研 究 速 報

一般座標系LESにおける壁法則の応用

Application of Wall-low to Large Eddy Simulation by System In Generalized Curvilinear Coordinates

張　会 来*・小 林 敏 雄**・谷 口 伸 行*

Huilai ZHANG, Toshio KOBAYASHI and Nobuyuki TANIGUCHI

1. 緒　　言

近年，低燃費低公害と高出力を両立するエンジンの研究が盛んに行われてきた[3]．エンジンシリンダーのような複雑形状を有する流れ場に対して適用できる一般座標系を用いたLarge Eddy Simulation（LES）数値解析コードを作成する上により効率良く，実用化に近い解析手法が要求されつつある．

著者らはこのような背景から，より計算効率の高いLES手法に着目した．LES数値解析計算としては基本的に空間平均した基礎方程式を用い流れ場の解析を行うことである．しかし，このような解析方法には，時間平均モデルを用いる方法と比べて巨大な格子数は必要がある．さらに壁面no-slip条件を用いると，壁近傍にもっと密度高い格子数を配置しなければ成らないことになる[2]．工学的に興味ある流れ場へ適用する場合，壁面no-slip条件のかわりに人工的壁面境界条件を導入することは計算機容量及び計算時間の面で得策であると考えられる．本研究では正規直交座標系に用いられる壁面法則を一般座標系に簡単に応用できるように変形することを示し，曲線斜交格子座標を用いるチャネル乱流に実用した．その結果，十分実用可能な精度が得ることができた．

2. 座標変換基礎方程式

本研究においては，Smagorinsky Modelを用いる．非圧縮性Navier-Stokes方程式と連続式にfiltering操作を行う．複雑な形状をした流れ場を有限体積法で解析する際には，流れ場の形状に適合する計算格子を作る．つまり，物理空間（x, y, z）上で作られた計算格子を等間隔正規直交である計算空間（ξ, η, ζ）上の格子へ変換する必要がある．物理空間から計算空間への変換Jacobian行列と変換係数を以下のように求められる

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{vmatrix} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta & y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta & y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi \\ x_\zeta z_\eta - x_\eta z_\zeta & x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi & x_\eta z_\xi - x_\xi z_\eta \\ x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta & x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta & x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \end{vmatrix}$$

$$\equiv \frac{1}{J} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} \quad \cdots (2\text{-}1)$$

$$J = x_\xi y_\eta z_\zeta + x_\eta y_\zeta z_\xi + x_\zeta y_\xi z_\eta - x_\xi y_\zeta z_\eta - x_\eta y_\xi z_\zeta - x_\zeta y_\eta z_\xi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}2)$$

反変速度を$F_j = A_{ji} u_i$（$j = 1, 2, 3$）と定義する．計算空間の一次微分は$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{1}{J} A_{ji} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j}$となる．この時，$\frac{\partial A_{ji}}{\partial \xi_j} = 0$を用いることで，有限体積法を用いて離散化するために必要な一次微分保存形は，$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{J} \frac{\partial A_{ji} f}{\partial \xi_j}$となる．これらの式を用いると，一般座標系における基礎方程式は以下のように与えられる．

$$\text{連続式：}\frac{1}{J} \frac{\partial F_j}{\partial \xi_j} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}3)$$

$$\text{運動式：}\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial F_j u_i}{\partial \xi_j} = \frac{1}{J} \frac{\partial A_{ji} P}{\partial \xi_j} + \frac{1}{J} \frac{\partial A_{mk} \phi_k}{\partial \xi_m} + f \quad \cdots (2\text{-}4)$$

$$\text{ただし：}\phi_k = (\nu + \nu_{SGS}) \left(\frac{1}{J} \frac{\partial A_{jk} u_i}{\partial \xi_j} + \frac{1}{J} \frac{\partial A_{ji} u_k}{\partial \xi_j} \right) \cdots (2\text{-}5)$$

ここでfとA_{ij}はそれぞれ体積外力と一般座標系基礎方程式を演算する時に設置した中間係数である．本計算においては，チャネル乱流を考慮して$C_k = 0.094$，$C_s = 0.1$を採用することにする．Van Driestの減衰関数をC_sに乗じる．即ち$C_s = 0.1 \times [1 - \exp(-y^+/25)]$である．

*東京大学生産技術研究所　第2部
**東京大学国際・産学共同研究センター

3. 壁面法則取り扱い

アンサンブル平均乱流モデルの場合，局所平衡の仮定を用いれば，乱流エネルギーの値より壁座標 y^+ を陽的に算出でき，壁面法則より壁境界を設定できる．しかしLESで用いられる情報はGS成分速度場のみである，同様な手法を利用できない．そこで，GS成分の速度場だけを利用して壁法則により壁面境界条件を課す手法がLESのために構成されている[1]．

壁面近傍の平均速度を表現する壁法則は，壁座標 y^+ 及び無次元化速度 u^+ による，関数として次のように定義される．

$$F\ (y^+,u^+) = 0 \quad \cdots\cdots (3\text{-}1)$$

$$y^+ = \frac{Uty}{\gamma} \quad \cdots\cdots (3\text{-}2)$$

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad \cdots\cdots (3\text{-}3)$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad \cdots\cdots (3\text{-}4)$$

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{wall} \quad \cdots\cdots (3\text{-}5)$$

$$F\ (y^+,u^+) = u^+ - y^+ - e^{-kB} \left| e^{ku^+} - 1 - (ku^+) - \frac{(ku^+)^2}{2} - \frac{(ku^+)^3}{6} \right| \quad \cdots\cdots (3\text{-}6)$$

$$\frac{\overline{\tau_w}}{\mu} = \frac{y^+}{u^+}\frac{\bar{u}}{y} \quad \cdots\cdots (3\text{-}7)$$

F（y^+，u^+）＝0壁法則が実験より分かれば，壁面最近傍セルでの速度 u，壁からの距離 y，及び動粘性係数 γ 等の情報を利用して，壁面摩擦速度 u_τ の非線形式が与えられる．Newton法のような繰り返し計算法より簡単に解くことができる．本計算はspalding則（式（3-6））を用いる．瞬時局所的なGS成分の速度 $\bar{u}$ 及び摩擦応力 $\overline{\tau_w}$ をアンサンブル平均量と変動量とに分離する考え方より，又，これらを加えることで局所的な瞬時の壁面摩擦応力 $\overline{\tau_w}$ は式（3-4）より，（式（3-7））のように表現できる．

一般座標系に対する運動量保存則を解く際に，fluxの壁面境界条件とする $\overline{\tau_w}$（式（3-7）より算出する）を直接使いにくい（式（2-5）参照），特にFig. 1のような複雑形状持つ流れ場に応用し難しい．ここで $\overline{\tau_w}$ の計算の代わりにno-slip条件と同じように仮想格子に壁法則に従う速度を与えることにする．式（3-5）より瞬時速度分布角度 θ（Fig. 2）を式（3-8）で計算できる．

$$tg\theta = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{wall} = \frac{\overline{\tau_w}}{\mu}\Big|_{wall} = \frac{y^+}{u^+}\frac{\bar{u}}{y} \quad \cdots\cdots (3\text{-}8)$$

$$tg\theta = \frac{u_0}{2y - y_D} = \frac{\bar{u}}{y_D} \quad \cdots\cdots (3\text{-}9)$$

又壁面両側の格子は壁から同様な距離を持つと仮定すれば，幾何関係から式（3-9）が得られる．実際には壁反対側の仮想格子を作らず計算空間で想定することである．式（3-8）と式（3-9）から次式を演算できる．

$$\overline{u_0} = \left(2\frac{y^+}{u^+} - 1\right)\bar{u} \quad \cdots\cdots (3\text{-}10)$$

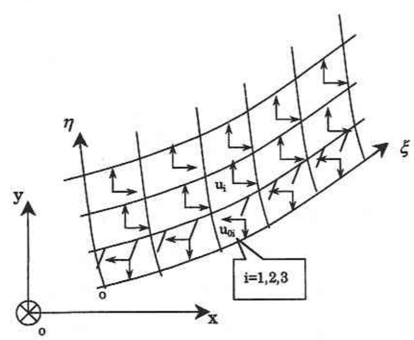

Fig. 1　complicated wall condition

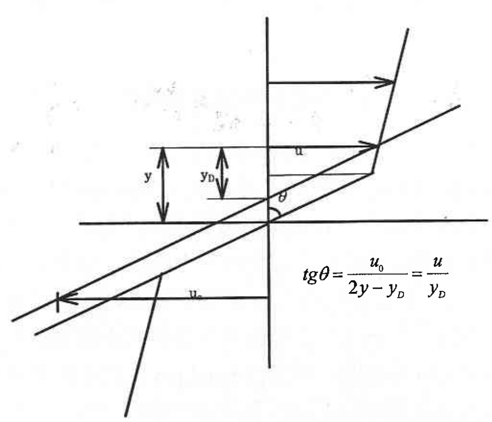

Fig. 2　壁近傍幾何関係

$$\bar{u}=\sqrt{\bar{u}_1^2+\bar{u}_2^2+\bar{u}_3^2} \quad \cdots\cdots (3\text{-}11)$$

$$\bar{u}_{0i}=\left(2\frac{y^+}{u^+}-1\right)\bar{u}_i \quad \cdots\cdots (3\text{-}12)$$

式（3-6）からu_τを求めればu^+，y^+を定義式から計算できる．No-slip条件（$u_{0i}=u_i$ただし方向反対）の代わりに式(3-12)を使うことで一般座標系にとっては非常に簡単な人工壁面条件が与えることができる．ただし対流項に対しては“物質流入流出が零である”と相違となる．対流項のみno-slip条件を使えば良いと考えられる．今回の差分スキームはco-located格子系に基づき，格子の中央点に速度成分u_iと圧力P_iを定義して，格子境界に反変速度成分F_iを配置する[2]．本計算においてはFig. 3示すのように，no-slip条件と同様[2] $\delta F_i=0$，$F_i=0$，$\delta u_i=0$壁面境界条件を加えることより壁面の速度は零に課すことができる．式(3-6)を使うことにより，式（3-10）から次の事が分かる．“壁から第一格子の瞬間速度分布は粘性低層分布に従うと自動的にno-slip条件になる．対数分布に従うと自動的に人工壁面条件になる．”

4. チャネル流れ場の計算と検証

以上壁面法則の取り扱い方を検証するために，曲線斜交格子（Fig. 4）のチャネル流れ場を作成し，数値解析を行った．対象とするチャネル流れ場においては，チャネル幅H，流れ方向πH，スパン方向0.5πHとしている．流れ方向圧力勾配－2が陽的に与えられている．流れ方向，スパン方向には，それぞれ周期境界条件を与え，壁面上では以上述べた壁面法則を用い．レイノルズ数はKim[4]らの条件に合わせて，壁面摩擦速度とチャネル幅Hを用いて，無次元化し360を用いている．流れ方向とスパン方向に対して格子は等間隔に，壁面方向は表1に示すように配置する．格子分割数，統計量をとる無次元時間及び無次元時間stepをそれぞれ表1に示す．

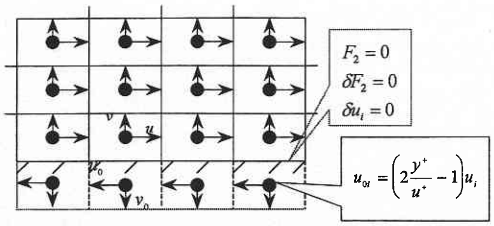

Fig. 3 wall boundary condition (wall-law) in co-located grids system

5. 計 算 結 果

Fig. 6，Fig. 7に主流方向の時間平均速度分布を，Fig. 8に主流方向の乱れ強さを順に示す．各時間ステップにおける平均壁面摩擦速度$U\tau$は計算中に1.00 ± 0.1の間で変化

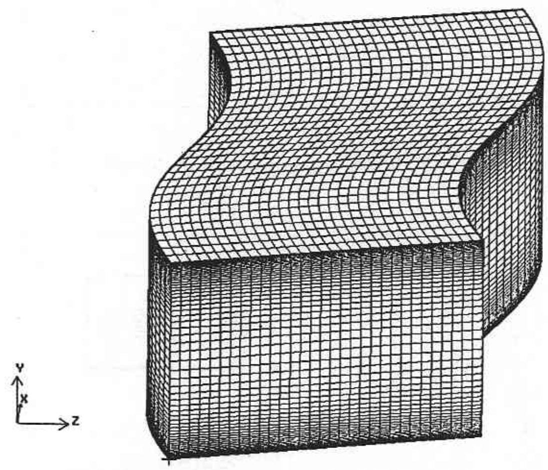

Fig. 4 curvilinear skew grids for channel flow

表1 実験条件一覧表

	格子形状	壁面境界条件及び壁方向格子配置	格子数	Δt^*	助走時間	平均時間
Case B	曲線斜交	No-slip 非等間隔	30*38*15	0.0005	35	15
Case BW-44	曲線斜交	Wall-low 非等間隔	30*38*15	0.0005	35	15
Case BW-40	曲線斜交	Wall-low 等間隔	30*38*15	0.0005	35	15
Case BW-30	曲線斜交	Wall-low 等間隔	30*28*15	0.0005	35	15
Case BW-20	曲線斜交	Wall-low 等間隔	30*20*15	0.0005	35	15

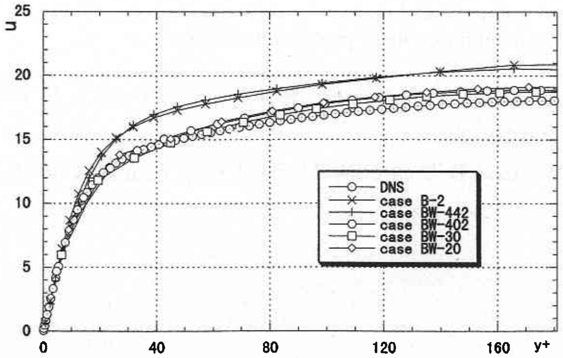

Fig. 5 Main flow velocity profile at Re = 360

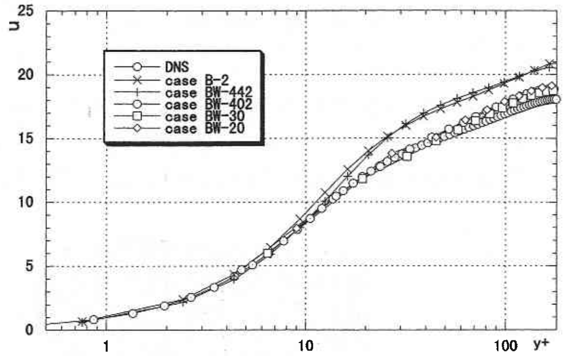

Fig. 6　Main flow velocity profile at Re = 360

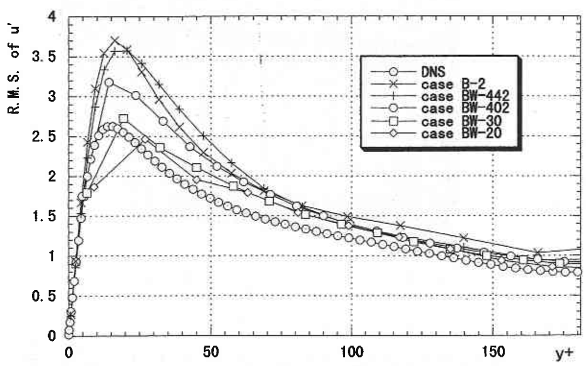

Fig. 7　Intensity of stream wise direction at Re = 360

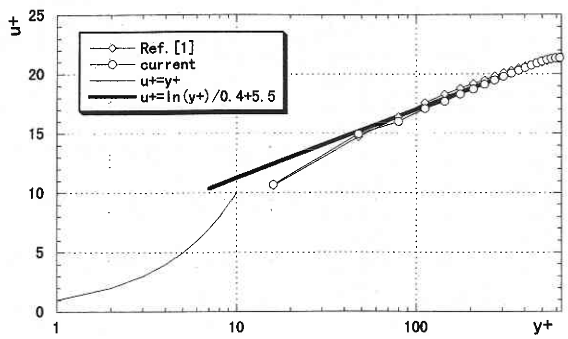

Fig. 8 comparison between current calculation and Ref. [1] in main flow velocity profill at Re = 1280

した．主流方向速度分布を具体的に分析すると，以下のことが分かった．

1.　case B と caseBW-44 の違いは，case B は no-slip を caseBW-44 は壁法則を使い，格子配置は完全に同じで，非等間隔である．その結果は殆ど一致している．“壁法則は自動的に no-slip 条件になっている” ことが分かった．中心流速に対して DNS との偏差が大きいと言う原因は中心部格子が粗いと考えられる．
2.　caseBW-44 と caseBW-40 との違いは壁垂直方向に非等間隔と等間隔であり，各方向の格子数は同じである．CaseBW-40 は中心部格子を多く設置できるため，流速分布は，大幅に改善された．
3.　caseBW-40，caseBW-30 と caseBW-20 三つの違う所は壁垂直方向格子数である．いずれも，非等間隔格子（case B，case BW-44）より中心部格子数密度が高い，このことが流速分布が改善された原因と考えられる．計算結果は DNS と一致することがわかる．特に壁面近くの平均速度分布（$y^+ < 100$）は DNS と良く一致しており，壁法則の取り扱い方の正確性を検証できた．
4.　caseBW-40，caseBW-30 と caseBW-20 の主流方向の乱れ強さは壁近傍の格子数が粗すぎる原因で，定量的には合わないが定性的に DNS 結果を近似していることが分かった．

6. 結　　論

本研究において行った検証計算結果から，開発した一般座標系における co-located 格子系 LES コードに対しては壁法則の取り扱い方は，工学的な実用性を有することが確認でき，流れ中心部格子数は速度分布に及ぼす影響，壁近傍格子数は乱れ強さに及ぼす影響が，それぞれ大きいと言う結論が得られた．

（1997年12月17日受理）

参　考　文　献

1）　森西洋平，博士論文，東京大学，1989.
2）　張　会来等．生産研究50巻1号（1998.1.）p49.
3）　内藤　健等，日本機械学会論文集，59-559, B，92-1042（1993）.
4）　Kim, J., Moin, P. and Moser, R.,（1987）. J. Fluid Mech., Vol. 177, pp133-166.