

## ダイナミック SGS モデルにおける渦粘性型モデルの評価

Assessment of the Eddy Viscosity Type Models in Dynamic SGS Model

坪 倉 誠\*, 小 林 敏 雄\*\*, 谷 口 伸 行\*\*\*

Makoto TSUBOKURA, Toshio KOBAYASHI and Nobuyuki TANIGUCHI

## 1. 緒 言

ラージエディシミュレーション (Large Eddy Simulation, 以下 LES) における乱流モデル, 即ちサブグリッドスケール (Subgrid Scale, 以下 SGS) モデルにおいてはスマゴリンスキーモデル<sup>1)</sup>に代表される等方型の渦粘性モデルが重要な役割を演じてきた。この理由として, この種のモデルを用いた場合, 乱流エネルギーはグリッドスケール (Grid Scale, 以下 GS) から SGS に順散逸し, 粗い計算格子を用いても比較的安定に計算が行えるという工学的利点が挙げられる。

一方現実の乱流場においては乱流エネルギーは瞬時には SGS から GS への逆散逸も存在することが指摘されている。それ故 SGS モデリングにおいては等方型渦粘性モデルの持つこの絶対散逸の性質はしばしば欠点として指摘される。しかしより高度な SGS モデルとして挙げられるスケール相似モデル<sup>2)</sup>を適用する際にも, 散逸モデルとして等方型渦粘性モデルを併用する混合型モデル<sup>2)</sup>がしばしば用いられる。これは等方型渦粘性モデルが瞬時の乱流エネルギーの輸送過程を適切に再現しないものの, DNS データ等から統計的にはエネルギーの散逸を適切に表現することが知られており, 散逸モデルとして等方型渦粘性モデルの有用性を示すものである。

前述の通り, 等方型渦粘性モデルとしてスマゴリンスキーモデルがしばしば用いられる。このモデルは SGS における乱流エネルギーの生成率と散逸率の釣り合い, 即ち局所平衡の仮説を用いることで導出される。この種の仮説はモデルに含まれる定数の決定に際しては非常に有用であるが, 任意の乱流場へのモデルの適用を考えた場合は問題が

ある。

また近年開発されたダイナミック SGS モデル<sup>3)</sup>は流れ場の瞬時の各場所での性状に応じてモデル係数を決定する手法として注目されている。特にこのモデルの適用を考えた場合, 異なるフィルタ幅で局所平衡の仮説を考慮するスマゴリンスキーモデルは理に適っているとは考え難い。

本報においては, ダイナミック SGS モデルにおけるスマゴリンスキーモデルに替わる等方型渦粘性モデルの提案を目的とする。

## 2. SGS モデリング

以降, グリッドフィルタ操作を (ˆ) およびこの時のフィルタ幅を,  $\bar{\Delta}$  ダイナミックモデルで用いられるテストフィルタ操作を (˜) およびこの時のフィルタ幅を  $\tilde{\Delta}$  とする。この時, モデル化を必要とする SGS 応力は

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。ここでは特に SGS における運動の相互作用に対するモデル化のみを考慮して,

$$\tau_{ij} \approx \overline{u_i u_j} \dots\dots\dots (2)$$

と, レイノルズ応力のモデル化に注目する。この時スマゴリンスキーモデルは以下の様に与えられる。

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2C \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \dots\dots\dots (3)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad |\bar{S}| = \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}} \dots\dots\dots (4)$$

以降, このモデルを S モデルと表記する。

一方, 運動方程式から  $\tau_{ij}$  の輸送方程式を導出し,  $\tau_{ij}$  のラグランジュ微分項を時間スケール  $T$  でモデル化することで  $\tau_{ij}$  のモデル化が可能である<sup>4)</sup>。この時輸送方程式中特

\* 日本学術振興会特別研究員

\*\* 東京大学国際・産学共同研究センター

\*\*\* 東京大学生産技術研究所第 2 部

研 究 速 報

に生成項が支配的であると仮定し、時間スケールを生成項に乗じる。そして生成項に含まれる  $\tau_{ij}$  に対してその対角成分を  $\tau_{ij}$  のトレースを用いて与え、非対角成分についてはゼロと仮定する (弱非等方性の仮定) ことで、 $\tau_{ij}$  は以下の様にモデル化できる。

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2T \tau_{kk} \bar{S}_{ij} \dots\dots\dots (5)$$

ここで時間スケール  $T$ 、および SGS エネルギー  $\tau_{kk}$  に対してモデル化が必要なることに注意されたい。今、時間スケールに対して  $T = C\bar{\Delta}/\sqrt{\tau_{kk}}$ 、及び  $T = C/|S|$  を用い、 $\tau_{kk}$  に対してスケール相似則モデルを用いると、それぞれの時間スケールに対して (5) 式は順に以下の様にあらわされる。

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2C\bar{\Delta}\sqrt{(\bar{u}_k - \bar{u}_k)(\bar{u}_k - \bar{u}_k)} \bar{S}_{ij} \dots\dots\dots (6)$$

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2 \left\{ C(\bar{u}_k - \bar{u}_k)(\bar{u}_k - \bar{u}_k) / |\bar{S}| \right\} \bar{S}_{ij} \dots\dots (7)$$

以降これらのモデルを順に I1, I2 モデルとする。両モデルとも局所平衡の仮説を用いていないことに注意されたい。

S モデル, I1, I2 モデルの数値解析上の大きな相違点はモデルに含まれる長さスケールの乗数にある。即ち S モデルにおいては乗数 2, I1 モデルでは乗数 1, 一方 I2 モデルでは長さスケールは陽的には現れない。この特徴はこれらのモデルにダイナミック SGS モデルを適用してモデル係数を求めた場合に特に顕著である。ダイナミック SGS モデルを用いた場合、モデル係数は以下の式で表される。

$$C\bar{\Delta}^n = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} \dots\dots\dots (8)$$

$$L_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j \dots\dots\dots (9)$$

$$M_{ij} = \alpha^n f(\bar{u}_k, \bar{u}_k) \bar{S}_{ij} - \left\{ f(\bar{u}_k, \bar{u}_k) \bar{S}_{ij} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

この時、速度の関数  $f(\bar{u}_k, \bar{u}_k)$  は適用するモデルに応じて変化する。ダイナミック SGS モデルにおいては、(10) 式に含まれる  $\alpha = \bar{\Delta}/\bar{\Delta}$  がモデルパラメータとして予め決定する必要がある。Germano らはこの値に対して  $\alpha = 2$  を用いることを提唱している。ここで S モデル, I1 モデルを用いた場合、 $\alpha$  の乗数はそれぞれ  $n = 2$  および  $n = 1$  で与えられる。一方 I2 モデルを用いた場合はモデル定式化においてこのモデルパラメータが陽的に現れない。

3. 数値解析手法

前述の S, I1, I2 モデルを平行平板間乱流に適用し、そ

の有用性を検討する。レイノルズ数は Kim らの DNS に合わせて壁面摩擦速度とチャンネル半幅で無次元化して 180 とする。解析領域は流れ方向、壁に垂直方向、スパン方向をそれぞれ  $x, y, z$  方向とし、それぞれ  $x = 4\pi, y = 2, z = 4/3\pi$  とする。用いた格子数はそれぞれ 32, 64, 32 である。この時、流れ方向の格子幅は  $\Delta x^+ = 70.7$ 、スパン方向は  $\Delta z^+ = 23.5$  となる。工学的な流れ場への適用を考慮して、かなり粗い格子を用いていることに注意されたい。

基礎式の離散化には有限差分法を用いる。この時、対流項、圧力勾配項、連続式に対して森西により提案された運動量、エネルギー保存スキームを適用する<sup>5)</sup>。対流項の差分精度は断らない限り 4 次である。詳しい数値解析手法は森西の文献を参照されたい。

フィルタ操作の離散化についてはフィルタ幅に対して 4 次精度を考慮して

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i + \frac{\bar{\Delta}^2 \bar{u}_{i+1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{h^2} + O(\bar{\Delta}^4) \dots\dots\dots (11)$$

で与えられる<sup>6)</sup>。ここで右下添え字  $i$  は格子点の位置を示している。この時、 $h$  は格子幅であり、離散化したフィルタ操作においては  $\bar{\Delta}/h$  がパラメータとなり予め与える必要がある。本研究においてはテストフィルタ操作に対して  $\bar{\Delta}/h = 2$  とする。この時、Germano らにより提案されている  $\bar{\Delta}/\bar{\Delta} = 2$ 、及びグリッドフィルタ ( $\bar{\Delta}$ )、テストフィルタ ( $\tilde{\Delta}$ )、およびグリッド・テストフィルタ ( $\tilde{\tilde{\Delta}}$ ) 間の関係式、 $\bar{\Delta} + \tilde{\Delta}^2 = \tilde{\tilde{\Delta}}^2$  を考慮して、それぞれのフィルタ操作におけるパラメータは以下の表 1 で与えられる。数値解析結果のこのパラメータ値に対する依存性については後で述べる。

尚、本研究におけるチャンネル流れにおいては壁方向については陽的なフィルタ操作を行わず、従って (10) 式における  $\alpha$  については  $\alpha = 2^{2/3}$  で与えている。また (10) 式により求められたモデル係数は、数値不安定性を回避する為に、 $x$  および  $z$  方向に平均操作が施される。

4. 解 析 結 果

4.1. 各モデルの比較

図 2 に各モデルによる主流方向平均流速の予測を示す。図からわかる通り、ダイナミックモデルを用いた S モデルにおける欠点の一つである対数則領域における過大評価

表 1 各フィルタ操作におけるフィルタ幅と格子幅の比

$\bar{\Delta}/h$	$\tilde{\Delta}/h$	$\tilde{\tilde{\Delta}}/h$
$2/\sqrt{3}$	2	$4/\sqrt{3}$

が, I1, I2 モデルを用いることで改善されているのがわかる. また 3 種類のモデルの内では I2 モデルがもっとも良い結果を示している. 全モデルに観られる中央部での対数則の傾きからのずれは, この領域における格子解像度の不足によるものと考えられる. 図 3, 4, 5 にそれぞれ GS の流れ方向, 壁に垂直方向, スパン方向の乱流強度を示す. 平均流速と同様に I1, I2 モデルの順に解が改善されているのがわかる.

4.2. 差分精度に対する依存性

3 種類のモデルの内, S モデルと I2 モデルについて, 対流項, 圧力項, 連続の式に対して, 差分精度を 2 次と 4 次の二種類について調べ, 解の差分精度に対する依存性を調べた. 図 6 に平均流速, 図 7 に流れ方向乱流強度を示す. 図からわかる通り, 低次の差分を用いることで対数則領域

における平均流速の過大評価, 流れ方向の乱流強度の過大評価共に助長される傾向にあるが, いずれの精度においても S モデルに対して I2 モデルが改善された結果を示しているのがわかる. また, 2 次精度の解析においては両モデル共, 乱流強度の最大値を示す位置が DNS に対して過大評価されているのがわかる.

4.3. 渦粘性係数の比較

図 8 に各モデルの 2 次, および 4 次精度差分法における予測された渦粘性係数の値を示す. もっとも顕著な傾向は, S, I1, I2 の順に予測されている渦粘性係数が小さく評価されている点にある. この順番に乱流統計量が改善されていることを考慮すると, S モデルの過大散逸傾向が I1, I2 モデルを用いることで改善されているのがわかる.

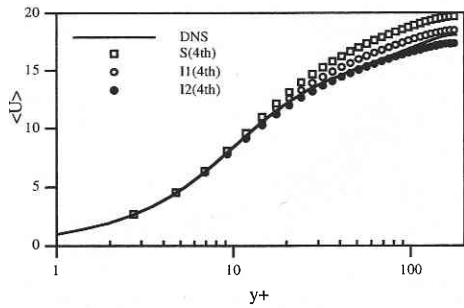


図 2 流れ方向平均流速 (各モデルの比較)

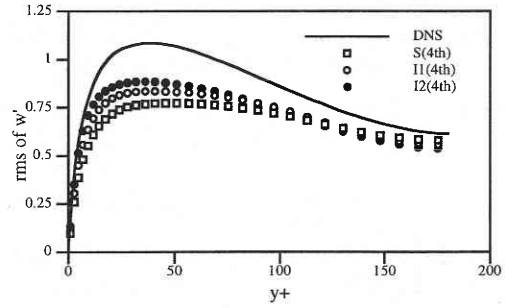


図 5 スパン方向 GS 乱流強度 (各モデルの比較)

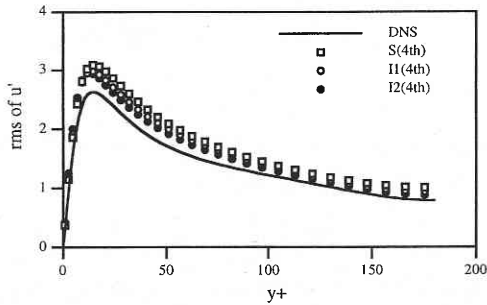


図 3 流れ方向 GS 乱流強度 (各モデルの比較)

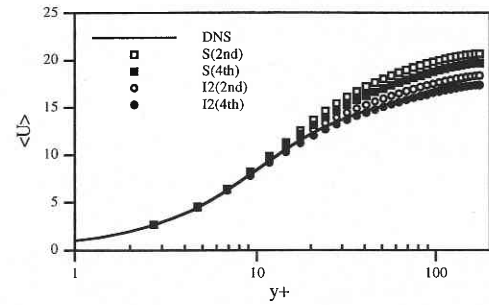


図 6 流れ方向平均流速 (差分精度に対する依存性)

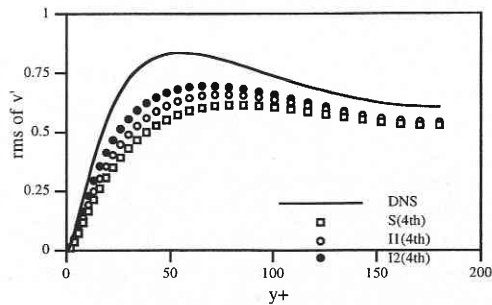


図 4 壁垂直方向 GS 乱流強度 (各モデルの比較)

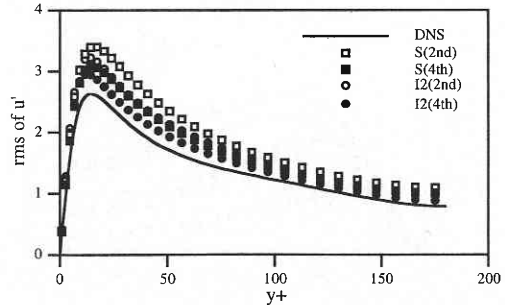


図 7 流れ方向 GS 乱流強度 (差分精度に対する依存性)

研 究 速 報

4.4. フィルタ操作におけるパラメータ依存性

ここでは、(11) 式であらわされるフィルタ操作におけるパラメータ  $\Delta/h$  を変化させることによる解への影響を調べる。case A は表 1 で示したパラメータであり、この値に対して、case B はテストフィルタ操作において  $\tilde{\Delta}/h = \sqrt{6}$  とする。この値を用いた場合高周波数の変動が理想的にカットされることから、この値は差分法によるダイナミック SGS モデルにおいてもっとも頻繁に用いられている。この時、グリッドフィルタ、グリッド・テストフィルタにおけるパラメータ値は表 9 で表される。case C においてはグリッドフィルタ操作において  $\tilde{\Delta}/h = 2$  とする。この値は堀内によりスケール相似則モデルの為に提案された値である。この時、テストフィルタ、グリッド・テストフィルタにおけるパラメータ値は表 9 で表される。

これらの結果を図 10 及び図 11 に示す。S モデルを用いた場合、フィルタ操作のパラメータを変化させることで解が大きく変化することは知られていたが、興味深いことに I2 モデルを用いた場合、このパラメータの変化による解への影響は、今回テストした範囲のパラメータ値については非常に小さいことが解る。

5. 結 論

本研究における解析結果から以下の知見が得られた。

- (1) I1, I2 モデルを用いることで S モデルの欠点である平均流速の対数則領域の過大評価、流れ方向乱流強度の過大評価等が改善された。
- (2) 異なる時間スケールを用いることで導出された I1 モデルと I2 モデルを比較した場合、I2 モデルがより改善された結果を示した。
- (3) 二次精度、四次精度、両場合において S モデルと比較して I2 モデルはより DNS に近い結果を予測した。
- (4) 特に I2 モデルを用いた場合、フィルタ操作におけるパラメータ値に対する依存性が S モデルと比較して小さいことが解った。

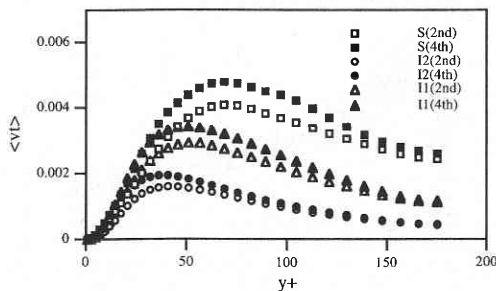


図 8 渦粘性係数の比

表 9 フィルタ操作におけるパラメータ

	$\tilde{\Delta}/h$	$\tilde{\Delta}/h$	$\tilde{\Delta}/h$
case A	$2/\sqrt{3}$	2	$4/\sqrt{3}$
case B	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$
case C	2	$2\sqrt{3}$	4

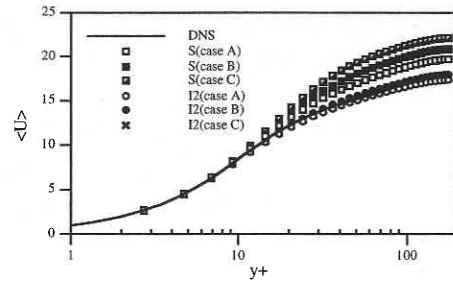


図 10 流れ方向平均流速 (フィルタパラメータに対する依存性)

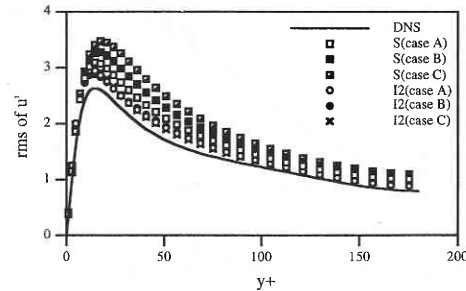


図 11 流れ方向 GS 乱流強度 (フィルタパラメータに対する依存性)

これらの結果から、ダイナミック SGS モデルの適用を考慮した場合、スマゴリンスキーモデルに替わる等方型モデルとして I2 モデルを提案する。

謝 辞

本研究を行うにあたり、森西博士から解析コードを提供して頂いた。また、本研究の一部は平成 9 年度科学研究費補助金 (特別研究員奨励費) の補助を受けた。ここに感謝の意を表す。

(1997 年 10 月 22 日受理)

参 考 文 献

- 1) J. Smagorinsky, Weather Rev. 91 (1963), pp. 99-164.
- 2) J. Bardina et al., Rept. No. TF-19 (1983), Stanford Univ.
- 3) M. Germano et al., Phys. Fluids A3 (1991), pp. 1760-1765.
- 4) A. Yoshizawa et al., Phys. Fluids 8 (1996), pp. 2554-2556.
- 5) 森西, 機論 B 編 62-604 (1996), pp. 4090-4112.
- 6) 谷口ら, 生産研究 49-1 (1997), pp. 11-18.