

非線形渦粘性表現に基づく k-ε モデル

(第 2 報: 正方形管内乱流の数値解析への適用)

Turbulent Square Duct Flow Using a Nonlinear Eddy Viscosity Representation k-ε Model

西 島 勝 一*

Shoiti NISIZIMA

1. はじめに

乱流の数値解析において, 計算時間が短くモデルも簡単な渦粘性表現に基づく k-ε 乱流モデルが広く用いられている。しかし, この等方渦粘性表現モデルは, 工学上重要な乱流の予測が的確に出来ないという欠点も指摘されている。それら欠点を改善することをめざして, 統計理論的に基づいて導出された非線形モデル¹⁾を第 1 報²⁾で提案した。それは, 歪み速度テンソル $S_{\alpha\beta}$ 等の効果を乱流長さスケールに繰り込むことによって高次の非線形表現を導出するとの特徴をもったモデル¹⁾である。すでに, 溝乱流および一様せん断乱流の解析に適用し, モデル定数等の調整がなされ, 適性な結果を再現できることが確認されている²⁾。

本論文では, この非線形渦粘性型モデルを正方形管内乱流の解析に適用し, 2 次流れ等に関する解析値を実験結果と比較検討する。この結果に基づき, 本モデルの有効性を議論する。

2. 非線形 k-ε モデル

2.1 統計理論からの示唆

速度, 圧力 (密度で割ったもの) の平均部分とそれからのずれの擾乱部分をそれぞれ (\bar{v}, \bar{p}) と (v', p') で表すと, 三次元非圧縮・粘性流体に対する平均部分の方程式は,

$$\frac{D\bar{v}_\alpha}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) \bar{v}_\alpha = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(R_{\alpha\alpha} + \nu \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (2)$$

で与えられる。ここで, ν は動粘性率, $R_{\alpha\beta}$ はレイノルズ応力である。吉澤は TSDIA 理論の結果^{3,4)}を用いて, 擾

乱場の基本的統計量として乱流エネルギー k とエネルギー散逸率 ε を選び, 次の非線形渦粘性表現を提案した¹⁾。このモデルはすでに, 溝乱流等への適用において定数等は次の通り調整されている²⁾ :

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} = & -\frac{2}{3}k \delta_{\alpha\beta} + \nu_{TN} S_{\alpha\beta} \\ & -N_1 \left(S_{\alpha\alpha} S_{\alpha\beta} + S_{\beta\alpha} S_{\alpha\alpha} - \frac{2}{3}S^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \\ & -N_2 \left(S_{\alpha\alpha} \Omega_{\alpha\beta} + S_{\beta\alpha} \Omega_{\alpha\alpha} \right) \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\nu_{TN} = \nu_t \frac{(1 + C_v \chi C'_v)}{(1 + C_v \chi^2)^{2/3}}, \quad \nu_t = C_v \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad \chi = \sqrt{\frac{k^2 S^2}{\varepsilon^2}} \quad (4)$$

$$S_{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad S^2 = S_{\alpha\beta}^2, \quad \Omega_{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} \quad (5)$$

$$N_1 = C_{N1} \frac{k^3}{\varepsilon^2} \frac{1}{(1 + C_v \chi^2)}, \quad N_2 = C_{N2} \frac{k^3}{\varepsilon^2} \frac{1}{(1 + C_v \chi^2)} \quad (6)$$

モデル定数は,

$$\begin{aligned} C_v = 0.09, \quad C'_v = 0.0214, \quad C_{N1} = 0.005, \\ C_{N2} = 0.0123, \quad C_{v\chi} = 17.3 \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

と最適化されている。

なお, $C'_v = C_{N1} = C_{N2} = 0$ とすると本モデルは通常の等方渦粘性モデルに帰結する。

2.2 壁上での滑り無し境界条件

以上のモデルを壁上で滑り無し境界条件を課せられるように, 安倍らにより提起されている低レイノルズ数型 k-ε モデル⁵⁾と結合する。

*東京大学生産技術研究所 第 1 部吉澤研究室

研 究 速 報

$$\frac{Dk}{Dt} = R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ \left(\frac{v_t}{C_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x_a} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ \left(\frac{V_t}{C_{\varepsilon 3}} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a} \right\} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$v_t = C_v f_v \frac{k^2}{\varepsilon} \dots\dots\dots (10)$$

$$f_v = \left| 1 + \left(\frac{5}{R_t^{3/4}} \right) \exp \left\{ \left(\frac{R_t}{200} \right)^2 \right\} \right| \left\{ 1 - \exp \left(\frac{-y^*}{14} \right) \right\}^2 \dots (11)$$

$$f_{\varepsilon} = \left\{ 1 - \exp \left(\frac{-y^*}{3.1} \right) \right\}^2 \left| 1 - 0.3 \exp \left\{ - \left(\frac{R_t}{6.5} \right)^2 \right\} \right| \dots\dots\dots (12)$$

$$y^* = \frac{u_{\varepsilon} y}{\nu}, \quad u_{\varepsilon} = (\nu \varepsilon)^{1/4}, \quad R_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \dots\dots\dots (13)$$

ここで式 (4) は (10) に変わり、式中の y は壁からの距離で、モデル定数は次の通り決められている。

$$C_k = 1.4, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.5, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.9, \quad C_{\varepsilon 3} = 1.4 \dots\dots (14)$$

3. 正方形管内乱流への適用

正方形等矩形断面を持つ真つすぐな管内乱流においては、主流方向に対して垂直な断面内に主流速の数%程度の2次流が励起される特性が実測されている^{6,7)}。しかし、通常の等方渦粘性 $k-\varepsilon$ モデルによる数値解析では2次流の発生とそれに伴う統計量の諸特性を再現することができない⁸⁾ので、これを改善する非等方・非線形 $k-\varepsilon$ モデルが提起され矩形管内乱流へ適用されてきている⁹⁻¹¹⁾。ここでは、溝乱流と一様等方性乱流の解析に用いた本モデルを、矩形管内乱流に適用してモデルの検討を試みる。特に、2次流の発生に寄与するレイノルズ応力の非線形項、すなわち、式 (3) の右辺第3,4項の効果が検討される。

3.1 流れ関数の導入

図1に示される形状の十分に発達し定常状態に達した正方形管内乱流を、

$$\frac{df}{dx_1} \equiv 0 \quad (f = \bar{v}, k, \varepsilon), \quad \frac{d\bar{P}}{dx_1} = \text{constant} \quad \dots\dots\dots (15)$$

として、連続の式 (2) を恒等的に満たし圧力に関する項を省くために、流れ関数を導入して解く。境界条件は壁上で滑り無し、管中心軸上では対称性を課し、管断面の1/4

面だけの解析を行った。

流れ関数の解法にはSOR法を用い、他は空間を不等間隔中心差分で記述し時間発展をCrank-Nicolson陰解法を用いて解析した。格子配分は溝乱流で用いた管辺幅の半分の距離を61分割したものを、重ね合わせて用いた。式 (11),

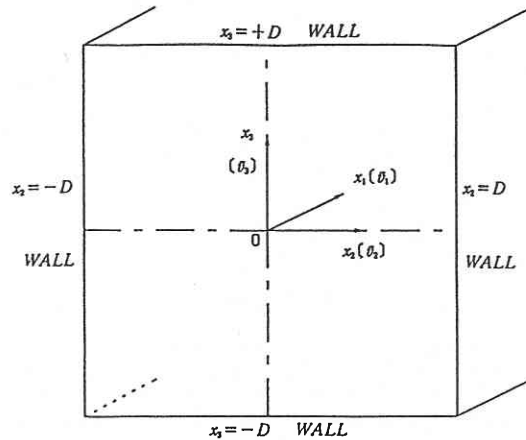


図1 正方形管内乱流の座標

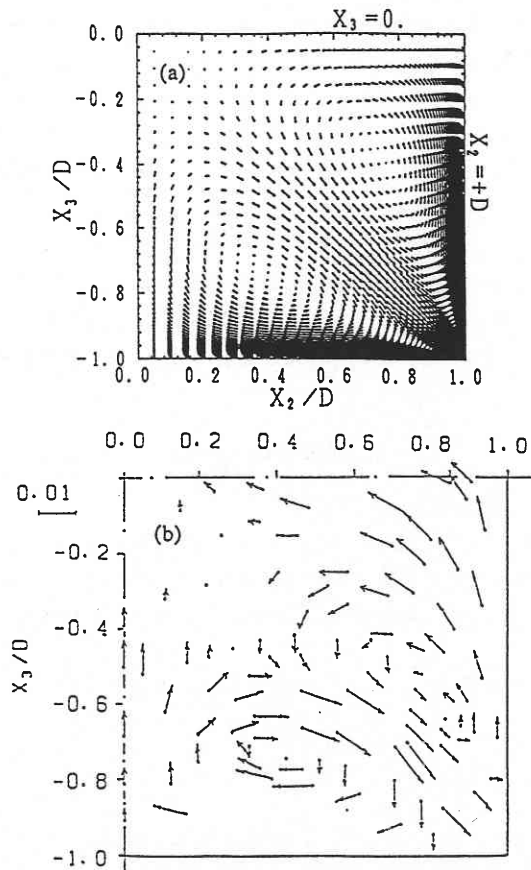


図2 2次流速 $\sqrt{\bar{v}_2^2 + \bar{v}_3^2}$. (a):本モデル; (b):実測値

(12) に含まれる壁からの距離 y は, $x_2 = \pm D$ か $x_3 = \pm D$ のどちらから近い方の距離を用いた.

3.2 正方形管内乱流の数値解析結果

図 2 から図 8 に本モデルによる解析結果と Melling-Whitelaw の実測値⁶⁾ との比較を, 図 9 で藤田-広田の実験結果¹²⁾ との比較を行っている. なお, 本解析におけるレイノルズ数と計算時間は,

$$Re = \frac{\bar{v}_b 2D}{\nu} = 41291, \quad \frac{\bar{v}_b t}{2D} > 100 \quad \dots\dots\dots (16)$$

と Melling-Whitelaw の実験値の $Re = 42000$ ($\bar{v}_b t / 2D = 36.8$) に近いものとした. ここで, \bar{v}_b は断面平均流速, $2D$ は 1 辺の長さ, 図中の \bar{v}_{1c} は管中心軸上の主流速である.

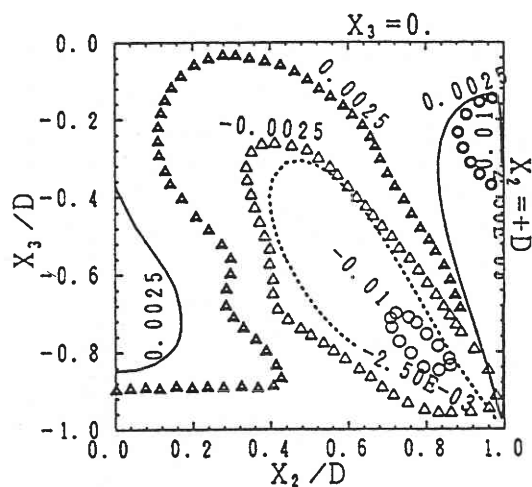


図 3 2 次流速 \bar{v}_3/\bar{v}_{1c} . 線: 本モデル; 記号: 実測値

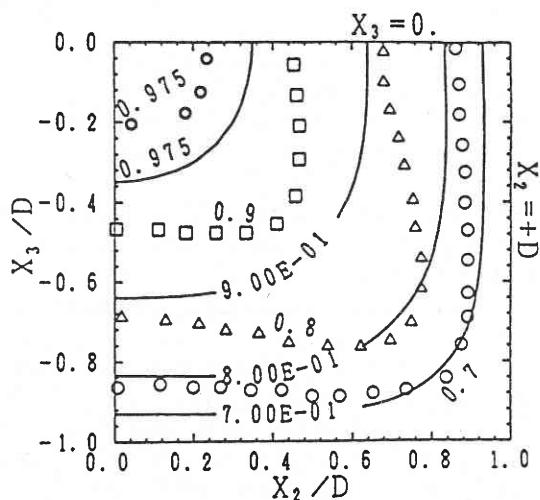


図 4 主流速 \bar{v}_1/\bar{v}_{1c}

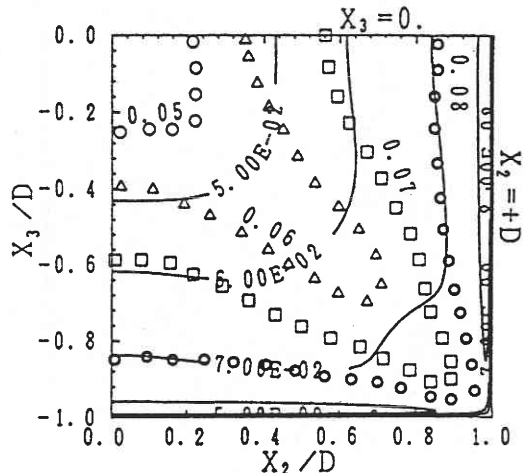


図 5 乱流強度 v'_1/\bar{v}_{1c}

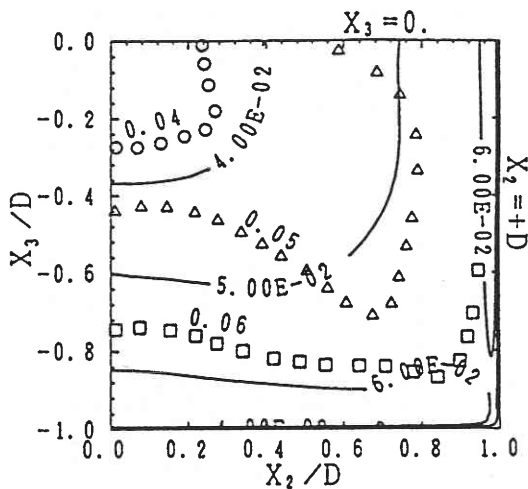


図 6 乱流強度 \bar{v}'_2/\bar{v}_{1c}

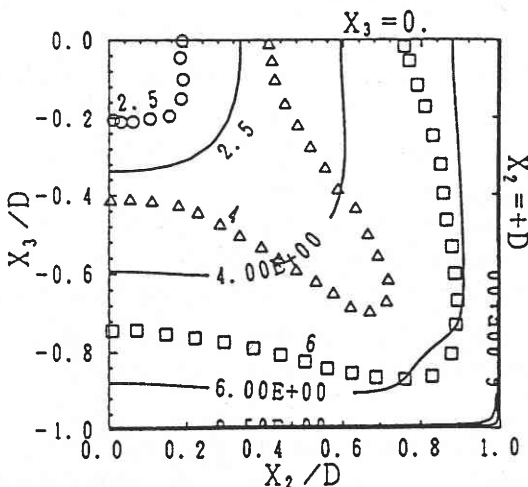


図 7 乱流エネルギー $(k/\bar{v}_{1c}^2) \times 10^3$

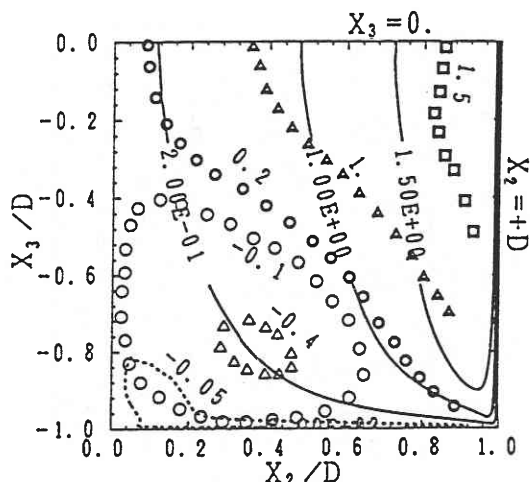
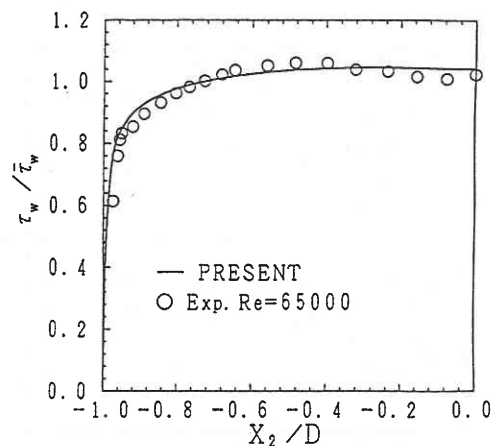
図8 レイノルズ応力 $(-\langle v'_1 v'_1 \rangle / \bar{v}_{1c}^2) \times 10^3$ 図9 壁面せん断応力 $\tau_w / \bar{\tau}_w$

図2, 3に2次流に関わる結果を示す. 図2から実験結果と同方向の2次流が再現されていることがわかる. 図3における \bar{v}_3 の正負関係とその最大最小値の位置関係は実験結果と良く対応しているが, 極大値は過小評価気味となっている. 図4からは, 等値線がダクトの角に向かって張り出している現象を再現しているが, その張り出し形状が鈍くなっていることがわかる.

図5～図7から乱流強度各成分の非等方表現が再現されていること, $\bar{v}'_1 / \bar{v}_{1c}$ 成分の過小評価と \bar{v}'_2 (\bar{v}'_3) 成分の過大評価傾向がわかる. 図8のレイノルズ応力の分布状況からは, 値が正の部分の実測値との対応は妥当であるが, 負値領域発生場所と大きさが実験値と比べて良くないことがわかる.

図9に壁面せん断応力結果を実測値と比較した. ここで, $\bar{\tau}_w$ は平均摩擦応力 $(= \frac{1}{8D} \int \tau_w ds)$ を表し, τ_w は壁面摩擦速度を掛け合わせて求めている.

4. 結 論

統計理論的に導出された新しい渦粘性表現に基づく $k-\varepsilon$ モデルを, 溝乱流と一樣せん断乱流の解析に用いられた定数を変化させることなく, 正方形管内乱流の解析に適用した. その結果, 本モデルは矩形管内乱流の特徴, 例えば, 2次流れの再現に有効であることがわかった. さらに, 溝乱流, 一樣せん断乱流と本正方形管内乱流の結果を重ね合わせると, 特性の異なる幾つかの乱流解析が可能な汎用性あるモデルであることがわかった.

本モデルは, 第1報²⁾で詳述したように, 例えば, 式(4) χ に,

$$\chi = \sqrt{\frac{k^2 (C_s S^2 + C_\Omega \Omega^2)}{\varepsilon^2}}, \quad \Omega^2 = \Omega_{ab}^2 \dots \dots \dots (17)$$

と渦度 (Ω_{ab}) 効果等の取込みも可能で, 3次非線形モデルへの拡張も容易にできる. また, 本表現は歪み速度テンソル S_{ab} の高次項による不安定性を, χ の分母への導入 (例えば, 式(4), (6)) によって抑制する形になっているので計算安定性向上も期待される.

このモデルを線形 $k-\varepsilon$ モデルでの解析では不十分と指摘される流れ, 例えば, 旋回乱流や急減速現象を伴う建物前方の乱流, 噴流等の数値解析に適用することは興味ある課題である.

(1997年10月13日受理)

参 考 文 献

- 1) 吉澤, 私信.
- 2) 西島, 非線形渦粘性表現に基づく $k-\varepsilon$ モデル (第1報: 溝乱流, 一樣せん断乱流の数値解析への適用), 生産研究 (投稿中).
- 3) Yoshizawa, A., Phys. Fluids (1984), Vo.27, p. 1377.
- 4) Okamoto, M., J. Phys. Soc. Jpn. (1994), Vol.63, p. 2102.
- 5) 安倍・長野・近藤, 機論, 58-554, B (1992), 3003.
- 6) Melling, A. and Whitelaw, J. H., J. Fluid Mech. (1976), Vol. 78, p. 289.
- 7) 藤田・横沢・広田・西垣, 機論, 53-492, B (1987), 2370.
- 8) 河村, 機械学会 Rc-104 流れ解析プログラム検証研究分科会報告・正方形管内乱流 (1993).
- 9) Nisizima, S., Theoret. Comput. Fluid Dynamics (1990), Vol. 2, p. 61.
- 10) Hur, N., Thangam, S. and Speziale, C.G., Trans, ASME (J. Fluids Eng.) (1990), Vol. 112, p. 205.
- 11) 明・小林, 機論, 56-532, B (1990), 3680.
- 12) 藤田・広田, 機械学会 Rc-104 流れ解析プログラム検証研究分科会報告・正方形管内乱流 (1993).