

# 非線形渦粘性表現に基づく k-ε モデル

(第 1 報：溝乱流，一様せん断乱流の数値解析への適用)

Turbulent Channel and Homogeneous Shear Flows Using a Nonlinear Eddy Viscosity Representation k-ε Model

西 島 勝 一\*  
Shoiti NISIZIMA

## 1. はじめに

工学的研究における乱流の数値解析で，渦粘性表現に基づく k-ε 乱流モデルは多く用いられている。しかし，このモデルは工学上重要な幾つかの乱流を的確に予測出来ないという欠点も指摘され，改良が成されてきた。

1. 壁乱流において，壁上における各統計量の漸近挙動が正しく再現されるようにする<sup>1,2)</sup>。
2. レイノルズ応力の各成分を非等方表現にする<sup>3,4)</sup>。
3. 応力モデルの特徴を渦粘性表現に組み入れる<sup>5)</sup>。

他方，統計理論的手法を用いて，非等方<sup>3)</sup>，非平衡効果<sup>6)</sup>等を渦粘性・レイノルズ応力表現へ組み入れる方法も研究されている。それらを発展させて，歪み速度テンソル  $S_{\alpha\beta}$  等の効果を乱流長さスケールに繰り込むことによって高次の非線形表現を導出する試みもなされている<sup>7)</sup>。本論文では，そのようなモデルを形状の異なる溝乱流，一様せん断乱流の解析に適用し，モデル定数の調整・決定を行なう。その解析結果を実験値や直接数値解析 (DNS) 結果等と比較検討し，新しい非線形渦粘性表現が異なる形状の乱流の諸特性再現にどの程度有効であるかを明確にする。

## 2. 非線形 k-ε モデル

### 2.1 統計理論からの示唆

速度，圧力 (密度で割ったもの) の平均部分とそれからのずれの擾乱部分をそれぞれ  $(\bar{v}, \bar{p})$  と  $(v', p')$  で表すと，三次元非圧縮・粘性流体に対する平均部分の方程式は，

$$\frac{D\bar{v}_\alpha}{Dt} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_a \frac{\partial}{\partial x_a} \right) \bar{v}_\alpha = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_a} \left( R_{\alpha a} + \nu \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_a} \right) \dots (1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \dots (2)$$

で与えられる。ここで， $\nu$  は動粘性率， $R_{\alpha\beta}$  はレイノルズ応力である。吉澤は TSDIA (Two-Scale Direct-Interaction Approximation) 理論の結果<sup>3,8)</sup>を用いて，擾乱場の基本的統計量として乱流エネルギー  $k$  とエネルギー散逸率  $\epsilon$  を選び，次の非線形渦粘性表現を提案した<sup>7)</sup>：

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{2}{3}k\delta_{\alpha\beta} + \nu_{TN}S_{\alpha\beta} - N_1 \left( S_{\alpha\alpha}S_{\alpha\beta} + S_{\beta\alpha}S_{\alpha\alpha} - \frac{2}{3}S^2\delta_{\alpha\beta} \right) - N_2 \left( S_{\alpha\alpha}\Omega_{\alpha\beta} + S_{\beta\alpha}\Omega_{\alpha\alpha} \right) \dots (3)$$

$$\nu_{TN} = \frac{\nu_t}{\left(1 + C'_\nu \chi^2\right)^{2/3}}, \quad \nu_t = C_\nu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad \chi = \sqrt{\frac{k^2 S^2}{\epsilon^2}} \dots (4)$$

$$S_{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad S^2 = S_{ab}^2, \quad \Omega_{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} \dots (5)$$

$$N_1 = C_{N1} \frac{k^3}{\epsilon^2 \left(1 + C'_\nu \chi^2\right)}, \quad N_2 = C_{N2} \frac{k^3}{\epsilon^2 \left(1 + C'_\nu \chi^2\right)} \dots (6)$$

モデル定数は理論的に，

$$C_\nu = 0.122, \quad C'_\nu = 0.0214, \\ C_{N1} = 0.0149, \quad C_{N2} = 0.0123 \dots (7)$$

と推測されている。

上記モデルの導出過程は以下のように要約される。TSDIA では  $k, \nu_t, N_1, N_2$  等は  $\epsilon$  と乱流長さスケール  $l$  を用いて表現され，

\*東京大学生産技術研究所 第 1 部吉澤研究室

研 究 速 報

$$k = F\{\varepsilon, l, S_{ij}\} \dots\dots\dots (8)$$

$$v_{TN} \propto \varepsilon^{1/3} l^{4/3} \dots\dots\dots (9)$$

$$N_1, N_2 \propto l^2 \dots\dots\dots (10)$$

ここで  $F\{A, B, \dots\}$  は  $A, B$  等に関する汎関連を意味する。通常、式 (8) は

$$k \propto \varepsilon^{2/3} l^{2/3} \dots\dots\dots (11)$$

と最も簡単な表現が採用され、 $l$  は

$$l \propto \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \dots\dots\dots (12)$$

となる。その結果  $v_t, N_1, N_2$  は

$$v_{TN} \propto \frac{k^2}{\varepsilon}, N_1, N_2 \propto \frac{k^3}{\varepsilon^2} \dots\dots\dots (13)$$

で与えられる。本モデルでは、式 (8) より  $S_{ij}$  の効果を繰り込み、

$$l \propto \frac{1}{\sqrt{1 + C\chi}} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \dots\dots\dots (14)$$

と表し、これを式 (9), (10) に代入し、上記モデルを得る。このモデル化の手法の利点は、さらに高次の3次の非線形項に対しても、式 (10) に類似の表現を通して自動的に係数に  $S_{ij}$  効果を組み込めることである。さらに、式 (8) の段階で  $S_{ij}$  以外の効果を組み込ませることによって、その効果を非線形表現の係数に組み込むことが可能となる。特に、 $S_{\alpha\beta}$  が過大になると (4) 式  $\chi$  を通し (4) (6) の分母値を大きくし、渦粘性率  $v_{TN}$  等の過大に歯止めをかける様になり、数値安定性も改善される。

上述の歪みおよび渦度テンソル効果をレイノルズ応力表現へ反映させた  $k-\varepsilon$  モデルに、安倍らのモデル<sup>5)</sup> がある。安倍らは代数型応力モデルと  $k-\varepsilon$  型非線形モデルを比較検討し、前者の特性を低レイノルズ数型  $k-\varepsilon$  モデルに組み入れた。Yakhotらは統計理論より、(4) 式  $\chi$  の効果をエネルギー散逸率  $\varepsilon$  方程式に組み入れた  $k-\varepsilon$  モデル<sup>9)</sup> を提起している。

ここでは、新しいモデルを溝乱流の解析に適用して対数速度則や乱流強度各成分の大小関係の評価し、未定数値を決定する。その定数を変えることなく、一様せん断乱流の解析を行う。定数値決定の過程で、式 (4) を次のように書き直し、モデル定数値 (7) の一部分を変更した。

$$v_{TN} = v_t \frac{(1 + C_{v\chi} C'_v)}{(1 + C'_v \chi^2)^{2/3}} \dots\dots\dots (15)$$

$$C_v = 0.09, C_{N1} = 0.005, C_{v\chi} = 17.3 \dots\dots\dots (16)$$

なお、 $C'_v = C_{N1} = C_{N2} = 0$  とすると本モデルは通常の  $k-\varepsilon$  モデルに帰結する。

### 2.2 A-N-K (安倍-長野-近藤) モデルの導入

新しいモデルを壁乱流へ適用しするために、安倍らにより提起されている低レイノルズ数型  $k-\varepsilon$  モデル<sup>2)</sup> を導入する。

$$\frac{Dk}{Dt} = R_{ab} \frac{\partial v_b}{\partial x_a} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ \left( \frac{v_t}{C_k} + v \right) \frac{\partial k}{\partial x_a} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} R_{ab} \frac{\partial v_b}{\partial x_a} - C_{\varepsilon 2} f_\varepsilon \frac{\varepsilon^2}{k} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ \left( \frac{v_t}{C_{\varepsilon 3}} + v \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a} \right\} \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$v_t = C_v f_v \frac{k^2}{\varepsilon} \dots\dots\dots (19)$$

$$f_v = \left[ 1 + \left( \frac{5}{R_t^{3/4}} \right) \exp \left\{ - \left( \frac{R_t}{200} \right)^2 \right\} \right] \left\{ 1 - \exp \left( \frac{-y^*}{14} \right) \right\}^2 \dots (20)$$

$$f_\varepsilon = \left\{ 1 - \exp \left( \frac{-y^*}{3.1} \right) \right\}^2 \left[ 1 - 0.3 \exp \left\{ - \left( \frac{R_t}{6.5} \right)^2 \right\} \right] \dots\dots\dots (21)$$

$$y^* = \frac{u_\varepsilon y}{v}, u_\varepsilon = (v\varepsilon)^{1/4}, R_t = \frac{k^2}{v\varepsilon} \dots\dots\dots (22)$$

ここで  $y$  は壁からの距離で、モデル定数は次の通り決められている。

$$\begin{aligned} C_v = 0.09, C_k = 1.4, C_{\varepsilon 1} = 1.5, \\ C_{\varepsilon 2} = 1.9, C_{\varepsilon 3} = 1.4 \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

## 3. 溝乱流への適用

### 3.1 未定定数の決定

本モデルにおける未定定数、すなわち式 (7) と (16) の調整・決定のため、図1で表される溝乱流の数値解析を行う。図2に示される主流速の解析結果と対数速度則の対比から、 $C'_v, C_{v\chi}$  を決める。次に、図3に示される乱流強度の実験結果<sup>10)</sup> と解析結果の関係から、 $C_{N1}$  と  $C_{N2}$  値を決

める. この過程では, 理論的に予測された定数値をなるべく動かさない事を念頭において値の調整を進める. なお, A-N-K モデルで最適化された式 (23) の定数は一切変更されていない.

3.2 数値計算方法

境界条件は, 壁上で滑り無し, 溝中心で対称性を仮定した. 差分方式は, 空間に不等間隔中心差分, 時間発展に Crank-Nicolson 陰解法を用いた. 計算格子は溝間の半分を 61 不等分割し, 溝間の半分だけの計算をおこなった.

3.3 溝乱流の数値解析結果

図 2~4 に, 溝中心流速  $\bar{v}_{1c}$  と溝間半値幅  $D$  で定義されるレイノルズ数  $R_c = 31906$  の解析結果と  $R_c = 30800$  の実測値<sup>10)</sup>等を示す. 図 2 から, 本モデルによる主流速の解析結果は対数速度則に比べ若干の過小評価が見られる. この過小評価は式 (15) において  $C_v = 0$ , すなわち通常の渦粘性モデルに置き換えることで改善できることから, 本渦粘性表現と A-N-K モデル式 (20) 等を結合させるとき, 後者のモデル定数も最適化する必要があると判断される.

本モデルでは, 乱流強度の各成分が非等方に表現される. 図 3 からレイノルズ応力の非等方性が各成分の大小関係を考慮して再現されていることが見て取れる. 定量的に見れば, 乱流強度の主流方向以外の 2 成分値が多少過大評価されている. 尚, 図中の  $u^*$  は壁面摩擦速度,  $y^+$  は壁座標である.

4. 一様せん断乱流への適用

溝乱流の数値解析で有効な k-ε モデルが, 全く機能しない例として一様せん断乱流があげられる<sup>11)</sup>. この k-ε モデルの欠点を改善するために, 多くの試みが成されてきている<sup>5,6,8,9,12)</sup>. ここでは, 溝乱流解析に使用された本モデルを一様せん断乱流の解析に適用し, DNS で示されている結果<sup>13)</sup>との比較検討を行う.

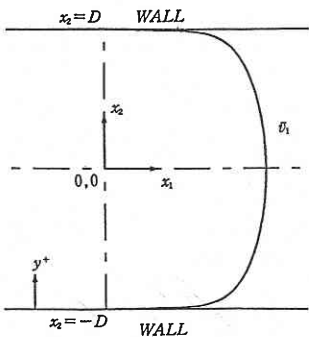


図 1 溝乱流の座標

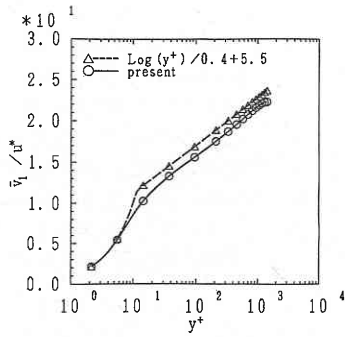


図 2 溝乱流における主流速  $\bar{v}_1/u^*$

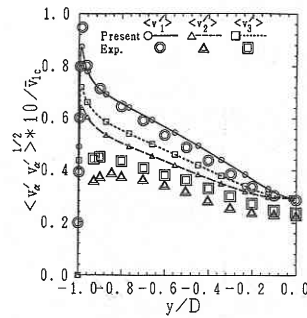


図 3 溝乱流における乱流強度  $\langle v'_\alpha v'_\alpha \rangle^{1/2} \times 10 / \bar{v}_{1c}$

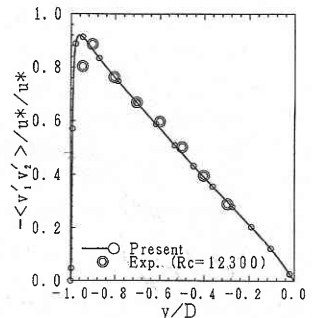


図 4 溝乱流におけるレイノルズ応力  $-\langle v'_1 v'_2 \rangle / u^* / u^*$

4.1 支配方程式と境界条件・数値計算方法

座標は図 5 の様にとり, 境界条件は,

$$S = \frac{d\bar{v}_1}{dx_2} = \text{constan } t, \quad \bar{v}_1 = f(x_2), \quad \bar{v}_2 \equiv \bar{v}_3 \equiv 0 \quad \dots (24)$$

とし, 計算は 4 次の Runge-Kutta 法で行った.

4.2 一様せん断乱流の数値解析結果

図 6 に通常の k-ε モデルによる結果を, 図 7 と図 8 に本モデルによる解析結果と DNS の結果<sup>13)</sup>を示す. 尚, 図横軸の st は無次元化された時間を表し, 解析対象の流れは DNS 解析結果を参考に,

$$S = 28.28, \quad S^* = S \frac{k_0}{\varepsilon_0} = 31.31, \quad R_{\nu 0} = \frac{k_0^2}{\nu \varepsilon_0} = 100 \quad \dots (25)$$

とした. 図から, 本モデルによる解析結果は k-ε モデルの欠点を改善し, DNS の結果をよく再現していることがわかる. 本モデルと通常 k-ε モデルの差異は式 (15)  $v_{TN}$  に集約されている. 図 9 と図 10 に, 式 (4)  $\chi$ ,  $v_{TN}/v_1$  の溝乱流と一様せん断乱流における振る舞いの違いを示す. 本モデルは  $S_{12}$  の効果がせん断強さ  $\chi$  を通して渦粘性  $v_{TN}$  へ反映され, 形状の異なる溝乱流と一様せん断両乱流の解析を可能にしている事がわかる.

5. 結 論

統計理論的に導出された新しい渦粘性表現に基づく k-ε モデルを, 壁上で滑り無し境界条件を課せられる A-N-K モデルと結合し, 溝乱流の数値解析に適用し, モデル定数の検討等を行った.

さらに, 同モデルを壁乱流とは特性の異なる一様せん断乱流の解析に適用し, DNS で明らかになった現象を再現できることを確認した.

このモデルを線形 k-ε モデルでの解析では不十分と指摘

研究速報

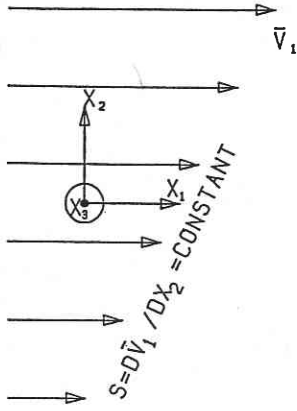


図5 一様せん断乱流の座標

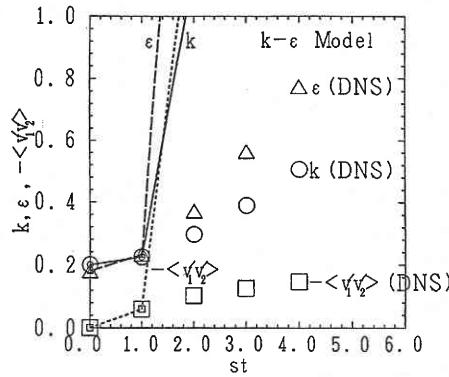


図6 一様せん断乱流における  $k, \epsilon, -\langle v_1' v_2' \rangle$  (k-εモデル)

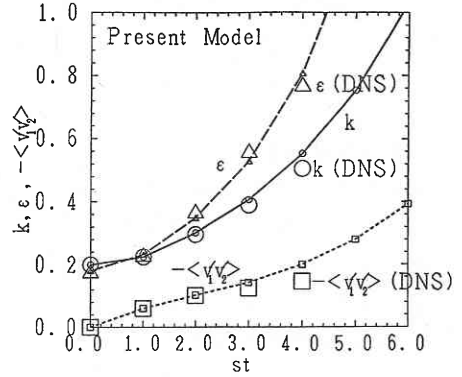


図7 一様せん断乱流における  $k, \epsilon, -\langle v_1' v_2' \rangle$  (本モデル)

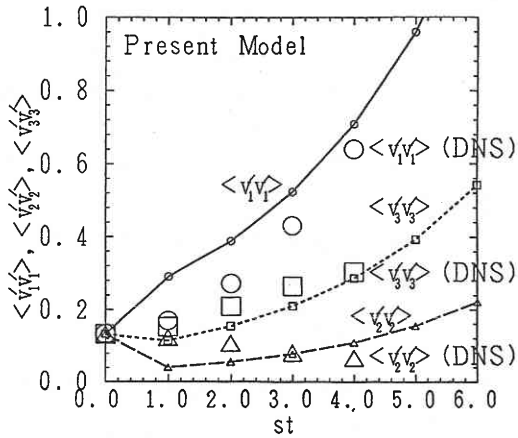


図8 一様せん断乱流における  $\langle v_n' v_n' \rangle$  (本モデル)

される流れ, 特に主流に垂直な2次流れが励起される正方形管内乱流や急減速現象を伴う建物周りの乱流, 噴流等に適用することは興味ある課題であり, 正方形管内乱流に関しては第2報で詳述する。

(1997年10月9日受理)

参考文献

- 1) 明・笠木, 機論, 54-507, B (1988), 3003.
- 2) 安倍・長野・近藤, 機論, 58-554, B (1992), 3003.
- 3) Yoshizawa, A., Phys. Fluids (1984), Vo.27, p. 1377.
- 4) Speziale, C. G., J.Fluid Mech. (1987), Vol.178,p.459.
- 5) 安倍・近藤・長野, 機論, 61-585, B (1995), 1714.
- 6) Yoshizawa, A. and Nisizima, S., Phys. Fluids A5 (1993), p. 3302.
- 7) 吉澤, 私信.
- 8) Okamoto, M., J. Phys. Soc. Jpn. (1994), Vol. 63, p. 2102.

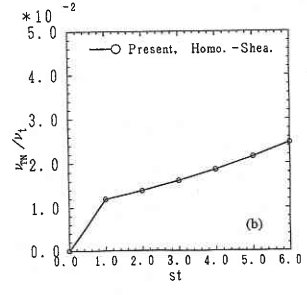
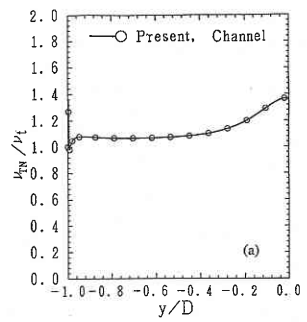
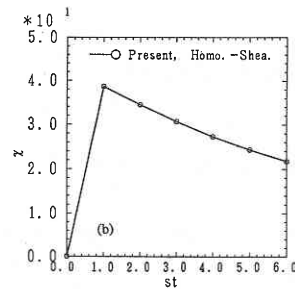
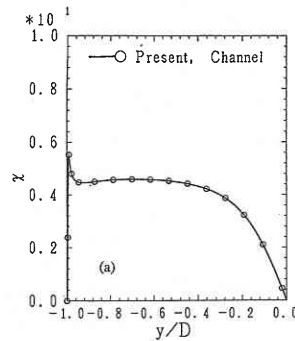


図9 せん断強さ  $\chi$ , 上: 溝乱流, 下: 一様せん断乱流

図10 渦粘性率  $\nu_{TN} / \nu_t$ , 上: 溝乱流, 下: 一様せん断乱流

- 9) Yakhot, V., Orszag, S. A., Thangam, S., Gatski, T. B. and Speziale, C. G., Phys. Fluids A4 (1992), p. 1510.
- 10) Laufer, J., NACA Rep. 1053 (1950).
- 11) 笠木・鹿園, 乱流伝熱シミュレーションモデルに関する調査(II)報告書, 東京理科大 (1992), 58.
- 12) 長野・近藤・田川, 機論, 60-572, B (1994), 1188.
- 13) 長野・松本, 乱流伝熱シミュレーションモデルに関する調査(III)報告書, 東京理科大 (1993), 10.