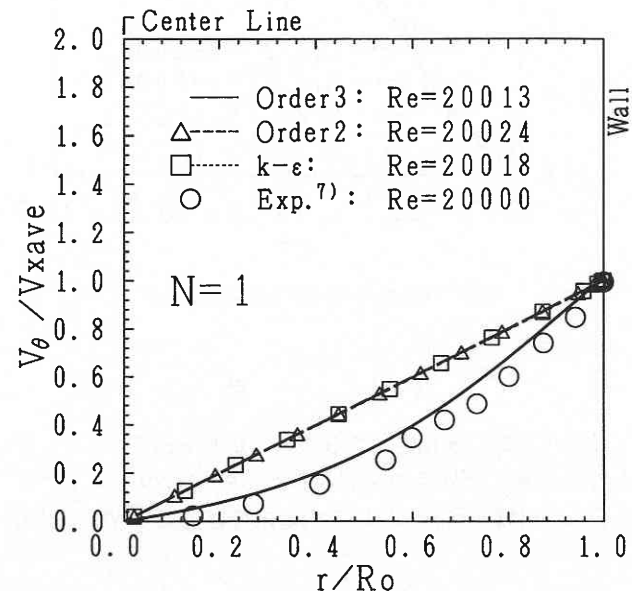
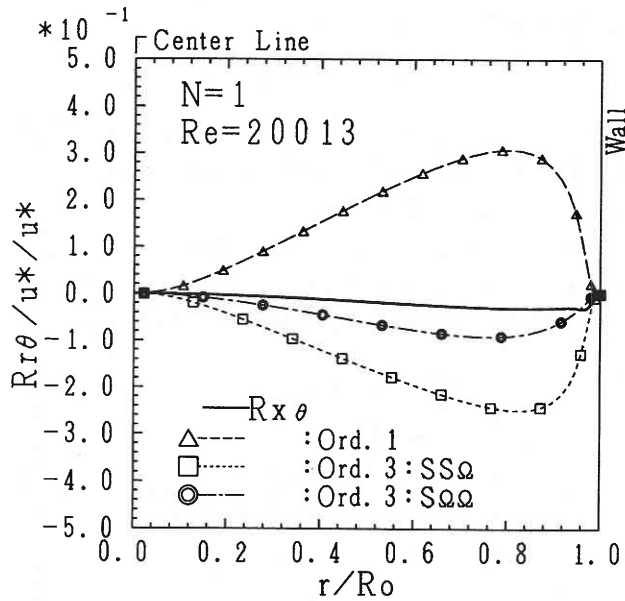
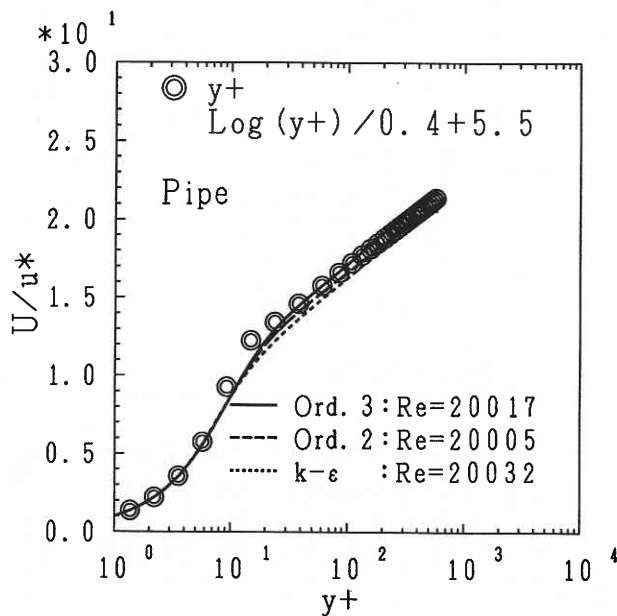
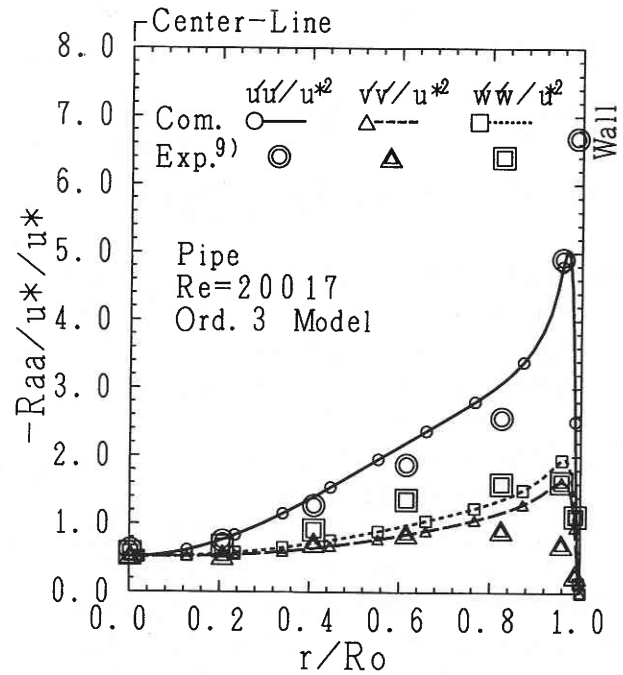


図3 円周方向の流速 $\bar{v}_\theta / \bar{v}_{\theta ave}$

図4 レイノルズ応力 $R_{r\theta}/u_*^*/u_*^*$.図5 無回転時の管軸方向流速 U/u_*^* .

4. 結 論

統計理論的に導出された3次の非線形 $k-\epsilon$ モデルを、壁上で滑り無し境界条件を課せられる安倍らのモデル⁶⁾と結合し、外壁が回転している円管内旋回流の解析に適用

図6 無回転時の乱流強度の各成分 $-R_{aa}/u_*^*/u_*^*$.

し、溝乱流の解析と合わせて、モデル定数の検討等を行った。

外壁が回転している円管内旋回流における実験結果との比較検討を行い、レイノルズ応力表現の3次項が、旋回流の特性再現に重要であることがわかった。

このモデルを、下流方向に減衰していく円管内旋回流、急減速現象を伴う建物周りの乱流、噴流等に適用していくことは、汎用性のある渦粘性表現モデルを検討する上で興味ある課題である。

(1998年10月9日受理)

参 照 文 献

- 1) Shih, T.H., Jiang, Z., and William, L., NASA TM 113112 (1997).
- 2) Craft, T.J., Launder, B.E., and Suga, Int.J.Heat and Fluid Flows, 18 (1997) 15.
- 3) 岡本・島, 第30回乱流シンポジウム講演論文集 (1998), 175.
- 4) Yoshizawa, A., Hydrodynamic and Magnetohydrodynamic Turbulent Flows: Modeling and Statistical Theory (Kluwer, 1998).
- 5) 西島, 生産研究, 50-580 (1998), 15.
- 6) 安倍・長野・近藤, 機論, B58-554 (1992) 3003.
- 7) 菊山・村上・西堀・前田, 機論, B48-432 (1982) 1431.
- 8) 河村・三島, 機論, B57-536 (1991) 1251.
- 9) Laufer, J., NACA Rep. 1053 (1950).