

一般曲線座標系における非圧縮性乱流数値解析に適した差分スキーム

—第5報, 修正コロケート格子系差分スキームの一般座標系への拡張と一般座標系差分スキームの保存特性の検証—
Proper Finite Difference Schemes for Simulations of Incompressible Turbulent Flow in Generalized Curvilinear Coordinates
(5 th Report, Extension of the Finite Difference Scheme in Modified Collocated Grid Layout to Generalized Coordinate System and
Validation of Conservative Properties of Various Finite Difference Schemes in Generalized Coordinate System)

小 垣 哲 也*・小 林 敏 雄**・谷 口 伸 行***

Tetsuya KOGAKI, Toshio KOBAYASHI, Nobuyuki TANIGUCHI

1. 緒 言

第1～4報¹⁻²⁾において, 著者らは, 非圧縮性乱流数値解析の基礎方程式(連続の式, Navier-Stokes 方程式, 速度の2乗量と運動エネルギー K の輸送方程式)の解析的保存特性を適切に近似する一般座標系差分スキームを構成し, 打ち切り誤差の評価および検証計算を行った. 第3報¹⁾において構成された一般座標系におけるコロケート格子系差分スキームは, 正規直交座標系においてと同様, 運動エネルギーの輸送方程式中の圧力項の保存特性に誤差が含まれ, これが計算精度に悪影響を与える可能性が示された. 最近, 森西は, 新たに運動エネルギーの保存特性を改善する修正コロケート格子系差分スキームを提案し, 検証計算によってその有効性を示した³⁾.

本報では, 森西により提案された等間隔正規直交座標系において提案された修正コロケート格子系差分スキームが一般座標系に拡張できることを示す. また, 森西に従い, 運動量と運動エネルギーの総量が時間的に保存されるべき2次元周期的非粘性流の数値実験⁴⁾を行い, これまでに構成した一般座標系差分スキームの数値的保存特性を調査する.

2. 修正コロケート格子系の一般座標系への拡張

コロケート格子系における運動エネルギー K の輸送方程式中の圧力項の保存特性には, 時間1次精度かつ空間2次精度(あるいは空間4次精度)の誤差が含まれる^{3, 1)}. 比較的低いレイノルズ数におけるチャンネル内乱流の DNS 計算⁵⁾では, この誤差の影響が致命的ではないと報告されているが, 時間間隔および計算格子のひずみ大きい場合, この誤差が解に影響を及ぼす事が懸念される. そこで, 森西は Van Kan 修正を導入してコロケート格子系差分スキ

ームの圧力項の運動エネルギーの保存特性を改善した修正コロケート格子系差分スキーム³⁾を提案した. その修正コロケート格子系差分スキームを一般座標系に拡張すると, フラクショナルステップ法をベースとした以下のような計算アルゴリズムが構成される.

$$u_i^* = u_i^{k-1} + J \Delta t \left[-(\text{Conv.} - \text{MC2})_i - (\text{Pres.} - \text{R2})_i - (\text{Visc.} - \text{MC2})_i \right] \dots (1)$$

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(G^{mn} \frac{\delta_1 \Delta p^*}{\delta_1 \xi_n} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\delta_1 \overline{U}_m^{1\xi_m}}{\delta_1 \xi_m} \dots (2)$$

$$u_i^k = u_i^* - J \Delta t \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \Delta p \right) \dots (3)$$

$$F_m^k = \overline{U}_m^{1\xi_m} - \Delta t G^{mn} \frac{\delta_1 \Delta p^*}{\delta_1 \xi_n} \dots (4)$$

$$p^k = p^{k-1} + \Delta p \dots (5)$$

ここで, 式(1)中の-MC2は修正コロケート格子系における2次精度差分スキームであることを示している. また, 上付添え字#は, その量が, 明示的でない補間を必要とする事を示している. 第3報¹⁾において構成された通常のコロケート格子系における対流項差分スキームは, 運動量, 速度二乗量および運動エネルギーの保存特性が適切であった. 従って, 修正コロケート格子系においても, 対流項差分スキーム (Conv.-MC2)_iは, コロケート格子系と同じものを使用する.

また, 粘性項の差分スキーム (Visc.-MC2)_iは, Navier-Stokes 式において保存形であればよいから, 以下のように構成する.

$$(\text{Visc.} - \text{MC2})_i \equiv \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(\nu G^{mn} \frac{\delta_1 u_i^*}{\delta_1 \xi_n} \right) \dots (6)$$

コロケート格子系における圧力項の保存特性の誤差は, 次

*日本学術振興会特別研究員

**東京大学国際・産学共同研究センター

***東京大学生産技術研究所 第2部

式で定義されるレギュラ格子系における連続の式 (Cont.-R2) が, 精度良く満足されないことに起因していた.

$$(\text{Cont.-R2}) = \frac{\delta_2 U_m}{\delta_2 \xi_m} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

しかし, ここで構成された一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームでは, レギュラ格子系における連続の式が, 以下の精度で満足される.

$$\begin{aligned} \frac{\delta_2 U_m^k}{\delta_2 \xi_m} &= \Delta t \left[\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(G^{mn} \delta_1 \Delta p^{nk} - \overline{G^{mn} \delta_2 \Delta p^{nk}} \right) \right] \\ &= \Delta t \left[-\frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(G^{mn} \frac{\partial^3 \Delta p^{nk}}{\partial \xi_n^3} \right) h_n^2 - \frac{1}{8} \frac{\partial^3}{\partial \xi_m^3} \left(G^{mn} \frac{\partial \Delta p^{nk}}{\partial \xi_n} \right) h_n^2 + O(h^4) \right] \\ &= O(\Delta t^2 \cdot h^2) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

従って, 等間隔直交座標系において定式化された森西の修正コロケート格子系差分スキーム³⁾と同様に, 運動エネルギー K の輸送方程式中の圧力項の保存特性が時間 2 次精度かつ空間 2 次精度となり改善される.

3. 一般座標系差分スキームの保存性の検証

第 2~3 報¹⁾においてスタガード, レギュラおよびコロケート格子系における一般座標系差分スキームが, また, 本報において修正コロケート格子系における一般座標系差分スキームが構成された. それらは, いずれも, 形式的に保存形となっているが, 一般座標系に拡張する際, 圧力項差分スキームの保存形式と非保存形式が離散的にも等しいと仮定し, さらに明示されない補間が必要になったため, 差分スキームの保存特性に関して厳密性が失われている. 従って, ここでは, 森西³⁾に従い, 運動量と運動エネルギーの総量が時間的に保存されるべき 2 次元周期的非粘性流の数値実験を行い, 各格子系における一般座標系差分スキームの数値的保存特性を検証する.

3.1 検証方法概要

2 次元周期的非粘性流の基礎方程式は, 次式で表される.

$$(\text{Cont.})^{\text{CT}} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u_i}{J} \right) + (\text{Conv.})_i^{\text{CT}} + (\text{Pres.})_i^{\text{CT}} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

Navier-Stokes 方程式中の各項は, これまでに構成された, Maliska によるスタガード格子系, コロケート格子系および修正コロケート格子系における一般座標系差分スキームにより離散化される. 時間進行による誤差の影響をなるべく小さくするため, 時間進行法として 3 次精度 Runge-

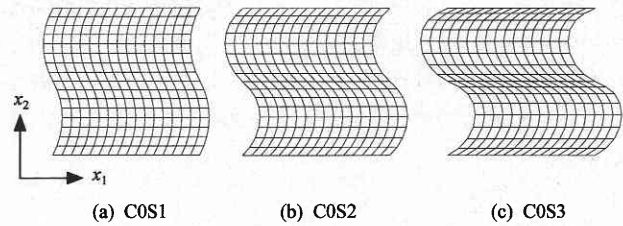


Fig. 1 Nonorthogonal uniform grids used for validation tests of conservative properties of difference schemes in generalized coordinate system.

Kutta 法⁶⁾を用い, 速度と圧力のカップリングアルゴリズムは, フラクショナルステップ法を用いている. 圧力方程式は, van der Vorst の Bi-CGStab 法⁷⁾を用いて解き, 残差ベクトルの大きさが 10^{-10} になるまで収束させる. このときの連続の式の残差は 10^{-12} 程度である.

計算領域および格子点数は, それぞれ $2\pi \times 2\pi$, 16×16 である. 計算格子は, 直交等間隔格子 (COS0, C: Clustering, S: Skewness) に加え, x, y 方向に次式で与えられる双曲線正接分布関数⁸⁾を使用した 3 つの直交不等間隔格子 (CnS0, $n = 1 \sim 3$) および図 1 に示す等間隔非直交格子 (COSn, $n = 1 \sim 3$) を用意した.

$$x_i = \pi \cdot \left(1 - \frac{\tanh \beta (1 - 2\xi)}{\tanh \beta} \right) \dots\dots\dots (11)$$

式 (11) 中の β は, 格子点分布を制御するパラメータであり, $n = 1 \sim 3$ においてそれぞれ, $\beta = 1.1, 1.7, 2.5$ を与えた. 不等間隔, 非直交性の度合いは, n が増加するほど強くなる. 境界条件として周期境界条件が全方向に課される.

初期値の作成は, 格子点上で定義される流れ関数を一様乱数で与え, 格子点上で連続の式を満たす速度場を得た後, その速度場から各計算格子, 各格子系に応じた位置における速度を双一次補間により計算して与える. さらに, 速度場は, 運動量の総和をゼロとするため, $\sum_{\xi \eta} [u_1/J] = \sum_{\xi \eta} [u_2/J]$ となるように正規化された後, 流れ場の運動エネルギーの総和が $\sum_{\xi \eta} [K/J]$ となるように正規化される. このように求められた速度場は, 補間の誤差によって厳密には連続の式を満たさないので, 適当なタイムステップ数だけ計算を進行させて (通常, 数ステップ), 連続の式および運動量方程式を十分満たす速度, 圧力場を得た後, 再度, 運動量の総和がゼロに, 運動エネルギーの総和が 1 になるように正規化して, 計算の初期値とした. 従って, 計算格子および格子系の違いにより初期値が異なるが, 保存特性を検証するには特に問題ないと考える.

3.2 検証結果

Maliska らのスタガード格子系においては, 各直交速度

研 究 速 報

成分のコントロールボリュームが、計算領域全体を2回覆い、2セットの速度場解が存在することになる。従って、計算領域全体の運動量および運動エネルギーの総和の概念に曖昧さがあるので、それぞれ以下のように定義して、議論する。

$$M_1 = \sum_{\xi} \sum_{\eta} \left[\left(\frac{u_1}{J} \right)_{C.V.1} + \left(\frac{u_2}{J} \right)_{C.V.2} \right] \dots \dots \dots (12)$$

$$M_2 = \sum_{\xi} \sum_{\eta} \left[\left(\frac{u_1}{J} \right)_{C.V.2} + \left(\frac{u_2}{J} \right)_{C.V.1} \right] \dots \dots \dots (13)$$

$$K_1 = \sum_{\xi} \sum_{\eta} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{u_1^2}{J} \right)_{C.V.1} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_2^2}{J} \right)_{C.V.2} \right] \dots \dots \dots (14)$$

$$K_2 = \sum_{\xi} \sum_{\eta} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{u_1^2}{J} \right)_{C.V.2} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_2^2}{J} \right)_{C.V.1} \right] \dots \dots \dots (15)$$

式 (12) ~ (15) において、下付添え字 C.V.1 および C.V.2 は、コントロールボリュームを表している (第2報, 図3参照)。本来のスタガード格子系の場合とは異なり、Maliska らのスタガード格子系では全ての直交速度成分が同一点に定義されているので、運動エネルギーの総和を

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\xi} \sum_{\eta} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{u_1^2}{J} \right)_{C.V.1} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_2^2}{J} \right)_{C.V.1} \right] + \frac{1}{2} \sum_{\xi} \sum_{\eta} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{u_1^2}{J} \right)_{C.V.2} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_2^2}{J} \right)_{C.V.2} \right] \dots \dots \dots (16)$$

のように定義することも考えられるが、これは結局、 $K = (K_1 + K_2) / 2$ で表される。

Maliska のスタガード格子系における2次精度一般座標系差分スキーム [(Div-M 2)_i, (Pres-M 2)_i および (Cont-M 2)] による運動エネルギーの総量の誤差に対する格子の不等間隔および非直交性の影響を図2, 3に示す。クーラン数 $CFL (= C_x \Delta t / \Delta x_{\min})$ は0.01である。計算格子が直交である場合 (CnS0, $n = 0 \sim 3$, 図2), セル界面に直交する速度成分から構成された運動エネルギーの総和 K_1 は、格子不等間隔の度合いが極端に大きいC3S0の場合を除いて、その誤差が $O(10^{-6})$ と非常に小さいので、適切に保存されている。一方、セル界面に接する速度成分から構成された運動エネルギーの総和 K_2 は、その誤差が時間の経過とともに増加している。これは、セル界面に接する速度成分の離散化式において、明示されない補間により計算される項の寄与が大きくなり、離散的な運動エネルギーの保存特性が破られるためである。計算格子が、非直交であ

る場合 (COSn, $n = 0 \sim 3$, 図6) は、 K_2 の保存特性の誤差が K_1 の保存特性にも悪影響を及ぼし、全体的に運動エネルギーが増加している。従って、非直交格子の場合、スタガード格子系では運動エネルギーを適切には保存できない。図4には、Maliska のスタガード格子系における2次精度一般座標系差分スキームにおける、運動エネルギー総量の誤差の時間平均絶対値のクーラン数に対する変化が示されている。直交格子の場合、 K_1 の保存特性の誤差は、時間進行法の精度に依存して減少している。従って、不等間隔格子でも格子が直交していれば、本来のスタガード格子系差分スキームは運動エネルギーの保存特性が適切であることがわかる。

一般座標系における2次精度従来のコロケート格子系および修正コロケート格子系差分スキームの場合、運動エネルギー総量の誤差の時間平均絶対値のクーラン数に対する変化を図5に示す。また、図6には、同計算における式(7)で示される連続の式 (Conv.-R2) の絶対値の最大値の時間平均値 $|(\text{Cont.-R2})|_{\max}$ のクーラン数に対する変化が示されている。修正コロケート格子系差分スキームの場合、 $|(\text{Cont.-R2})|_{\max}$ が $O(\Delta t^2)$ に比例して減少するため、運動エネルギーの保存特性が改善されていることがわかる。また、不等間隔直交、等間隔非直交格子、いずれの場合でも等間隔格子を用いた場合と同様に運動エネルギーの保存特性が改善されているため、等間隔正規直交座標系における修正コロケート格子系差分スキームが一般座標系に適切に拡張されていることがわかる。

なお、ここでは示さないが、運動量の総量の誤差は、格子系、計算格子を問わず、倍精度計算の丸め誤差 $O(10^{-15})$ 程度となり、運動量の保存特性には全く問題なかった。

4. 結 論

森西により提案された等間隔正規直交座標系における修正コロケート格子系差分スキームを一般座標系に拡張できることを示した。また、これまでに構成した一般座標系差分スキームの数値的保存特性を調査するため、運動量と運動エネルギーの総量が時間的に保存されるべき2次元周期的非粘性流の数値実験を行った。その結果、不等間隔非直交である任意の一般座標系の計算格子の場合においても、運動量のみならず運動エネルギーの保存特性が十分であるのは、修正コロケート格子系における一般座標系差分スキームのみであることがわかった。ただし、直交不等間隔の場合は、従来のスタガード格子系における差分スキームも運動量および運動エネルギーの保存特性が適切である。

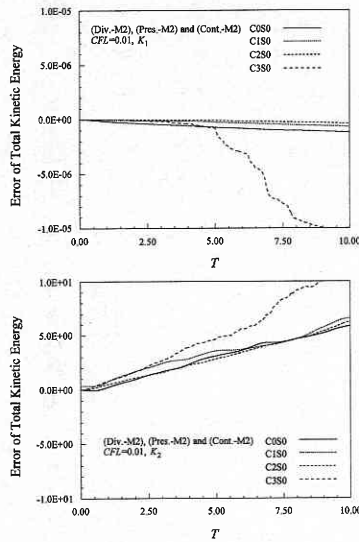


Fig. 2 The error of total kinetic energy by the second order finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout in case of nonuniform orthogonal grids.

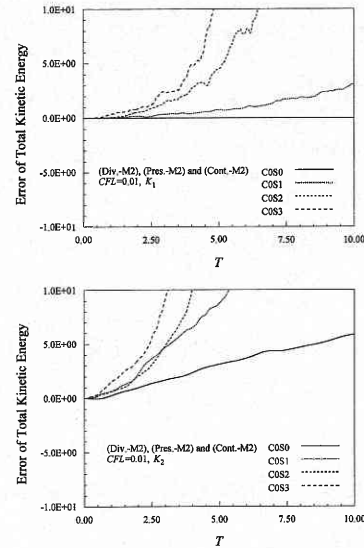


Fig. 3 The error of total kinetic energy by the second order finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout in case of uniform nonorthogonal grids.

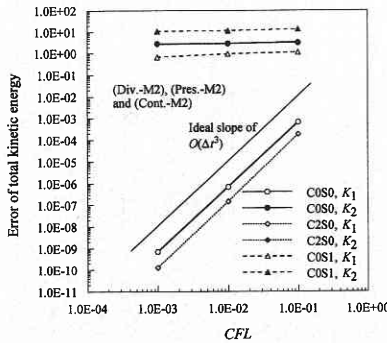


Fig. 4 The error of total kinetic energy by the second order finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout as a function of Courant number.

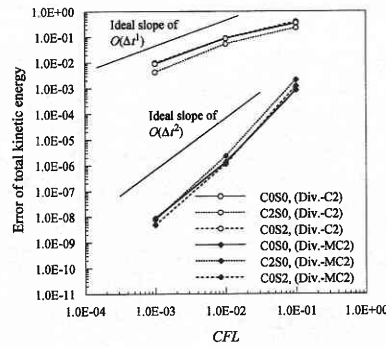


Fig. 5 The error of total kinetic energy by the second order finite difference schemes in the collocated and the modified collocated grid layouts as a function of Courant number.

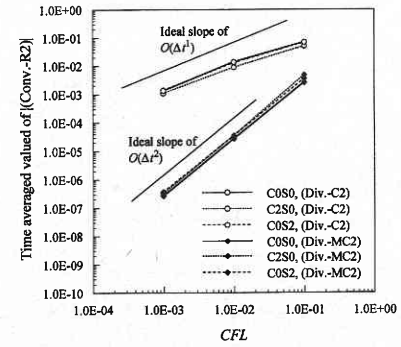


Fig. 6 The time averaged value of $|\text{Cont-R2}|_{\max}$ by the second order finite difference schemes in the collocated and the modified collocated grid layouts as a function of Courant number.

謝 辞

差分スキームの保存特性の検証方法について、名古屋工業大学、森西洋平助教からご指導いただいた。記して謝意を表す。本研究は、日本学術振興会特別研究員奨励費 (No. 7186)、同研究員に対する文部省科学研究費補助金および NEDO 独創的産業技術研究開発促進事業 (ID No. 8 H 代-170) の援助を受けた。

(1998年5月19日受理)

参 考 文 献

1) 小垣・小林・谷口, 生産研究, 49-7 (1997), 303-313.

2) 小垣・小林・谷口, 生産研究, 50-1 (1998), 53-56.
 3) 森西, 第13回生研NSTシンポジウム講演論文集, (1998), 15-19.
 4) 森西, 機論, 62-604, B (1996), 4090-4112.
 5) 梶島・太田, 三宅, 第8回計算流体シンポジウム講演論文集, (1997), 287-288.
 6) Spalart, P. R., Moser, R. D. and Rogers, M. M., *J. Comput. Phys.*, **96**, 297-324 (1991).
 7) 藤野・松本・水藤, 第5回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (1991), 501-504.
 8) Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A. and Mastine, C. W., Order of difference expressions in curvilinear coordinate systems, *J. Fluid Eng.*, **107** (1994), 18-33.