

# コルゲーションが発生したレールを走行する車輪の運動解析

## Analysis of Wheel Motion on Corrugated Rail

堀 江 昭 秀\*・生 田 敏\*\*・曙 道 佳 明\*\*\*・須 田 義 大\*\*・大 野 進 一\*\*\*\*  
 Akihide HORIE, Satoshi IKUTA, Yoshiaki TERUMICHI, Yoshihiro SUDA and Shinichi OHNO

### 1. は じ め に

鉄道のレール表面に発生する波状摩耗(コルゲーション)は、台車部品の破損、騒音の増大、軌道材料の損傷等の諸問題を引き起こす。このため、その発生メカニズムの解明および防止策の検討が必要となるが、その際に詳細な数学モデルを構築することが重要である。

そこで、複数の走行車輪の運動とレールの振動が連成する系を、集中質量系の移動と接触問題を伴うフレキシブルマルチボディシステムとして捉える。まず、車輪・接触ばね系を1自由度の集中質量系、レールを分布定数系とした解析モデルを構築した。次に、これを用いて車輪・レール間の接触力変動が波状摩耗発生・成長の支配的要因の一つであるという観点から、車輪走行時のレールの振動および車輪の運動の相互作用を検討した<sup>1-3)</sup>。

特に、本報では新たに、波状摩耗の発生したレールの表面形状を考慮し、2軸台車がレール上を走行する際の車輪・レール系の過渡的な連成振動問題について解析を行

い、2つの車輪がレールを介して互いの振動に及ぼし合う影響について検討した。

### 2. 解析モデルと運動方程式

本報における解析モデルを Fig. 1 に示す。車輪を移動質量・接触ばね系として、質量を  $m$ 、車輪に働く車両の重力を  $P$ 、軸距を  $l_w$ 、車輪とレールとの間の接触剛性を  $k_w$ 、粘性減衰係数を  $c_w$  とする。なお、車輪は一定速度  $v$  で移動するものとする。

一方、レールは、上下方向の変位およびたわみ角を考慮し、曲げ剛性  $EI$ 、断面積  $A$ 、単位長さ当たりの質量  $\rho A$  を有する。そして、支持部の剛性  $k_s$ 、粘性減衰係数  $c_s$  を考え、枕木間隔を  $l_s$  とする。レールの境界条件は両端が単純支持されるものとし、レール長<sup>1)</sup>は枕木 21 区間分にある 12 m を考慮する。また、波状摩耗の形状は、波高  $\alpha$ 、波長  $\lambda$  の正弦波状であるとする。

$x_{k1}$ 、 $x_{k2}$  は、それぞれ前・後輪とレールとの接触位置を示している。ここで、自重によるレールのたわみを考慮せず、無負荷時の状態からの鉛直下向きレールのたわみを  $u(x, t)$  とし、一方、前・後輪の静的平衡状態からの下向きの変位をそれぞれ  $y_1(t)$ 、 $y_2(t)$  とする。

この解析モデルにおいて、レール、前輪および後輪の運動方程式は、

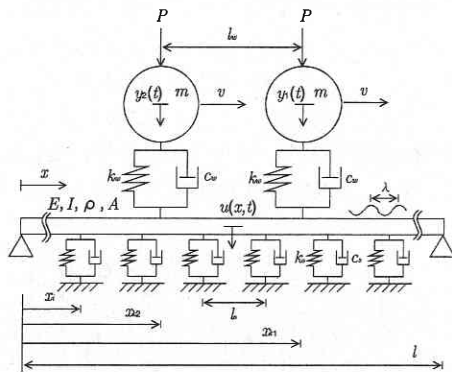


Fig. 1 Analytical model

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = G - B_s + B_w \dots \dots \dots (1)$$

$$m \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + c_w \frac{dy_1(t)}{dt} + k_w y_1(t) = P + Q \dots \dots \dots (2)$$

$$m \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + c_w \frac{dy_2(t)}{dt} + k_w y_2(t) = P + R \dots \dots \dots (3)$$

で表される。式 (1) は、レールの運動方程式であり、式 (2)、(3) は、それぞれ前輪と後輪の運動方程式である。 $G$  は、レールに作用する車輪の重力、 $B_s$  は、枕木の位置で

\* (株)東京ガス  
 \*\* 東京大学生産技術研究所 第2部  
 \*\*\* 上智大学理工学部  
 \*\*\*\* 東京大学名誉教授

研 究 速 報

レールが支持部から受ける力、 $B_w$ は、レールが  $x_{k1}$ ,  $x_{k2}$  の位置で受ける車輪の慣性力を示している。 $Q$  および  $R$  は、前・後輪とレールとの相対変位によって接触ばね系の復元力、減衰力が作用することにより生じるものである。ただし、 $B_w$ ,  $Q$ ,  $R$  にはレール表面の波状摩耗による効果が含まれている。

数値解析にあたっては、移動体を伴う連続体の振動問題における要素分割数<sup>4)</sup>について検討した後に、有限要素法を用いて式 (1) を各要素の節点に関する常微分方程式に置換し、これらと式 (2), (3) を連立させ、Runge-Kutta-Gill法を用いて解いた。

3. 波状摩耗発生区間走行時の車輪・レール系の振動

2軸台車が波状摩耗発生区間を通過する際の車輪・レール系の連成振動について考察するために、長さ12mのレールのうち、後半の6.2mの部分にのみ、波高  $\alpha = 0.01$  [m]、波長  $\lambda = 0.0955$  [m] の正弦波状の波状摩耗が発生している区間を2軸台車が走行するときの、車輪・レール系の連成振動を解析した。すなわち、はじめに前輪だけが波状摩耗上を走行し、後に前・後輪ともに波状摩耗上を走行することになる。

3.1 前・後輪が相互の振動に及ぼし合う影響

2軸台車が波状摩耗発生区間を走行するときの車輪・レール間の接触力変動を計算し、前輪と後輪が相互の振動に及ぼし合う影響について検討する。

Fig. 2は、2軸台車が波状摩耗の発生しているレール上を走行したときの、前・後輪とレール間の接触力変動の時刻歴を示している。図の横軸が時間、縦軸が接触力変動を示している。また、実線が前輪とレール間の接触力変動を、点線が後輪とレール間の接触力変動を示している。ただし、前輪が0.234sに波状摩耗上を走行し始め、後輪が0.372sに波状摩耗上を走行し始める。

前輪が波状摩耗上を走行し始めると、前輪とレール間の接触力変動が大きくなり、その振幅は0.04s程経過すると

一定の値となるが、後輪とレール間の接触力変動も大きくなり、前輪と同様に振幅が一定の値となる。これより、前輪が波状摩耗上を走行することにより、前輪とレールの接触点においてレールが加振され、その横振動が後輪とレールの接触点まで伝わり、後輪がレールから加振されていることがわかる。

また、後輪が波状摩耗上を走行し始めると、後輪とレール間の接触力変動が大きくなり、その振幅は0.04s程経過すると一定の値になるが、前輪とレール間の接触力変動も大きくなり、後輪と同様に振幅が一定の値となる。このとき、接触力変動の振幅は、前・後輪でほぼ同値となっている。これより、後輪が波状摩耗上を走行することにより、後輪とレールの接触点においてレールが加振され、その横振動が前輪とレールの接触点まで伝わり、前輪がレールから加振されていることがわかる。

3.2 軸距が前・後輪の接触力変動に与える影響

本節では、軸距を波状摩耗の波長よりも短い間隔で変化させると、前・後輪とレール間の接触力変動にどのような影響があるか調べるために、前輪だけが波状摩耗上を走行しているときの、前輪とレール間に生じる接触力変動の定常状態における振幅を  $F_{f1}$ 、前・後輪が波状摩耗上を走行しているときの、前輪とレール間に生じる接触力変動の定常状態における振幅を  $F_{f2}$ 、後輪とレール間に生じる接触力変動の定常状態における振幅を  $F_{r2}$  として、 $F_{f2}/F_{f1}$  と  $F_{r2}/F_{f1}$  の値を軸距を変えて計算した結果について検討する。

Fig. 3は、 $F_{f2}/F_{f1}$  と  $F_{r2}/F_{f1}$  を、軸距を1.671mから2.531mまで波状摩耗の波長の1/8の長さに相当する11.9mmずつずらして計算した結果である。図の横軸が軸距を、縦軸が  $F_{f2}/F_{f1}$ ,  $F_{r2}/F_{f1}$  を示しており、■が  $F_{f2}/F_{f1}$ 、○が  $F_{r2}/F_{f1}$  である。 $F_{f2}/F_{f1}$ ,  $F_{r2}/F_{f1}$  はそれぞれ軸距に対して1を境に周期的に変化するが、その周期は  $F_{f2}/F_{f1}$  と  $F_{r2}/F_{f1}$  とで異なっている。そこで、 $F_{f2}/F_{f1}$  と  $F_{r2}/F_{f1}$  の変化の周期を求める。 $F_{f2}/F_{f1}$  の周期的変化のピークが  $l_w = 1.731$  [m] と  $l_w = 2.471$  [m] の位置にあり、その差0.740mが8周期にあたることから1周期の長さは0.093mとなっている。この値は波状摩耗の波長  $\lambda = 0.0955$  [m]

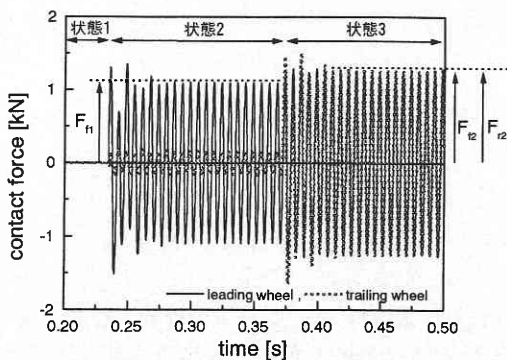


Fig. 2 Contact forces between rail and wheel

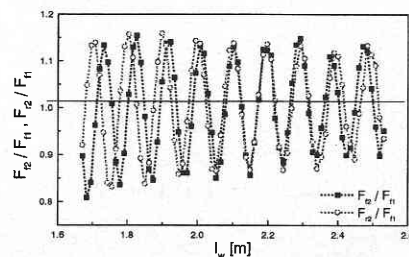


Fig. 3 Periodic fluctuation of amplitude of contact forces between rail and wheels

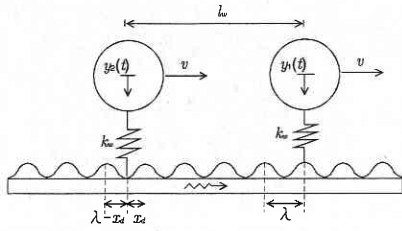


Fig. 4 Simplified model

と比較して 0.0025 m だけ短い。また、 $F_{f2}/F_{f1}$  の周期的変化のピークが  $l_w = 1.707$  [m] と  $l_w = 2.483$  [m] の位置にあり、その差 0.776 m が 8 周期にあたることから 1 周期の長さは 0.097 m となっている。この値は波状摩耗の波長と比較して 0.0015 m だけ長い。

以上の考察から、2 軸台車が波状摩耗上を走行する場合、前・後輪とレール間の接触力変動の定常状態における振幅は、軸距の変化に対して 1 を境に周期的に変化するが、その周期は前輪では波状摩耗の波長より短く、後輪では波状摩耗の波長よりも長いことがわかった。

4. 接触力変動の振幅の軸距に対する周期的変化に関する単純化モデルを用いた考察

本節では、前節で得られたような、前・後輪とレール間の接触力変動の定常状態における振幅が軸距の変化に対して 1 を境に周期的に変動し、その周期が前輪では波状摩耗の波長よりも短くなり、後輪では波状摩耗の波長よりも長くなる現象を、単純化したモデルを用いて考察する。

4.1 単純化モデルによる車輪・レール間の接触力の誘導

以下の議論における概念図を Fig. 4 に示す。前輪と後輪は軸距  $l_w$  を保ちながら、いずれも速度  $v$  で波状摩耗の発生したレール上を走行する。ここで、波状摩耗の波長  $\lambda$  と軸距  $l_w$  との関係は、

$$l_w = m_\lambda \lambda + x_d \quad (m_\lambda = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

で記述する。

前輪だけが波状摩耗上を走行して系の振動が定常になっている状態を状態 1 として、このときの前輪の変位  $y_1(t)$  を  $\tilde{y}_1$ 、前輪とレールの接触点  $x_{k1}$  でのレールの変位  $u(x_{k1}, t)$  を  $\tilde{u}_1$  とおく。次に、前・後輪が波状摩耗上を走行して系の振動が定常になっている状態を状態 2 として、このときの前輪の変位  $y_1(t)$  を

$$\hat{y}_1 = \tilde{y}_1 + \delta y_1 \quad (5)$$

とおき、前輪とレールの接触点でのレールの変位  $u(x_{k1}, t)$  を

$$\hat{u}_1 = \tilde{u}_1 + \delta u_1 \quad (6)$$

とおく。ここで、 $\delta y_1$ 、 $\delta u_1$  は後輪が波状摩耗上を走行することによる、 $\tilde{y}_1$ 、 $\tilde{u}_1$  の変動分である。また、位置  $x_{k1}$  における波状摩耗の高さ  $a \sin 2\pi x_{k1} / \lambda$  を  $a_1$  とする。このとき、状態 1 において前輪とレール間に生じる接触力  $F_{f1}$  は、減衰力による影響を微小として無視すると、

$$F_{f1} = k_w \{ (\tilde{u}_1 + a_1) - \tilde{y}_1 \} \quad (7)$$

で表され、 $F_{f1}$  においては前輪が波状摩耗上を走行する影響が支配的であるとして、

$$F_{f1} = k_w a_1 = k_w a \sin \frac{2\pi x_{k1}}{\lambda} \quad (8)$$

とおける。

次に、状態 2 において前輪とレール間に生じる接触力  $F_{f2}$  は、前輪の場合と同様に

$$F_{f2} = F_{f1} + k_w (\delta u_1 - \delta y_1) \\ = k_w a \sin \frac{2\pi x_{k1}}{\lambda} + k_w (\delta u_1 - \delta y_1) \quad (9)$$

ここで、式 (9) の第 2 項が、後輪が波状摩耗上を走行することにより、後輪がレールとの接触点  $x_{k2}$  においてレールを加振して発生した横波がレールを伝わり、前輪とレールの接触点  $x_{k1}$  に達したことによる前輪とレール間の接触力の変動分であることを加味すると、式 (9) から

$$F_{f2} / k_w = a \sin \frac{2\pi x_{k1}}{\lambda} - b \sin \left( \frac{2\pi x_{k2}}{\lambda} - \phi \right) \quad (10)$$

と導ける。ただし  $b$ 、 $\phi_f$  は定数とする。また、後輪とレールの接触点において、波状摩耗の形状と後輪がレールに与える加振の向きが逆であることから、右辺第 2 項の符号が  $-$  になっている。後輪についても同様の議論より、状態 2 において後輪とレール間に生じる接触力  $F_{r2}$  が

$$F_{r2} / k_w = a \sin \frac{2\pi x_{k2}}{\lambda} - b \sin \left( \frac{2\pi x_{k1}}{\lambda} - \phi \right) \quad (11)$$

と導ける。ただし  $\phi$  は定数とする。

ここで、前輪とレールの接触点の位置を  $x_{k1} = vt$  とおくと、 $f = v/\lambda$  を考慮して

$$\frac{F_{f2}}{k_w} = a \sin 2\pi ft - b \sin 2\pi f \left\{ \left( t - \frac{x_d}{v} \right) - \tau_f \right\} \quad (12)$$

となる。ただし  $\tau_f$  は定数である。

後輪についても同様に、

$$\frac{F_{r2}}{k_w} = a \sin 2\pi f \left( t - \frac{x_d}{v} \right) - b \sin 2\pi f (t - \tau_r) \quad (13)$$

と導ける。ただし  $\tau_r$  は定数である。

研 究 速 報

4.2 車輪・レール間の接触力に対する横波の伝播の影響

上記のように、式 (12) の第 2 項は、後輪が波状摩耗上を走行することにより、後輪がレールとの接触点  $x_{k2}$  においてレールを加振して発生した横波がレールを伝わり、前輪とレールの接触点に達したことによる変位の変動分である。すなわち、式 (12) における  $\tau_f$  は、この横波が後輪とレールの接触点  $x_{k2}$  から前輪とレールの接触点  $x_{k1}$  に進むのに要する時間であることがわかる。時間  $\tau_f$  の間に前輪が距離  $v\tau_f$  だけ進むことを考慮すると、横波がレールを伝わる速さを  $v_f$  として、 $\tau_f = \frac{l_w}{v_f - v}$  で表される。

ここで、後輪とレールの接触点において、後輪がレールを加振する向きが波状摩耗の形状と逆向きであることを考慮すると、式 (12) は

$$\frac{F_{f2}}{k_w} = a \sin 2\pi f t - b \sin 2\pi f \left\{ t - \left( \frac{x_d}{v} + \frac{l_w}{v_f - v} \right) \right\} \dots (14)$$

で表される。

後輪についても同様に  $\tau_r = \frac{l_w}{v_f + v}$  であることから、

$$\frac{F_{r2}}{k_w} = a \sin 2\pi f \left( t - \frac{x_d}{v} \right) - b \sin 2\pi f \left( t - \frac{l_w}{v_f + v} \right) \dots (15)$$

と導ける。

$F_{f2}/k_w$ ,  $F_{r2}/k_w$  の最大値の周期を考察する。まず  $F_{f2}/k_w$  について考える。軸距  $l_w$  を  $l_w = m\lambda + x_{d1}$  から  $l_w = m\lambda + x_{d2}$  に変化させたとき、式 (14) の右辺第 1 項と第 2 項の位相差がちょうど  $2\pi$  だけずれたとする。このとき、波状摩耗の波長  $\lambda$  に対する  $x_{d1} - x_{d2}$  の値を、 $F_{f2}/k_w$  の最大値の変化の周期  $l_f$  と定義すると、式 (14) より、

$$l_f = 1 - \frac{v}{v_f} \dots (16)$$

となる。同様に  $F_{r2}/k_w$  の最大値の変化の周期  $l_r$  を定義すると

$$l_r = 1 + \frac{v}{v_f} \dots (17)$$

となる。

4.3 単純化したモデルによる検討の妥当性

ここで、単純化したモデルを考慮することによって導出された式 (14), (15) の妥当性を検討する。Fig. 5 は、式 (14), (15) の時刻歴を、軸距  $l_w$  を  $l_w = 1.671$  [m] から  $l_w = 2.531$  [m] まで波状摩耗の波長  $\lambda$  の 1/8 に相当する 11.9 mm ずつずらして求め、その最大値をプロットしたものである。図の横軸が軸距  $l_w$  を、縦軸が  $F_{f2}/k_w$ ,  $F_{r2}/k_w$  の時刻歴の最大値を示しており、図の■が  $F_{f2}/k_w$ , ○が  $F_{r2}/k_w$  である。この図を Fig. 4 と比較すると、ほぼ同傾向となっており、単純化したモデルが妥当であることが確認できる。

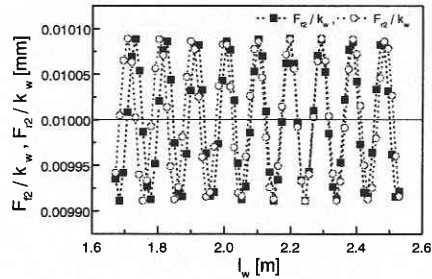


Fig. 5 Periodic fluctuation of amplitude of contact forces between rail and wheels

5. お わ り に

レールの表面形状を考慮に入れて、走行する 2 軸台車とレールからなる系の連成振動解析を行い、次の結論を得た。まず、前輪とレール間に生じる接触力を生じさせる要因としては、

- (1) 前輪が波状摩耗上を走行することにより、前輪が波状摩耗から直接受ける変位加振
- (2) 後輪が波状摩耗上を走行することにより後輪がレールを加振し、そこで発生した横振動がレールを伝わり前輪に与える変位加振

が支配的である。ただし、これらの変位加振は

- (1) 軸距と波状摩耗の波長との関係 (具体的には、軸距と波状摩耗の波長の整数倍の長さとの差)
- (2) 横波が後輪の位置から前輪の位置まで進むのに要する時間の 2 つの要因から互いに位相がずれる。

これらの位相差を生じさせる要因のうち軸距と波状摩耗の波長との関係、すなわち前・後輪の波状摩耗上での相対位置が原因となって、前輪とレール間に生じる接触力変動の定常状態における振幅が軸距に対して周期的に変化する。

また、前・後輪では接触力変動の定常状態における振幅の軸距に対する周期的変化の周期が異なる。これは、後輪とレール間に生じる接触力も前輪と同様に 2 つの変位加振に支配されるが、これらの変位加振の位相差を生じさせる要因のうち横波の伝わる時間が前輪と異なるためである。

(1998 年 6 月 9 日受理)

6. 参 考 文 献

- 1) 柳, 他 3 名, 接触剛性を考慮した車輪・レール系の連成振動解析モデルについて, 機論 62-603, C (1996), 4147.
- 2) 柳, 他 3 名, 二つの車輪とレールの連成振動系に発生する接触力変動について, 機論 62-604, C (1996), 4428.
- 3) 曄道, 他 3 名, 走行車輪とレール間に生じる接触力変動に関する基礎的検討, 鉄道技術連合シンポジウム (J-RAIL '97) (1997-7), 127.
- 4) 堀江, 他 3 名, 有限要素法を用いた走行車輪とレールの連成振動解析手法について, 機構論 No. 97-10 (1997-7), B360.