

# 圧縮性効果をレイノルズ応力に取り入れた乱流モデル Modeling of Compressible Effects on the Reynolds Stress

横 井 喜 充\*・吉 澤 徹\*・William W. LIOU\*\*・Tsan-Hsing SHIH\*\*  
Nobumitsu YOKOI, Akira YOSHIZAWA, William W. LIOU and Tsan-Hsing SHIH

## 1. は じ め に

自由剪断流では移流マッハ数  $M_c$  が大きくなると圧縮性効果によって乱流混合層の拡がりが増えることが知られている。従来の渦粘性表現を用いた  $k-\epsilon$  型のモデルにおいてこの効果は圧縮性による散逸率の増加とその結果の乱流エネルギーの抑制によって説明されてきた。通常、この圧縮性による散逸率の増加は圧縮性特有の膨張散逸  $\nu \langle (\nabla \cdot \mathbf{u}')^2 \rangle$  ( $\nu$ : 運動粘性率,  $\mathbf{u}'$ : 速度ゆらぎ,  $\langle \rangle$ : アンサンブル平均) や圧力/膨張相関項  $\langle p' \nabla \cdot \mathbf{u}' \rangle$  ( $p'$ : 圧力ゆらぎ) のモデリングを通じて乱流モデルに取り入れられている<sup>1,2)</sup>。しかし、近年の圧縮性乱流の直接数値計算 (Direct Numerical Simulation: DNS) の結果はこれらの項が重要でない場合があることを示唆している<sup>3,4)</sup>。むしろ DNS からはある種のマッハ数増加によってレイノルズ応力自体が抑制されることがわかっている<sup>5)</sup>。

ここでは圧縮性や電磁流体など複雑乱流の解析に適したマルコフ化二スケール (Markovianized Two-Scale: MTS) の方法<sup>6)</sup> を圧縮性乱流に適用する。その結果を用いて乱流エネルギー  $K (= \langle \mathbf{u}'^2 / 2 \rangle)$  とその散逸率  $\epsilon$ , 密度分散  $K_\rho (= \langle \rho'^2 \rangle)$ , [ $\rho'$ : 密度ゆらぎ] の三量からなる三方程式乱流モデルを構成する。以下で見ると、このモデルでは圧縮性効果は直接にレイノルズ応力に取り入れられる。このモデルを自由剪断流流に適用し、乱流混合層の拡がりが増え移流マッハ数の増加とともに抑えられるという観測事実<sup>13)</sup> を再現できることを見ていく。

## 2. 三方程式モデルの構成

### 2.1 乱れの特性時間

二スケール (TS) 解析では空間変数  $\mathbf{x}$  と時間変数  $t$  について、速い変動を記述する変数 ( $\xi, \tau$ ) とゆっくりとした変動を記述する変数 ( $\mathbf{X}, T$ ) の二つのスケール;

$$\xi (=x), \tau (=t); \mathbf{X} (= \delta x), T (= \delta t) \dots \dots \dots (1)$$

を導入し、密度、速度、内部エネルギーといった流れ場の量  $f$  を平均部分  $F = \langle f \rangle$  そこからのずれであるゆらぎ部分  $f'$  とに分ける;

$$f = F(\mathbf{X}; T) + f'(\xi, \mathbf{X}; \tau, T) \dots \dots \dots (2)$$

さらに微分展開の係数に対応する  $\delta$  によって流れ場のゆらぎ物理量を展開する;

$$f' = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n f'_n \dots \dots \dots (3)$$

したがって  $f'_0$  など下付添え字 0 のつく場の量は最低次  $O(\delta^0)$  の量であり、一様等方乱流場に対応する。  $\delta$  の各次数について流れ場の量の方程式は、適当なオペレータ  $L$  を用いて形式的に

$$L^{-1} f' = \int_{-\infty}^{\tau} G(\tau-s) f(s) ds \dots \dots \dots (4)$$

と書ける。ここで  $G$  は  $L$  の逆写像を表すグリーン関数 (応答関数) である。

マルコフ化二スケール (MTS) の方法による解析では乱れの応答関数に替えて

$$\tau_T = \int_{-\infty}^{\tau} G(\tau-s) ds \dots \dots \dots (5)$$

\*東京大学生産技術研究所 第1部  
\*\*Department of Mechanical and Aeronautical Engineering,  
Western Michigan University  
\*\*\* ICOMP, NASA Lewis Research Center

研 究 速 報 .....  
 で定義される乱流の特性時間  $\tau_T$  を用い, (4) 式を

$$L^{-1}f = f(\tau) \tau_T \dots\dots\dots (6)$$

と表現する. このため波数空間ではなく物理空間での解析が可能となり, 解析は容易になるが  $\tau_T$  の選び方が重要になる.

乱れのエネギー・スペクトルが非圧縮性からの寄与  $E_s(k)$  と圧縮性からの寄与  $E_c(k)$  で

$$E(k) = E_s(k) + E_c(k) \dots\dots\dots (7)$$

のように与えられると考えよう. 圧縮性効果が非圧縮性効果に比べて小さい場合, スペクトルの非圧縮性部分は通常のコルモゴロフの  $-5/3$  則に従うと考えられる. このときそれぞれのスペクトルは

$$E_s(k) = C_{KO} \varepsilon_0^{2/3} k^{-5/3} \dots\dots\dots (8)$$

$$E_c(k) = C'_{KO} \varepsilon_0 \varepsilon_0^{-1/3} k^{-5/3} (k \ell_c)^{-\beta} \dots\dots\dots (9)$$

と表現できる<sup>14,15)</sup>. ここで  $C_{KO}$  と  $C'_{KO}$  はそれぞれコルモゴロフ定数とその圧縮性部分の定数,  $\ell_c$  は圧縮性乱流のエネギー (低波数) 成分を特徴づける長さスケールである. また  $\beta$  は  $E_c(k)$  のコルモゴロフ則からのずれを表す指数である. 非圧縮性散逸率  $\varepsilon_0$  は散逸率  $\varepsilon_0$  と

$$\varepsilon_0 = \frac{4}{3} \nu \langle (\nabla \cdot \mathbf{u}_0')^2 \rangle \dots\dots\dots (10)$$

で定義される圧縮性散逸率  $\varepsilon_{0D}$  を用いて

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0 - \varepsilon_{0D} \dots\dots\dots (11)$$

で与えられる.

スペクトルの表式 (8), (9) を

$$K_0 = \int_{\ell_c}^{\infty} [E_s(k) + E_c(k)] dk \dots\dots\dots (12)$$

に代入すると乱流エネギーは

$$K_0 = C_s \varepsilon_0^{2/3} \ell_c^{2/3} \left( 1 + \frac{C_c \varepsilon_{0D}}{C_s \varepsilon_0} \right) \dots\dots\dots (13a)$$

$$= C_s \varepsilon_0^{2/3} \ell_c^{2/3} \frac{1 + \frac{C_c \varepsilon_{0D}}{C_s \varepsilon_0}}{\left( 1 + \frac{\varepsilon_{0D}}{\varepsilon_0} \right)^{2/3}} \dots\dots\dots (13b)$$

と表わせる. ここで係数は

$$C_s = \frac{3}{2} C_{KO} \dots\dots\dots (14a)$$

$$C_c = \frac{3}{2 + 3\beta} C'_{KO} \dots\dots\dots (14b)$$

である. 散逸率の圧縮性と非圧縮性部分の比について

$$\frac{\varepsilon_{0D}}{\varepsilon_0} = C_{DS} \frac{K_{\rho 0N}}{M_T^2} \dots\dots\dots (15)$$

というモデル<sup>6)</sup>を採用すると, 乱流エネギーは

$$K_0 = C_s \varepsilon_0^{2/3} \ell_c^{2/3} \left( 1 + A \frac{K_{\rho 0N}}{M_T^2} \right) \dots\dots\dots (16)$$

と表わせる. ただし  $K_{\rho 0N}$  は

$$K_{\rho 0N} = \frac{K_{\rho 0}}{\rho^2} \dots\dots\dots (17)$$

で定義される  $O(\delta^0)$  場の規格化された密度分散 ( $K_{\rho 0} = \langle \rho_0'^2 \rangle$ ),  $M_T (= \langle \mathbf{u}^2 \rangle^{1/2} / a$ ,  $a$ : 音速) は乱流マッハ数である. また

$$A = \left( \frac{C_c}{C_s} - \frac{2}{3} \right) C_{DS} \dots\dots\dots (18)$$

である. (16) 式からわかるように,  $A$  は密度分散による圧縮性効果に関する係数であり, 本モデルで最も重要な定数である. さて (16) 式を  $\ell_c$  について解くと

$$\ell_c = \frac{1}{C_s^{3/2}} \frac{K_0^{3/2}}{\varepsilon_0} \frac{1}{\left[ 1 + A \left( K_{\rho 0N} / M_T^2 \right) \right]^{3/2}} \dots\dots\dots (19)$$

が得られる. したがって乱流の特性時間は

$$\tau_T \propto \frac{K_0 / \varepsilon_0}{\left[ 1 + A \left( K_{\rho 0N} / M_T^2 \right) \right]^{3/2}} \dots\dots\dots (20)$$

のように書ける. 通常,  $K/\varepsilon$  は非圧縮性乱流の特性時間であることから, (20) 式は圧縮性効果で特性時間が短くなる可能性を示している.

## 2.2 平均場

平均場の方程式は,  $\bar{\mu}$ ,  $\bar{\kappa}$ ,  $\Theta$  をそれぞれ粘性率, 熱拡散率, 温度の平均部分として

平均密度  $\bar{\rho}$  :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{U}) = 0, \dots\dots\dots (21)$$

平均速度  $\bar{U}$  :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} U_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} U_j U_i \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( - \bar{\rho} \langle u'_j u'_i \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\mu} S_{ji} \dots \dots \dots (22) \end{aligned}$$

平均内部エネルギー  $E$  :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} E + \nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{U} E) \\ &= \nabla \cdot (\bar{\rho} \langle \mathbf{u}' e' \rangle) - P \nabla \cdot \mathbf{U} + \nabla \cdot (\bar{\kappa} \nabla \Theta) \dots \dots \dots (23) \end{aligned}$$

で与えられる。ただし

$$S_{ij} = \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{U} \delta_{ij} \dots \dots \dots (24)$$

である ( $\delta_{ij}$  : クロネッカーのデルタ)。乱流粘性率を通しての圧縮性効果に焦点を当てるため、レイノルズ応力、内部エネルギー/速度相関の表現には

$$\langle u'_i u'_j \rangle = \frac{2}{3} K \delta_{ij} - \nu_{TC} S_{ij} \dots \dots \dots (25)$$

$$\langle e' \mathbf{u}' \rangle = - \frac{\nu_{TC}}{\sigma_e} \nabla E \dots \dots \dots (26)$$

を用いる。ここで、 $O(\delta^0)$  場  $f'_0$  を本来の場  $f'$  で置き換える「くりこみ」の操作を経た後、(19) または (20) 式に対応して圧縮性乱流粘性率は

$$\nu_{TC} = C_\nu \frac{K^2 / \varepsilon}{\left| 1 + A \left( K_{\rho N} / M_T^2 \right) \right|^{3/2}} \dots \dots \dots (27)$$

となる。ただし  $K_{\rho N}$  は (17) 式に対応して

$$K_{\rho N} = \frac{K_\rho}{\rho^2} \dots \dots \dots (28)$$

で定義される本来の場の規格化された密度分散である。

**2.3 乱流統計量**

乱流統計量の輸送方程式は

乱流エネルギー  $K$  :

$$\begin{aligned} & \bar{\rho} \frac{DK}{Dt} = - \bar{\rho} \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \bar{\rho} \varepsilon \\ & + \nabla \cdot \left[ \left( \bar{\rho} \frac{\nu_{TS}}{\sigma_K} + \bar{\mu} \right) \nabla K \right] \dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

散逸率  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} & \bar{\rho} \frac{D\varepsilon}{Dt} = - C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} \bar{\rho} \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \\ & - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} + \nabla \cdot \left[ \left( \bar{\rho} \frac{\nu_{TS}}{\sigma_\varepsilon} + \bar{\mu} \right) \nabla \varepsilon \right] \dots \dots \dots (30) \end{aligned}$$

密度分散  $K_\rho$  :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial K_\rho}{\partial t} = - \langle \rho' \mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \bar{\rho} - 2K_\rho \nabla \cdot \mathbf{U} \\ & - C_D \left( 1 + A \frac{K_{\rho N}}{M_T^2} \right)^{3/2} \frac{\varepsilon}{K} K_\rho + \nabla \cdot \left( \frac{\nu_{TS}}{\sigma_{\rho\rho}} \nabla K_\rho \right) \dots \dots \dots (31) \end{aligned}$$

で与えられる。ここで密度/速度相関には

$$\langle \rho' \mathbf{u}' \rangle = - \frac{\nu_{TC}}{\sigma_\rho} \nabla \bar{\rho} - \frac{3}{2} (\gamma - 1) \nu_{TC} \frac{\bar{\rho}}{K} K_{\rho N} \nabla E \dots \dots \dots (32)$$

という表式を用いる ( $\gamma$  : 比熱比)。

モデル定数は圧縮性に関するものを除いては標準  $k-\varepsilon$  モデルの値を用いる。圧縮性に関連して新たに現われたモデル定数は

$$C_D = \sigma_{\rho\rho} = \sigma_\rho = 1, \quad A = 5, \quad 10 \dots \dots \dots (33)$$

と選ぶ。

**3. 自由剪断層**

上の三方程式モデルの有効性を見るために自由剪断層 (図1) へ適用する。圧縮性効果に関するモデル定数である  $A$  と自由剪断流れを特徴づけるパラメータ  $r_U = U_2/U_1$  ( $U_1$  : 高速側自由流速,  $U_2$  : 低速側自由流速) のいくつかの組み合わせについて数値シミュレーションを行なった。図2は平均速度分布を実験と比較したものである。

剪断境界層の成長率  $G$  は、境界層の厚さ

$$\delta_w = \frac{U_1 - U_2}{(dU/dy)_{MAX}} \dots \dots \dots (34)$$

を用いて

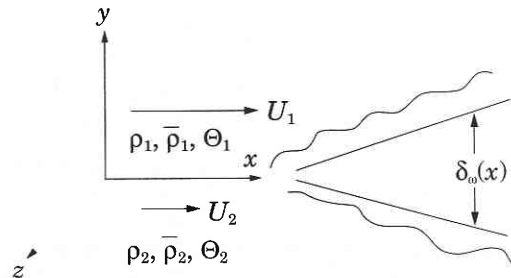


図1 自由剪断境界層

研 究 速 報

$$G = \frac{\delta'_\omega(M_c, r_U, r_\rho)}{\delta'_\omega(0, r_U, r_\rho)} \dots \dots \dots (35)$$

で定義される。ただし

$$\delta'_\omega = \frac{d\delta_\omega}{dx} \dots \dots \dots (36)$$

である。図3は移流マッハ数  $M_c$  の増加とともに成長率が劇的に下がる様子を示している。(27) 式からわかるように定数  $A$  を大きく取ると  $G$  はより小さくなる。しかし今回の  $A$  の変化による差異は実験のばらつきの範囲内である。

図4は  $M_c$  とレイノルズ応力のピーク値  $\tau_{MAX}$  の関係を示している。図3に対応して  $M_c$  の増加とともに  $\tau_{MAX}$  が著しく減少することがわかる。

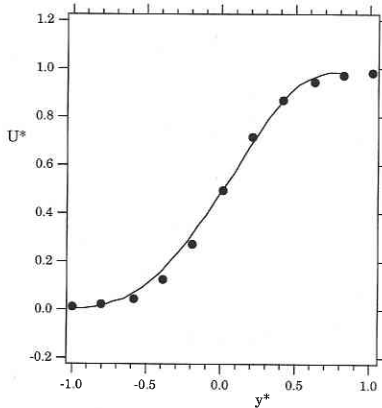


図2 平均速度分布  $U^*$  ( $= [U - U_2] / [U_1 - U_2]$ ) ( $A = 5, r_U = 0.36, r_\rho = 0.64$ ) ; ●, Samimy and Elliott<sup>7)</sup>.

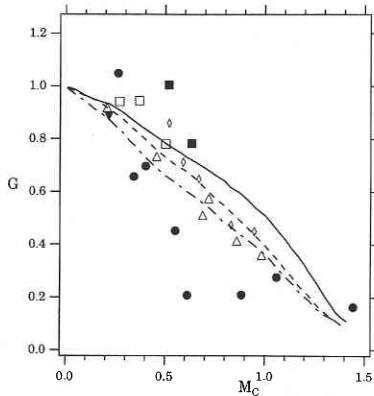


図3 対流マッハ数  $M_c$  の変化に伴う相対的成長率  $G$  の変化  
 —, 本モデル ( $A = 5, r_U = 0.1$ ) ; —, 本モデル ( $A = 5, r_U = 0.1$ ) ; —, 本モデル ( $A = 5, r_U = 0.2$ ) ; ■, Samimy and Elliott<sup>7)</sup>; ●, Papamoschou and Roshko<sup>8)</sup>; △, Goebel and Dutton<sup>9)</sup>; □, Sullins<sup>10)</sup>; ▼, Messersmith et al.<sup>11)</sup>; ◇, Chinzei et al.<sup>12)</sup>.

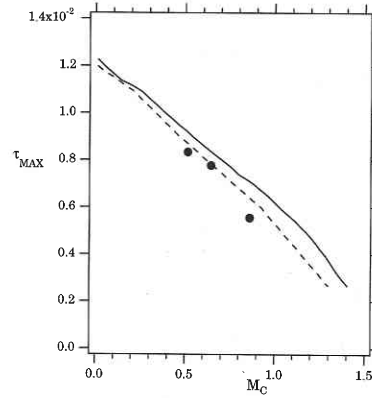


図4 対流マッハ数  $M_c$  の変化に伴う無次元レイノルズ応力のピーク値の変化。—, 本モデル ( $A = 5, r_U = 0.1$ ) ; —, 本モデル ( $A = 5, r_U = 0.2$ ) ; ●, Elliott and Samimy<sup>13)</sup>.

4. ま と め

MTS 理論より得られた結果から、圧縮性効果をレイノルズ応力に取り込んだ三方程式モデルを構成し、自由剪断乱流に適用した。その結果、乱流混合層の拡がりや乱流マッハ数  $M_c$  の増加とともに抑えられることなど、自由剪断乱流の特徴を再現できた。このことはモデルの妥当性を示していると考えられる。

(1997年10月20日受理)

参 考 文 献

- 1) O. Zeman, Phys. Fluids **A2**, 178 (1980).
- 2) S. Sarkar et al., J. Fluid Mech. **227**, 473 (1991).
- 3) A. W. Vreman, N. D. Sandham, and K. H. Luo, J. Fluid Mech. **320**, 235 (1996).
- 4) H. Fujiwara, Dissertation, University of Tokyo, Japan (1996).
- 5) S. Sarkar, J. Fluid Mech. **282**, 163 (1995).
- 6) A. Yoshizawa, Phys. Fluids **7**, 3105 (1995).
- 7) M. Samimy and G. S. Elliott, Phys. Fluids **28**, 439 (1990).
- 8) D. Papamoschou and A. Roshko, J. Fluid Mech. **197**, 453 (1988).
- 9) S. G. Goebel and J. C. Dutton, AIAA J. **29**, 538 (1990).
- 10) G. A. Sullins, NASP CR 1053 (1989).
- 11) N. L. Messersmith, S. G. Goebel, W. H. Frants, E. A. Krammer, J. P. Renie, J. C. Dutton, and H. Krier, AIAA Paper No. 88-0702 (1988).
- 12) N. Chinzei, G. Masuya, T. Komuro, A. Murakami, and K. Kudou, Phys. Fluids **29**, 1345 (1986).
- 13) G. S. Elliott and M. Samimy, Phys. Fluids **A 2**, 1231 (1990).
- 14) S. S. Moiseev, V. I. Petviashvily, A. V. Toor, and V. V. Yanosky, Physica **2 D**, 218 (1981).
- 15) F. Hamba and G. A. Blaisdell, Phys. Fluids **9**, 2749 (1997).