特 集 2
研 究 速 報

圧縮性乱流の4方程式モデル
Four-Equation Model for Compressible Turbulent Flows

半 場 藤 弘*
Fujihiro HAMBA

1. はじめに

非圧縮性乱流と同様に高速流や高浮力流れなどの圧縮性乱流を正確に数値計算するには乱流モデルが重要となる．非圧縮性乱流モデルに圧縮性の効果を導入しいくつかの流れ場でモデルが試され，圧縮性乱流の直接数値計算のデータを用いてモデルが改良されている[1-3]．また，統計理論を用いて解析したりモデルを導出する試みもなされてきた[4-8]．Yoshizawa[6, 7]は密度揺らぎの重要性に着目し，乱流エネルギーと散逸率に密度分散を加えた3方程式モデルを提案した．

筆者はYoshizawa[6, 7]の用いる2スケール直接相互作用近似（TSDIA）に，圧縮性乱流の慣性領域のスペクトルを導入し，圧縮性散逸率や圧力膨張相関などのモデルを求めた[9, 10]．その結果，無次元パラメータとして乱流マッハ数だけでなく密度分散が重要であることを示した．しかしある流れ場では密度分散が圧縮性効果を過大評価しうること，非圧縮の極限で既存の非圧縮性モデルに戻らないことなどの欠点がわかってきた．そこで本研究では，密度揺らぎの代わりに圧力とエントロピーの揺らぎを用いて計算を行い[8]，圧力の非圧縮成分と圧縮成分を区別してスペクトルを導入する．圧力膨張相関のモデルを求め，既存のモデルと比較し考察する．また，密度分散の代わりに乱流エネルギーの圧縮成分の発展方程式のモデル化を行う．エントロピー分散の発展方程式と合わせて4方程式モデルの提案を行う．

2. 圧力膨張相関のモデル

Sarkar[11]は乱流マッハ数M_t［$=(2K)^{1/2}/c$，cは音速］を用いて圧力膨張相関を次のようにモデル化した．

$$\left\langle P'\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right\rangle = C_{pdS1}M_t\bar{\rho}\left(\langle u_i'u_j'\rangle-\frac{2}{3}K\delta_{ij}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+C_{pdS2}M_t^2\bar{\rho}\varepsilon_s + C_{pdS3}M_t^2\bar{\rho}K\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \quad \cdots\cdots(1)$$

また，Hamba et al.[10]は乱流マッハ数と無次元密度分散ρ_n^2（$=\langle\rho'^2\rangle/\bar{\rho}^2$）を用いてモデルを導出した．その主要項は

$$\left\langle P'\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right\rangle = C_{pd1}\frac{\rho_n^2}{M_t}\gamma P\frac{\varepsilon}{K}-C_{pd3}\frac{\rho_n^2}{M_t}\gamma P\frac{\partial U_i}{\partial x_i} - C_{pd4}\frac{\rho_n^2}{M_t}\frac{\gamma P}{K}\frac{DK}{Dt} \quad \cdots\cdots(2)$$

となる．この二つのモデルをBlaisdell et al.[12]の一様等方性乱流のDNSのデータを用いて比較した[10]．図1は初期に乱れ速度の圧縮成分を与えない場合（ケース1，$u_c'/u'=0$），図2は与えた場合（ケース2，$u_c'/u'=0.5$）である．M_tの初期値はともに0.3である．一様等方性乱流なので$\partial U_i/\partial x_i$は0である．モデルに含まれる定数は$C_{pdS1}=0.15$，$C_{pdS2}=0.2$，$C_{pd1}=-0.1$，$C_{pd4}=0.12$とした．DNSの値は速度の圧縮成分の影響で図2の方が図1より約

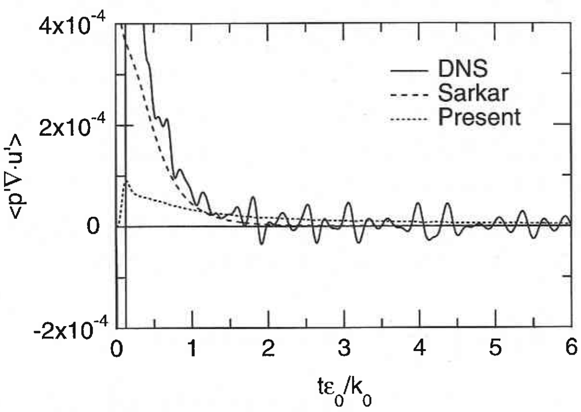

図1　圧力膨張相関の時間発展（ケース1，$u_c'/u'\doteqdot 0$）

*東京大学生産技術研究所　第1部

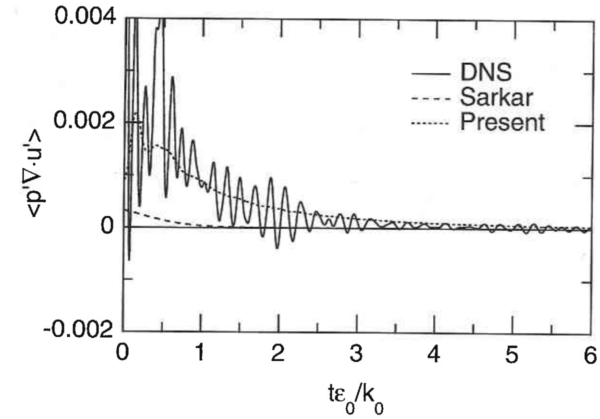

図2　圧力膨張相関の時間発展（ケース2，$u_c'/u' = 0.5$）

10倍大きい．Sarkar[11] のモデル式（1）はケース1はよく合っているが，M_tだけを用いるのでケース1とケース2ではほとんど同じ値となり，ケース2を小さく評価している．一方，モデル式（2）はケース1とケース2の違いをρ_n^2で表していてケース2は合っているがケース1はDNSより小さい．したがって二つのケースの違いをモデル化するには密度分散ρ_n^2は有効であるが，なお改良が必要であることがわかる．

3. TSDIAの改良

（2）のモデルにはρ_n^2/M_tという量が含まれる．しかし圧縮性チャネル流[13] のように平均密度勾配によって密度分散が作られる場合，この量が圧縮性効果を過大評価することがありうる．また$M_t \to 0$の極限で発散することが心配される．圧縮性流体の方程式を線形解析すると，$\nabla \times u' \neq 0$，$\rho' = p' = s' = 0$の渦度モード，$p' \neq 0$，$\rho' \neq 0$，$\nabla \times u' = s' = 0$の音波モード，$p' \neq 0$, $s' \neq 0$，$\nabla \times u' = p' = 0$のエントロピーモードの三つのモードがあることが知られている[14]．Hamba et al.[10] の理論計算ではエントロピーモードを直接考慮していないため，エントロピーの揺らぎが卓越する乱流場では上述の過大評価が起こると推測できる．さらに非圧縮流体の圧力のポアソン方程式からわかるように非線形効果により渦度モードにも圧力が伴う．圧力にも圧縮成分と非圧縮成分に区別する必要がある．

最近Rubinstein et al.[8] は圧力とエントロピーの揺らぎを用いてTSDIAの計算を行った．本研究でもその方法を用いる．例えば摂動展開の1次の速度と圧力の解は

$$u_{1i}(\boldsymbol{k},\tau) = \int^{\tau} d\tau_1 \left| \hat{G}_{ij}^{uu}(\boldsymbol{k},\tau,\tau_1) F_j^{u1}(\boldsymbol{k},\tau_1) + \hat{G}_i^{up}(\boldsymbol{k},\tau,\tau_1) F^{p1}(\boldsymbol{k},\tau_1) \right| \cdots\cdots\cdots (3)$$

$$p_{1i}(\boldsymbol{k},\tau) = \int^{\tau} d\tau_1 \left| \hat{G}_j^{pu}(\boldsymbol{k},\tau,\tau_1) F_j^{u1}(\boldsymbol{k},\tau_1) + \hat{G}^{pp}(\boldsymbol{k},\tau,\tau_1) F^{p1}(\boldsymbol{k},\tau_1) \right| \cdots\cdots\cdots (4)$$

と書ける．ここでGはグリーン関数であり，F^{u1}とF^{p1}は速度勾配などの平均場と0次の量を含む外力項である．G^{up}とG^{pu}を用いて速度と圧力の相互作用をより正確に表す点が特徴である．

Rubinstein et al.[8] は0次の量として非圧縮成分を使い，圧縮性乱流のK-εモデルとしてモデル表式を求めた．本研究では0次の量として圧力の圧縮成分も導入し，物理空間でのモデル変数として乱流エネルギーの圧縮成分K_cを採用する．例えば0次の圧力分散のスペクトルを

$$Q^{pp}(k,\tau,\tau) = \sigma_p(k) + \bar{\rho}^2 \bar{c}^2 \sigma_c(k) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

ただし

$$\sigma_p(k) = C_{\sigma p} \bar{\rho}^2 \varepsilon^{4/3} k^{-13/3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

$$\sigma_c(k) = C_{\sigma c} \varepsilon_d \varepsilon^{-1/3} k_m^{\alpha} k^{-11/3+\alpha} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

と仮定し，これを波数空間で積分し物理空間での圧力分散を求めると，

$$\langle p'^2 \rangle = C_{p1} \bar{\rho}^2 K^2 + 2\bar{\rho}^2 \bar{c}^2 K_c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

となる．ただし右辺第1項は非圧縮成分，第2項は圧縮成分を表す．また圧縮成分のスペクトル（7）に含まれる圧縮性散逸率ε_dは最終的にK_cを使って表される．

4. 圧力膨張相関の再計算とK_cの輸送方程式

上述の方法を用いて圧力膨張相関を計算すると次の表式が得られる．

$$\left\langle p' \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \right\rangle = -\gamma \left(C_{p1} \frac{\bar{\rho} K^2}{\bar{c}^2} + 2\bar{\rho} K_c \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \frac{1}{2\bar{\rho}\bar{c}^2} \frac{D}{Dt} \left(C_{p1} \bar{\rho}^2 K^2 + 2\bar{\rho}^2 \bar{c}^2 K_c \right) + \frac{K_c}{2\bar{c}^2} \frac{D}{Dt} \left(\bar{\rho} \bar{c}^2 \right) \cdots (9)$$

最後の項を誤差として無視し（8）を代入すると，圧力分散の輸送方程式（$D\langle p'^2 \rangle/Dt$）の主要項が再現されたことがわかる．これは（3），（4）を用いた解析が圧力のふるまいを正確に表現できることを示唆する．右辺第2項に含まれるDK/Dtに主要項P_k-ε（P_kは生産項）を代入すると

Sarkar[11] のモデル（1）が含まれることがわかる．一方，Zeman[15] が示したように圧力分散の輸送方程式は圧力膨張相関のモデル式として使うべきであり，独立にもう一つの輸送方程式を使う必要がある．そこで本研究ではTSDIAで（$k_ik_j/k^2)u_i(\mathbf{k})u_j(-\mathbf{k})$ の発展方程式に着目し，K_cの輸送方程式の導出を試みた．その結果

$$\frac{DK_c}{Dt}=-\left(C_{Kc1}M_t^2K+C_{Kc2}K_c\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_i}-C_{Kc3}M_t^2P_K+C_{Kc4}M_t^2\varepsilon-C_{Kc5}\frac{K_c}{K}\varepsilon+C_{Kc6}\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\bar\rho K^3}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{K_c}{M_t^2K}\right)\right]\quad\cdots(10)$$

が得られた．定常乱流場では $P_K=\varepsilon$ を用いると $K_c\propto M_t^2K$ であることがわかり，Sarkar[11] などによる M_t^2 だけを用いたモデルが妥当であることが示唆される．一方，図1と図2のような初期条件や境界条件による，または生産項 $\partial U_i/\partial x_i$ による K_c の非定常なふるまいが（10）によって予測できることが期待される．またチャネル流のようにエントロピー揺らぎが卓越する乱流場では K_c は小さくなり圧縮性効果の過大評価を避けることができる．

5. 4方程式モデル

音波モードを特徴づける K_c の輸送方程式にくわえて，エントロピーモードに対応する量として，エントロピー分散 K_e（$=\langle s'^2\rangle$）を考える．ここでsは定積比熱 c_v で無次元化されたエントロピー $s=[\log(p/p_0)-\gamma\log(\rho/\rho_0)]/C_v$ である．K_e の輸送方程式は

$$\frac{DK_e}{Dt}=-2\left\langle s'u_i'\right\rangle\frac{\partial S}{\partial x_i}-\varepsilon_e-\frac{\partial}{\partial x_i}\left\langle s'^2u_i'\right\rangle+\left\langle s'^2\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right\rangle\quad\cdots(11)$$

と書ける．これは非圧縮性乱流の温度分散の方程式に対応する．Kとεに加えて K_c と K_e をモデルの基礎変数とすることにより，モデルに3つの無次元パラメータが現れる．すなわち乱流マッハ数 M_t，乱流エネルギーの圧縮成分の割合 χ_c（$=K_c/K$），エントロピー分散 K_e である．

平均場の発展方程式にはいくつかの相関項が含まれる．まず圧力速度相関に着目する．そのモデルの主要項は次のように書ける．

$$\left\langle p'u_i'\right\rangle=-M_t^2\frac{K^2}{\varepsilon}\left(C_{pu1}\frac{\partial P}{\partial x_i}+C_{pu2}\frac{\gamma P}{\bar\rho}\frac{\partial\bar\rho}{\partial x_i}+C_{pu3}\frac{\gamma P}{K}\frac{\partial K}{\partial x_i}\right)-\gamma\chi_c\frac{K^2}{\varepsilon}\left(C_{pu5}\frac{\partial P}{\partial x_i}+C_{pu6}\frac{P}{\bar\rho}\frac{\partial\bar\rho}{\partial x_i}+C_{pu7}\frac{P}{K}\frac{\partial K}{\partial x_i}\right)\quad\cdots(12)$$

平均圧力の勾配を含む二つの項を考えると，渦拡散率はそれぞれ M_t^2 と χ_c に比例することがわかる．非圧縮の極限ではそれらのパラメータは0になるが，C_{pu3} を含む項は有限に残り，$(K^2/\varepsilon)\partial K/\partial x_i$ に比例する．すなわち非圧縮性乱流の圧力拡散のモデルに帰着することが示される．圧力分散の非圧縮成分を考慮しなかったHamba et al.[10] の理論計算で得られたモデルではすべての項が0になった．この点で今回のモデルの方が良いことがわかる．

次に（11）に含まれるエントロピーフラックスを考える．そのモデルは

$$\left\langle s'u_i'\right\rangle=-C_{su1}\frac{K^2}{\varepsilon}\frac{\partial s}{\partial x_i}-C_{su2}\frac{KK_e}{\gamma\bar\rho\varepsilon}\frac{\partial P}{\partial x_i}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

と表せる．右辺第1項は通常の渦拡散近似，第2項は圧力勾配に比例する交差拡散（cross diffusion）項である．圧力勾配に比例する項は，Shimomura[16] の理論解析でも圧縮性乱流の熱フラックスのモデルに同様の項があることが指摘されている．

（12）と（13）を使って内部エネルギーフラックスまたは熱フラックスのモデルを求めることができる．

$$\begin{aligned}\left\langle e'u_i'\right\rangle&=c_v\left\langle\theta'u_i'\right\rangle=\frac{E}{\gamma}\left\langle s'u_i'\right\rangle+\frac{(\gamma-1)E}{\gamma P}\left\langle p'u_i'\right\rangle\\&=-C_{su1}\frac{K^2}{\varepsilon}\left[\frac{\partial E}{\partial x_i}-\frac{(\gamma-1)E}{\gamma P}\frac{\partial P}{\partial x_i}\right]-C_{su2}\frac{KK_e}{\gamma^2\bar\rho\varepsilon}\frac{\partial P}{\partial x_i}\\&\quad-(\gamma-1)M_t^2\frac{K^2}{\varepsilon}\left(C_{pu1}\frac{E}{\gamma P}\frac{\partial P}{\partial x_i}+C_{pu2}\frac{E}{\bar\rho}\frac{\partial\bar\rho}{\partial x_i}+C_{pu3}\frac{E}{K}\frac{\partial K}{\partial x_i}\right)\\&\quad-(\gamma-1)\chi_c\frac{K^2}{\varepsilon}\left(C_{pu5}\frac{E}{P}\frac{\partial P}{\partial x_i}+C_{pu6}\frac{E}{\bar\rho}\frac{\partial\bar\rho}{\partial x_i}+C_{pu7}\frac{E}{K}\frac{\partial K}{\partial x_i}\right)\quad\cdots(14)\end{aligned}$$

右辺は大きく分けて四つの部分からなる．第一項と第二項はエントロピーフラックスに第三項と第四項は圧力速度相関に由来する．第一項の角カッコ内の量は平均エントロピー勾配 $\partial S/\partial x_i$ に比例する．その他の項はそれぞれ，K_c，M_t^2 と χ_c を含むので第一項が主要項であると見なせる．主要項だけを考えると，内部エネルギーフラックスは平均内部エネルギーEの勾配ではなく，平均エントロピーの勾配に比例することがわかる．内部エネルギーは温度に比例するので熱フラックス $\langle\theta'u_i'\rangle$ も同様に温度勾配でなくエントロピー勾配に比例することになる．すなわち平均温度勾配があっても平均温度の分布が等エントロピー的であれば熱フラックスが駆動されないことが示された．

レイノルズ応力は次のようにモデル化される．

研 究 速 報

$$\left\langle u_i' u_j' \right\rangle = \frac{2}{3} K \delta_{ij} - \nu_e \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^* + C_{uu1} \frac{K^3}{\gamma \bar{\rho} \varepsilon^2} \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial S}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_j} \frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^* + C_{uu2} \frac{K^2 K_e}{\gamma^2 \bar{\rho} \varepsilon^2} \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial P}{\partial x_j} \right)^* \quad \cdots\cdots (15)$$

ただし

$$\nu_e = C_{\nu e1} \frac{K^2}{\varepsilon} \left(1 + C_{\nu e2} \frac{1}{\varepsilon} \frac{DK}{Dt} + C_{\nu e3} M_t^2 + C_{\nu e4} M_t^2 \frac{1}{\varepsilon} \frac{DK}{Dt} \right) \cdot\cdot (16)$$

$$\left(f_{ij} \right)^* \equiv f_{ij} - \frac{1}{3} f_{kk} \delta_{ij} \quad \cdots\cdots (17)$$

である．ただし速度勾配の二乗に比例する非線形項は省略した．なぜならTSDIAの2次までの計算では非線形項に圧縮性効果が入らないからである．(16) の渦粘性にはDK/Dtによる非平衡効果，M_t^2による圧縮性効果，それらを組み合わせたものが含まれる．最後の項はDK/Dtを生産項P_Kと散逸項εで近似すると$M_t^2 P_K/\varepsilon$という項を含みSarkar[17] が用いた勾配マッハ数M_g（$= Sl/c$，Sは平均速度歪み，lは乱流の長さスケール）の二乗に対応することがわかる．また，(15) には渦粘性項の他に圧力やエントロピーの勾配を含む項がある．速度勾配に依存しない点が興味深い．いずれの項も平均エントロピーかエントロピー分散を含み，エントロピーに起因した効果だということがわかる．

K_eの輸送方程式 (11) にはエントロピーフラックスの他に二つの相関項が含まれる．それらを第一近似として

$$\left\langle s'^2 u_i' \right\rangle = -C_{ssu1} \frac{K^2}{\varepsilon} \frac{\partial K_e}{\partial x_i}, \quad \left\langle s'^2 \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \right\rangle = 0 \quad \cdots\cdots (18)$$

とモデル化する．これにより (11) をモデルの基本方程式として使うことができる．従来のKとεの方程式にK_cの輸送方程式 (10) とK_eの輸送方程式 (11) を加えて4方程式モデルを構成した．これまでのK-εモデルやK-ε-K_ρモデルより適用範囲が広いと期待できる．しかし圧縮性乱流にもいろいろな型があるので，すべての流れ場にこの4方程式モデルを使うべきとは限らない．エントロピーの揺らぎが音波モードの揺らぎよりはるかに小さい場合はエントロピー分散を無視してK-ε-K_cまたはK-ε-K_ρの3方程式モデルを使えばよいし，さらに定常乱流場のようにK_cがM_t^2Kに比例する場合はK-εモデルで十分であると考えられる．

6. ま と め

TSDIAを用いて圧縮性乱流モデルの解析を行った．密度ゆらぎの代わりに圧力とエントロピーの揺らぎを用いて計算し，圧力分散の圧縮成分と非圧縮成分のスペクトルを導入した．圧力膨張相関のモデルを求め，圧力分散の輸送方程式が再現されることを示した．さらに乱流エネルギーの圧縮成分の輸送方程式をモデル化し，エントロピー分散の方程式と合わせてK, ε, K_c, K_eを用いた4方程式モデルを提案した．圧力速度相関やエントロピーフラックスなどの相関項のモデルを求めた．熱フラックスは最低次で温度勾配でなくエントロピー勾配に比例することがわかった．今後はDNSのデータを用いて評価を行う予定である．

（1997年9月30日受理）

参 考 文 献

1）O. Zeman: Phys. Fluids A **2** (1990) 178.
2）S. Sarkar, G. Erlebacher, M. Y. Hussaini, & M. O. Kreiss: J. Fluid Mech. **227** (1991) 473.
3）藤原: 東京大学博士論文 (1996).
4）F. Bataille & J.-P. Bertoglio: FED-Vol. 151, Transitional and Turbulent Compressible Flows, ASME, (1993).
5）J. R. Ristorcelli: NASA ICASE Report, No. 95-22, (1995).
6）A. Yoshizawa: Phys. Rev. A **46** (1992) 3292.
7）A. Yoshizawa: Phys. Fluids **7** (1995) 3105.
8）R. Rubinstein & G. Erlebacher: NASA ICASE Report, No. 96-52, (1996).
9）半場：生産研究 **49** (1996) 75.
10）F. Hamba & G. A. Blaisdell: Phys. Fluids **9** (1997) No. 9.
11）S. Sarkar: Phys. Fluids A **4** (1992) 2674.
12）G. A. Blaisdell, N. N. Mansour, & W. C. Reynolds: Rep. TF-50 Department of Mechanical Engineering, Stanford University, (1991).
13）G. N. Coleman, J. Kim, & R. D. Moser: J. Fluid Mech. **305** (1995) 159.
14）S. K. Lele: Annu. Rev. Fluid Mech. **26** (1994) 211.
15）O. Zeman: Phys. Fluids A **3** (1991) 951.
16）Y. Shimomura: submitted to Int. J. Heat Fluid Flow.
17）S. Sarkar: J. Fluid Mech. **282** (1995) 163.