**研究速報**

# 一般曲線座標系における非圧縮性乱流数値解析に適した差分スキーム

## —第6報，修正コロケート格子系差分スキームの4次精度化とチャンネル内乱流による一般座標系差分スキームの検証—

## Proper Finite Difference Schemes for Simulations of Incompressible Turbulent Flow in Generalized Curvilinear Coordinates
(6 th Report, The fourth order modified finite difference scheme in collocated grid layout and the validation of finite difference schemes in generalized curvilinear coordinates by the simulations of a turbulent channel flow)

小垣哲也*・小林敏雄**・谷口伸行**
Tetsuya KOGAKI, Toshio KOBAYASHI, Nobuyuki TANIGUCHI

## 1. 緒　言

第1～5報[1-3]において，著者らは，非圧縮性乱流数値解析の基礎方程式（連続の式，Navier-Stokes方程式，速度の2乗量と運動エネルギー$K$の輸送方程式）の解析的保存特性を適切に近似する差分スキームを一般座標系に拡張し，保存特性の検証を行ってきた．その結果，実際の計算上満足できる精度で運動量と運動エネルギーの保存特性が適切であるのは，第5報[3]において一般座標系に拡張された修正コロケート格子系差分スキーム[4]のみであることがわかった．

本報では，第5報[3]において構成された一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームの空間4次精度化を紹介するとともに，一般座標系におけるスタガード格子系および修正コロケート格子系差分スキームの実際の非圧縮性乱流場への適用例として，平行平板間内流れのDNSを行い，格子の不等間隔・非直交性による解の影響を調査する．

## 2. 一般座標系における4次精度修正コロケート格子系差分スキーム

第5報[3]において構成された一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームの空間4次精度化を直感的な方法により行うと，運動エネルギ保存特性がVan Kan修正[5]によって改善されない．森西[4]は，新たにレギュラ格子系における差分スキームと同様な補間および差分を用いてVan Kan修正を導入する空間4次精度修正コロケート格子系差分スキームを提案した．2次精度の場合と同様に，この空間4次精度修正コロケート格子系差分スキームも一般座標系に拡張可能であり，その結果を示すと，以下のような計算アルゴリズムが構成される．

$$u_i^* = u_i^{k-1} + J\Delta t\left[-\left(\mathrm{Conv.-MC4}\right)_i - \left(\mathrm{Pres.-R4}\right)_i - \left(\mathrm{Visc.-MC4}\right)_i\right] \cdots (1)$$

$$\left(\mathrm{Cont.-MC4}\right)^k = 0 \cdots\cdots (2)$$

$$u_i^k = u_i^* - J\Delta t\left[\frac{4}{3}\frac{\delta_2}{\delta_2\xi_m}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial\xi_m}{\partial x_i}\Delta p^k\right) - \frac{1}{3}\frac{\delta_4}{\delta_4\xi_m}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial\xi_m}{\partial x_i}\Delta p^k\right)\right] \cdots (3)$$

$${}^lF_m^k = \overline{U_m^*}^{l\xi_m} - \Delta t\, G^{mn}\frac{\delta_l\Delta_p^{\#}}{\delta_l\xi_n} \qquad (l=1,2) \cdots\cdots (4)$$

$$p^k = p^{k-1} + \Delta p \cdots\cdots (5)$$

ここで，式（1）中の-MC4は，4次精度修正コロケート格子系差分スキームであることを示している．図1に4次精度修正コロケート格子系差分スキームにおける直交速度成

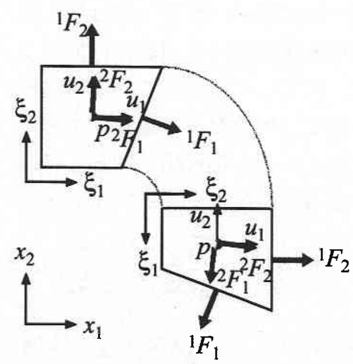


Fig. 1　Colocated gird layout for the forth-order accurate modified finite difference scheme.

*日本学術振興会特別研究員
**東京大学国際・産学共同研究センター
***東京大学生産技術研究所　第2部

研 究 速 報

分，体積フラックスおよび圧力の定義位置を示す．4次精度の修正コロケート格子系差分スキームにおいては，新たにセル中心で定義される体積フラックス${}^2F_m^{\ k}$が導入されている．連続の式の離散化は次のように定義される．

$$\left(\mathrm{Cont.-MC4}\right) \equiv \frac{4}{3}\frac{\delta_1}{\delta_1}\frac{{}^1F_m}{\xi_m} - \frac{1}{3}\frac{\delta_2}{\delta_2}\frac{{}^2F_m}{\xi_m} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

式(4)を式(2)に代入して，以下のような圧力方程式が得られる．

$$\frac{4}{3}\frac{\delta_1}{\delta_1\xi_m}\left[G^{mn}\frac{\delta_1\Delta p^{k\#}}{\delta_1\xi_n}\right] - \frac{1}{3}\frac{\delta_2}{\delta_2\xi_m}\left[G^{mn}\frac{\delta_2\Delta p^{k}}{\delta_2\xi_n}\right]$$
$$= \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{4}{3}\frac{\delta_1\overline{U_m^{\ *}}^{1\xi_m}}{\delta_1\xi_m} - \frac{1}{3}\frac{\delta_2\overline{U_m^{\ *}}^{2\xi_m}}{\delta_2\xi_m}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

式(1)中の対流項差分スキーム$(\mathrm{Conv\text{-}MC4})_i$は，以下のように拡張される．

$$\left(\mathrm{Div.-MC4}\right)_i \equiv \frac{4}{3}\frac{\delta_1{}^1F_m\bar{u}_t^{\ 1\xi_m}}{\delta_1\xi_m} - \frac{1}{3}\frac{\delta_2{}^2F_m\bar{u}_t^{\ 2\xi_m}}{\delta_2\xi_m} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

$$\left(\mathrm{Adv.-MC4}\right)_i \equiv \frac{4}{3}\overline{{}^1F_m\frac{\delta_1 u_i}{\delta_1\xi_m}}^{1\xi_m} - \frac{1}{3}\overline{{}^2F_m\frac{\delta_2 u_i}{\delta_2\xi_m}}^{2\xi_m} \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

$$\left(\mathrm{Skew.-MC4}\right)_i \equiv \frac{1}{2}\left(\mathrm{Div.-MC4}\right)_i + \frac{1}{2}\left(\mathrm{Adv.-MC4}\right)_i \cdots (10)$$

これらの対流項差分スキームは，離散的に次式を満足する．

$$\left(\mathrm{Adv.-MC4}\right)_i = \left(\mathrm{Div.-MC4}\right)_i - u_i\left(\mathrm{Cont.-MC4}\right) \cdots\cdots (11)$$

$$u_i\left(\mathrm{Div.-MC4}\right)_1 = u_1\left(\mathrm{Skew.-MC4}\right)_1 + \frac{u_1u_1}{2}\left(\mathrm{Cont.-MC4}\right) \cdots (12)$$

$$u_1\left(\mathrm{Adv.-MC4}\right)_1 = u_1\left(\mathrm{Skew.-MC4}\right)_1 - \frac{u_1u_1}{2}\left(\mathrm{Cont.-MC4}\right) \cdots (13)$$

$$u_1\left(\mathrm{Skew.-MC4}\right)_1 = \frac{4}{3}\frac{\delta_1}{\delta_1\xi_m}\left({}^1F_m\frac{\widetilde{u_1u_1}}{2}^{1\xi_m}\right) - \frac{4}{3}\frac{\delta_2}{\delta_2\xi_m}\left({}^2F_m\frac{\widetilde{u_1u_1}}{2}^{2\xi_m}\right) \cdots (14)$$

式(11)は第1報中の式(25)に，式(12)〜(14)は第1報中の式(28)〜(30)に対応し，解析的保存特性を適切に近似していることがわかる．従って，式(8)〜(10)で構成される対流項差分スキームは，運動量，速度二乗量および運動エネルギーを適切に保存する離散化式である．粘性項に関しては，圧力方程式の離散化式(7)の左辺に類似した形式で定義する．

$$\left(\mathrm{Visc.-MC4}\right)_i \equiv \frac{4}{3}\frac{\delta_1}{\delta_1\xi_m}\left(\nu G^{mn}\frac{\delta_1 u_i^{\#}}{\delta_1\xi_m}\right) - \frac{1}{3}\frac{\delta_2}{\delta_2\xi_m}\left(\nu G^{mn}\frac{\delta_2 u_i}{\delta_2\xi_n}\right) \cdots (15)$$

圧力項の運動エネルギー保存特性が適切になるためには，2次精度の場合と同様に，レギュラ格子系における連続の式（Cont.–R4）が満たされなければならない．

$$\left(\mathrm{Cont.-R4}\right) \equiv \frac{4}{3}\frac{\delta_2 U_m}{\delta_2\xi_m} - \frac{1}{3}\frac{\delta_4 U_m}{\delta_4\xi_m} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

式(2)〜(4)および式(6)から，時間ステップ$k$における（Cont.-R4）は，テイラー展開から次のように評価できる．

$$\frac{4}{3}\frac{\delta_2 U_m^{\ k}}{\delta_2\xi_m} - \frac{1}{3}\frac{\delta_4 U_m^{\ k}}{\delta_4\xi_m}$$

$$= \Delta t\left[\frac{4}{3}\frac{\delta_1}{\delta_1\xi_m}\left\{G^{mn}\frac{\delta_1\Delta p^{\#k}}{\delta_1\xi_n} - \overline{G^{mn}\left(\frac{4}{3}\frac{\delta_2\Delta p^k}{\delta_2\xi_n} - \frac{1}{3}\frac{\delta_4\Delta p^k}{\delta_4\xi_n}\right)}^{1\xi_m}\right\}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}\frac{\delta_2}{\delta_2\xi_m}\left\{G^{mn}\frac{\delta_2\Delta p^{\#k}}{\delta_2\xi_n} - \overline{G^{mn}\left(\frac{4}{3}\frac{\delta_2\Delta p^k}{\delta_2\xi_n} - \frac{1}{3}\frac{\delta_4\Delta p^k}{\delta_4\xi_n}\right)}^{1\xi_m}\right\}\right]$$

$$= \Delta t\left[\frac{1}{32}\frac{\partial^5}{\partial\xi_m^5}\left(G^{mn}\frac{\partial\Delta p^k}{\partial\xi_n}\right)h_m^{\ 4} + \frac{1}{32}\frac{\partial}{\partial\xi_m}\left(G^{mn}\frac{\partial^5\Delta p^k}{\partial\xi_n^5}\right)h_m^{\ 4}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{144}\frac{\partial^3}{\partial\xi_m^3}\left(G^{mn}\frac{\partial^3\Delta p^k}{\partial\xi_n^3}\right)h_m^{\ 2}h_n^{\ 2} + O\left(h^6\right)\right]$$

$$= O\left(\Delta t^2\cdot h^4\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

従って，運動エネルギー$K$の輸送方程式中の圧力項の保存特性の誤差は，時間2次精度かつ空間4次精度となる．

この一般座標系における空間4次精度修正コロケート格子系差分スキームの運動エネルギーの保存特性を図2に示す．保存特性の検証方法は，第5報[3]において行われた2次元周期的非粘性流の数値実験と同様である．空間4次精度の場合も，第5報[3]の空間2次精度の場合と同様に運動エネルギーの保存特性が時間2次精度に改善されているとともに，その傾向は，等間隔直交格子（C0 S0）に限らず，不等間隔直交（C2 S0），等間隔非直交（C0 S2）のいずれ

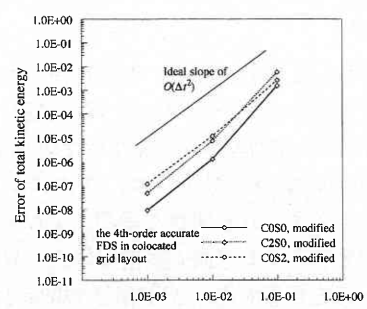


Fig. 2　The error of total kinetic energy by the fourth-order accurate finite difference schemes in the modified colocated gird layout as a function of Courant number.

の計算格子においても同様である．従って，森西の等間隔正規直交座標系における空間4次精度修正コロケート格子系差分スキーム[4]が，一般座標系に適切に拡張されていることが確認された．

圧力方程式を解く際に必要とされるメモリ容量を見積もっておくことは，計算プログラミングのメモリ使用量および計算時間を予測するのに重要である．圧力方程式は，次のような代数方程式に変形した後，ガウス・ザイデル法，SOR法，CG法，マルチグリッド法といった解法によって解かれる．

$$A_p p_p = A_e p_e + A_w p_w + A_n p_n + A_s p_s + \ldots.. \quad \cdots\cdots\cdots (18)$$

ここで，修正コロケート格子系の場合，$p$は$\Delta p$に置き換えられる．実際の数値計算において，係数$A_p$，$A_e$，$A_w$等は，計算の高速化のために変数として記憶されるのが普通である．第5報において構成されたスタガード格子系における2次精度および4次精度圧力方程式を3次元で離散化する場合，散化式中の係数の数は，それぞれ，19個（$=3^n-8$）および123個（$=5^n+2\mathrm{n}-8$）と見積もられる．このように，4次精度のスタガード格子系差分スキームは，2次精度の場合と比較して，メモリ使用量が飛躍的に増加するとともに，離散化が非常に煩雑になって実用的でない．一方，（修正）コロケート格子系差分スキームの場合，同様に係数の数を見積もると，2次精度および4次精度の場合，それぞれ19個（$=3^n-8$）および25個（$=3^n+2n-8$）と見積もられる．従って，（修正）コロケート格子系差分スキームの場合，4次精度化に伴うメモリ使用量の増加は，スタガード格子系と比較すると僅かであり，離散化も比較的容易であり実用上有利である．

## 3. 平行平板間内乱流による検証計算

### 3.1 計算の概要

本研究で構成した一般座標系差分スキームの実際の乱流場への適用例として，壁摩擦速度をベースとしたレイノルズ数$Re_\tau=180$の平行平板間内乱流の計算を行い，DNSデータ[6-7]と比較した．

計算アルゴリズムにはフラクショナルステップ法を用い，時間進行法は，対流項を2次精度Adams-Bashforth法，拡散項をCrank-Nicolsonスキームにより行う半陰解法である．時間間隔は，0.0025である．空間離散化は一般座標系におけるMaliskaのスタガード格子系差分スキームまたは修正コロケート格子系差分スキームを使用し，空間精度は全て2次精度である．圧力Poisson方程式はBi-CGStab法[8]を用いている．ここでは，計算スキームの影響のみを調査するために，SGSモデルは使用していない．計算格子

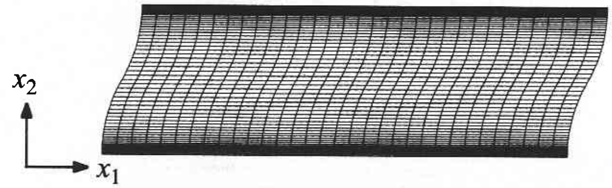


Fig. 3　Nonorthogonal computational grid used for simulations of turbulent flow in a plane channel.

は，DNSとしては非常に粗い格子点数（33×65×33）を使用している．また，不等間隔直交格子に加え，格子の非直交性の影響を調べるため，図3に示されるような壁方向にひずみを持つ不等間隔非直交格子の2つの計算格子を使用した．直交格子，非直交格子において壁からの第1格子点の壁座標$y^+$はそれぞれ，$y^+=0.45$，$y^+=1.0$である．計算領域は$x$，$y$，$z$方向にそれぞれ，$\pi\times H\times\pi/2$である．

### 3.2 計算結果

スタガード格子系および修正コロケート格子系差分スキームによる流れ方向の時間平均速度分布および乱れ強度をそれぞれ図4，5に示す．スタガード格子系差分スキームの場合，格子が非直交だと，平均流速が増加し，乱れ強度が減少する傾向を示している．一方，修正コロケート格子系差分スキームの場合，計算格子の非直交性が平均流速分布および乱れ強度分布に与える影響は僅かである．従って，運動エネルギーの保存特性が満たされることによって，格子の非直交性，不等間隔に対する解の依存性が小さくなる傾向を持つ．

次に，レイノルズ応力収支式中の圧力ひずみ相関項の対角成分$\phi_{11}$，$\phi_{22}$，$\phi_{33}$およびそのトレース$\phi_{kk}$の分布を図6，7に示す．従来，コロケート格子系差分スキームでは，レギュラー格子系における連続の式（Cont.-R2）が満たされないことに起因して，圧力ひずみ相関項の計算精度が非常に低かった[9]．しかし，修正コロケート格子系差分スキームでは，レギュラー格子系における連続の式の残差が時間2次精度に改善されるのに伴い，圧力ひずみ相関項の計算精度が改善され，スタガード格子系差分スキームの結果と比較しても遜色のない結果が得られていることが図6からわかる．また，コロケート格子系差分スキームの場合，トレース$\phi_{kk}$の残差がゼロにならないという問題があったが，修正コロケート格子系差分スキームの場合，計算格子が非直交である場合でも，トレース$\phi_{kk}$の残差は$10^{-6}$オーダーと非常に小さく，解の信頼性が向上している（図7）．図では示さないが，このような修正コロケート格子系差分スキームの優れた特性は，本報で構成された空間4次精度の修正コロケート格子系差分スキームでも確認されている．

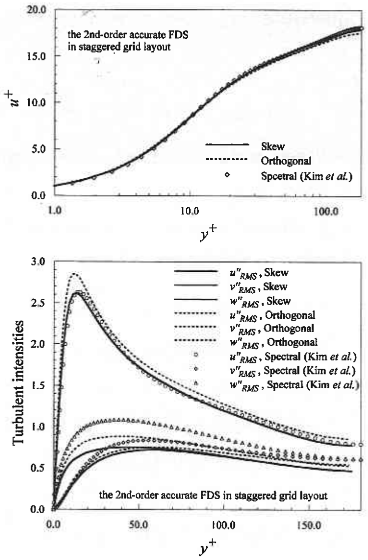


Fig. 4 Time averaged streamwise velocity and velocity fluctuations by the second-order accurate finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout.

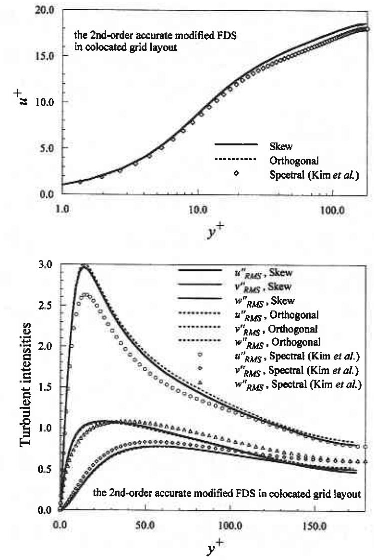


Fig. 5 Time averaged streamwise velocity and velocity fluctuations by the second-order accurate modified finite difference scheme in colocated grid layout.

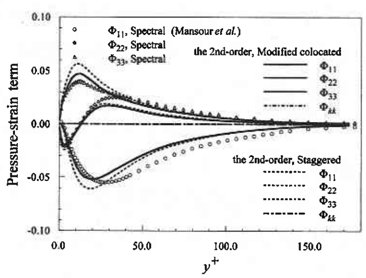


Fig. 6 Pressure-strain term in Reynolds stress budget by the modified finite difference scheme in colocated grid layout and the finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout.

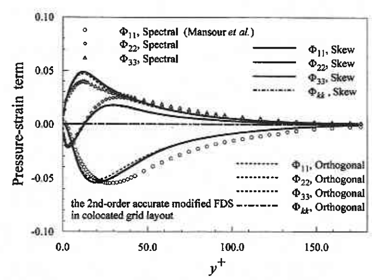


Fig. 7 Pressure-strain term in Reynolds stress budget by the modified finite difference scheme using the orthogonal and the nonorthogonal computational grids.

## 4. 結　　論

本報では，まず第1報において構成した一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームの空間4次精度の定式化を紹介した．次に，本研究で構成した一般座標系差分スキームの実際の乱流場への適用例として，平行平板間内乱流の数値計算を行った．その結果，一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームは，レイノルズ応力収支式の圧力ひずみ相関項の計算精度が改善されることによって，統計量の信頼性が向上するとともに，計算格子の非直交性の影響を受けにくい優れた特性を持つことを実証した．

## 謝　　辞

本研究は，日本学術振興会特腹研究員奨励費（No.7186），同研究員に対する文部省科学研究費補助金およびNEDO独創的産業技術研究開発促進事業（ID No. 8H代-170）の援助を受けた．

(1998年11月9日受理)

## 参　考　文　献

1) 小垣哲也・小林敏雄・谷口伸行，生産研究，**49**-7 (1997), 303-313.
2) 小垣哲也・小林敏雄・谷口伸行，生産研究，**50**-1 (1998), 53-56.
3) 小垣哲也・小林敏雄・谷口伸行，生産研究，**50**-8 (1998), 278-281.
4) 森西洋平，機論，投稿中．
5) Van Kan, J., *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **7-3** (1986), 870-891.
6) Kim, J., Moin, p. and Moser, R., *J. Fluid Mech.*, **177** (1987), 133-166.
7) Mansour, M. N., Kim, J. and Moin, p., *J. Fluid Mech.*, **194** (1988), 15-44.
8) 藤野・松本・水藤，第5回数値流体力学シンポジウム講演論文集，(1991)，501-504.
9) 大岡龍三・村上周三・持田灯，生産研究，**49**-1, (1997), 19-26.