特 集 11
研 究 速 報

一般座標系における co-located 格子系 LES code の開発

Large Eddy Simulation by Collocation Grids System In Generalized Curvilinear Coordinates

張 会 来*・小 林 敏 雄**・谷 口 伸 行*
Huilai ZHANG, Toshio KOBAYASHI and Nobuyuki TANIGUCHI

1. 緒 言

本論文の目的は，エンジン内シリンダーのような複雑な形状を有する流れ場に対して，有利に適用できる一般座標系を用いたLarge Eddy Simulation（LES）数値解析コードを作成することである．近年，低燃費，低公害と高出力を両立するエンジンの研究が盛んに行われており，このような対象に対してより高精度に定量的な数値解析が適用されつつある．しかし，時間平均に基づくアンサンブル平均したモデルは，本質的にサイクル変動を持つ非定常性の強い筒内乱流を検討できないため，空間平均に基づくLESによる解析が新たな方法として進められつつある[3]．

著者らはこのような背景から，より計算効率の高いLESコードの開発に着目した．一般座標系におけるスタガード格子系LESコードは，非定常計算の精度が高い反面，計算時間，計算機メモリを多く取ることから，大規模非定常流れ計算を行う場合，不経済となる．著者らはこの問題点を避けるために，co-located格子によるLESコードの開発を進めてきた．今回開発したコードでは一般座標系，co-located格子系，有限体積法，LESのSmagorinsky model等を採用しており，時間進行については二次精度Adamas-Bashforth法を用い，圧力解法についてはHSMAC法を採用した．実用性の検証のために，開発したコードを正規直交格子と曲線斜交格子の二種類の座標に適用し，チャンネル乱流のLES解析を行った．その結果，両座標において十分実用可能な精度の結果を得ることができた．

2. 基 礎 方 程 式

本研究においては，Smagorinsky Mode[8] を用いる．非圧縮性Navier-Stokes方程式と連続式にfiltering操作を行うと

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j}=0 \quad \cdots\cdots (2\text{-}1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left|(\nu+\nu_{SGS})\left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j}+\frac{\partial u_j}{\partial u_i}\right)\right|+f_i \cdots (2\text{-}2)$$

が得られる，ここでfは体積外力である．本計算においては，チャネル乱流を考慮して$C_k = 0.094$，$C_s = 0.1$をを採用することにする．Van Driestの減衰関数をC_sに乗じる．

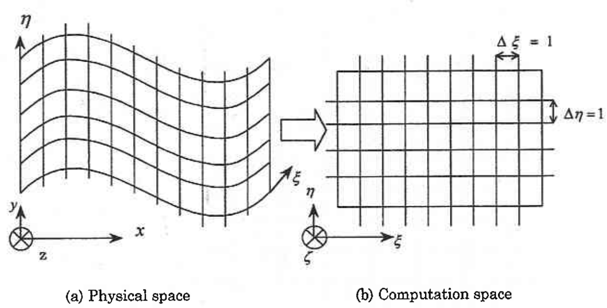
3. 座 標 変 換

複雑な形状をした流れ場を有限体積法で解析する際には，流れ場の形状に適合する計算格子を作る．つまり，物理空間（x, y, z）上で作られた計算格子を等間隔正規直交である計算空間（ξ，η，ζ）上の格子へ変換する必要がある．

観念図としてFig. 1で示す．本報では便宜の為，$\bar{u}_i$はu_iで表示する，変数ϕの一次微分に対する物理空間（x, y, z）と計算空間（ξ，η，ζ）間の変換と逆変換について表示すると，次式のようになる．

$$\frac{\partial f}{\partial x_m}=\frac{\partial \xi_j}{\partial x_m}\frac{\partial f}{\partial \xi_j}, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi_m}=\frac{\partial x_j}{\partial \xi_m}\frac{\partial f}{\partial x_j} \quad \cdots\cdots (3\text{-}1)$$

ここで，物理空間から計算空間への変換Jacobian行列を定義する．



(a) Physical space (b) Computation space

Fig. 1 Coordinate transformation

*東京大学生産技術研究所 第2部
**東京大学国際・産学共同研究センター

$$J = x_\xi y_\eta z_\zeta + x_\eta y_\zeta z_\xi + x_\zeta y_\xi z_\eta - x_\xi y_\zeta z_\eta - x_\eta y_\xi z_\zeta - x_\zeta y_\eta z_\xi \quad \cdots\cdots\cdots(3\text{-}2)$$

式（3-1），式（3-2），を用いることで，以下のように変換係数を求められる．ここで A_{ij} は一般座標系基礎方程式を演算する時に設置した中間係数である．

$$\begin{vmatrix} \xi x & \eta_x & \zeta x \\ \xi y & \eta_y & \zeta y \\ \xi z & \eta_z & \zeta z \end{vmatrix} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta & y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta & y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi \\ x_\zeta z_\eta - x_\eta z_\zeta & x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi & x_\eta z_\xi - x_\xi z_\eta \\ x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta & x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta & x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \end{vmatrix}$$

$$\equiv \frac{1}{J} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}3)$$

反変速度を $F_j = A_{ji} u_i$ $(j = 1, 2, 3)$ と定義すると，計算空間の一次微分は $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{J} A_{ji} \frac{\partial f}{\partial \xi_j}$ となる．この時，$\frac{\partial A_{ji}}{\partial \xi_j} = 0$ を用いることで，有限体積法を用いて離散化するために必要な一次微分保存形は，$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{J} \frac{\partial A_{ji} f}{\partial \xi_j}$ となる．これらの式を用いると，一般座標系における基礎方程式は以下のように与えられる．

$$連続式：\frac{1}{J} \frac{\partial F_j}{\partial \xi_j} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}4)$$

$$運動式：\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial F_j u_i}{\partial \xi_j} = -\frac{1}{J} \frac{\partial A_{ji} P}{\partial \xi_j} + \frac{1}{J} \frac{\partial A_{mk} \phi_{jk}}{\partial \xi_m} + f_i \quad \cdots(3\text{-}5)$$

$$ただし：\phi_{jk} = \left(\nu + \nu_{SGS}\right) \left(\frac{1}{J} \frac{\partial A_{jk} u_i}{\partial \xi_j} + \frac{1}{J} \frac{\partial A_{ji} u_k}{\partial \xi_j} \right) \cdots\cdots(3\text{-}6)$$

4. 差分スキーム：

今回の差分スキームは co-located 格子系に基づき，Fig. 2 に示すように格子の中央点に速度成分 u_i と圧力 P_i を定義して，格子境界に反変速度成分 F_i を配置する．連続の式は F_i より，運動方程式は速度成分 u_i より評価される．差

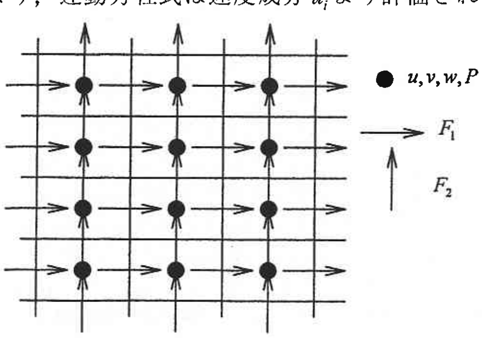


Fig. 2　Collocation Grids System

分と補間の記号の定義については，以下のように定義する．尚，微分演算子 ∂ と差分演算子 δ の違いに注意されたい．

$$\frac{\delta_\eta \phi}{\partial_n \xi_1}\bigg|_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} = \frac{\phi\left(\xi_1 + \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) - \phi\left(\xi_1 - \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right)}{nh_1} \quad \cdots(4\text{-}1)$$

$$\bar{\phi}^{n\xi_1}\Big|_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} = \frac{\phi\left(\xi_1 + \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) + \phi\left(\xi_1 - \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right)}{2} \quad \cdots(4\text{-}2)$$

ここで，計算空間においては $h_1 = \Delta\xi_1 = 1$，$h_2 = \Delta\xi_2 = 1$，$h_3 = \Delta\xi_3 = 1$．今回用いた col-located 格子系に対して，空間二次精度の中心差分スキームを用いる．この時，離散化された基礎式の各項はそれぞれ以下のようにあらわされる．

$$連続式：\frac{1}{J} \frac{\delta_1 F_i}{\delta_1 \xi_i} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4\text{-}3)$$

$$対流項：\frac{1}{2} \frac{\delta_1 F_j \bar{u}_i^{1\xi_j}}{\delta_1 \xi_j} + \frac{1}{2} \overline{F_j \frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_j}}^{1\xi_j} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4\text{-}4)$$

$$圧力項：-\delta_2 \frac{\left(A_{ji} P\right)}{\delta_2 \xi_j} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4\text{-}5)$$

Co-located 格子系における運動エネルギー（速度二乗量）の保存性を保つように[1]，対流項は，発散型と勾配型との混合型とした．圧力項は Control volume 境界上に圧力定義点を設置しておらず，隣りの control volume の圧力を使用する．このような中心差分を用いた場合，非物理的な圧力振動が起こることがある．しかし今回開発したスキームは後述するように，反変速度の計算式に工夫を加えて振動解を解消した．拡散項については，control volume 境界上の一次微分を二次精度の中心差分スキームを用いて離散化する．例えば，境界面 e 点に対して

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_1}\bigg|_e = \left(\frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_1}\right)_e \qquad \frac{\partial u_i}{\partial \xi_2}\bigg|_e = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_2 u_i}{\delta_2 \xi_2}\right) P + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_2 u_i}{\delta_2 \xi_2}\right) E$$

ξ_3 方向も ξ_2 と同じように離散化できる

時間進行については本研究では HSMAC 法を用いている．時間進行は 2 階段に分けて，圧力項 P を新しい時間で評価し（式（4-6)），対流項のみ二次精度の Adams-Bashforth 法を用いる．ここで g は対流項，圧力項，拡散項を含む総 flux を意味する．計算手順は以下の通りである．

$$\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} = g\left(\vec{V}, P^{n+1}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4\text{-}6)$$

① 中間 time step における速度 $\bar{\mathrm{V}}^*$ と反変速度 F_i^* を求める．

$$\vec{V}^* = \vec{V}^n + \Delta t \cdot g\left(\vec{V}^n, P^n\right) \quad \cdots(4\text{-}7)$$

$$F_1^* = \frac{1}{2}\left[\left(A_{ij}u_j^*\right)P + \left(A_{ij}u_j^*\right)_{neib}\right]$$
$$\underbrace{+\frac{1}{2}\Delta t \cdot \left[\delta_2\left(\frac{A_{ji}P^n}{\delta_2\xi_j}\delta_{ij}\right)P + \left(\frac{\delta_2\left(A_{ji}P^n\right)}{\delta_2\xi_j}\delta_{ij}\right)neib\right]}_{A項}$$
$$\underbrace{-\Delta t \,.\, A_{ji}\left(\frac{\delta_1 P^n}{\delta_1\xi_j}\right)\delta_{ij}}_{B項} \quad \cdots\cdots(4\text{-}8)$$

式（4-8）中のAとB項は圧力の解において非物理的な空間的振動を防止するために奇数偶数モードの結びつきを設ける項である．

②圧力p^{n+1}は以下の式で求める．

$$\nabla^2\delta_t P = -\frac{\nabla\cdot\overline{V}^*}{\Delta t}\left(\equiv -{}^{D^*}\!/_{\Delta t}\right) = -\frac{1}{\Delta t J}\frac{\delta_1 F_j}{\delta_1\xi_j} \quad \cdots\cdots(4\text{-}9)$$

$$\frac{\partial\phi^2}{\partial x^2} = \frac{A_{j1}}{J}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\frac{A_{i1}}{J}\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1}\right) = \frac{A_{j1}}{J}\frac{A_{i1}}{J}\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j} + \underbrace{\frac{A_{j1}}{J}\frac{\partial\phi}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\frac{A_{i1}}{J}\right)}_{\approx 0}$$
$$\approx \frac{A_{11}}{J^2}\left[\underbrace{A_{11}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1}\right)}_{\neq 0} + \underbrace{A_{21}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi_2}\right)}_{\approx 0} + \underbrace{A_{31}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi_3}\right)}_{\approx 0}\right]$$
$$\approx \frac{A_{21}}{J^2}\left[\underbrace{A_{11}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1}\right)}_{\approx 0} + \underbrace{A_{21}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi_2}\right)}_{\neq 0} + \underbrace{A_{31}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi_3}\right)}_{\approx 0}\right]$$
$$\approx \frac{A_{31}}{J^2}\left[\underbrace{A_{11}\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1}\right)}_{\approx 0} + \underbrace{A_{21}\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi_2}\right)}_{\approx 0} + \underbrace{A_{31}\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi_3}\right)}_{\neq 0}\right]$$
$$\cdots\cdots(4\text{-}10)$$

ここでδ_tは時間進行ごとの増加量である．式（4-9）については，左辺の2階微分の離散化は2次精度の中心差分で行い，その対角線成分のみを残すと，例えばx方向の2階微分については，式（4-10）のようにあらわされる．この時圧力修正量は式

$$\delta tP \approx \frac{\Omega D^* J^2}{-2A\,.\,\Delta t} \quad \cdots\cdots(4\text{-}11)$$

とする．ただし，

$$A = \left(A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2 + A_{21}^2 + A_{22}^2 + A_{23}^2 + A_{32}^2 + A_{32}^2 + A_{33}^2\right)\ P$$

Ωは緩和係数であり0.8とした．時刻n＋1の圧力Pは近似的に$P^{n+1} = P^n + \delta_t P$で求められる．

③．control volume境界上で連続式を満たすために反変速度の修正量$\delta_t F_i$を求める．$\delta_t F_i$を算出する際には，Co-located格子では，$\delta_t P$は奇数偶数モードの結びつきがあるので，圧力修正量（$\delta_t P$）については，先天的に非物理空間的振動は起きないと考えられる．先ず，control volume境界上の物理速度修正量$\delta_t\vec{V} = \Delta t.\nabla\delta_t P$を求める．つまり，

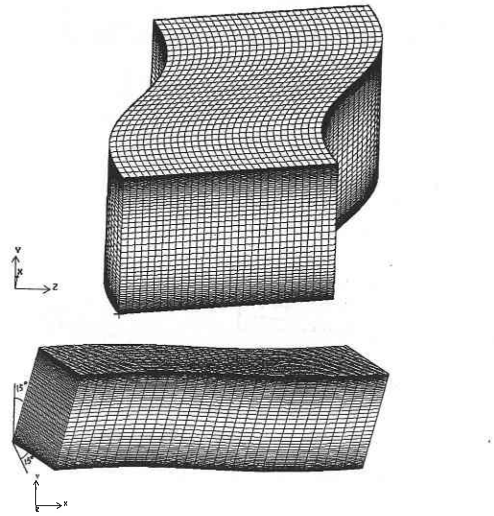


Fig. 3　Curvilinear skew grids for channel flow

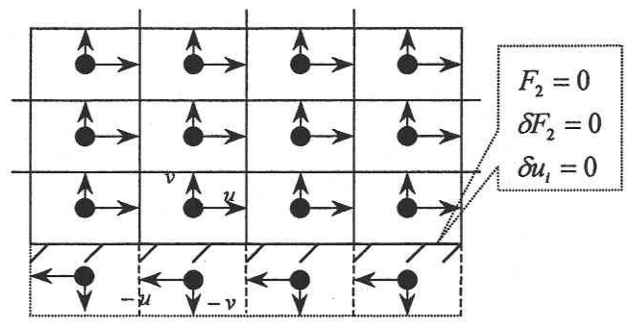


Fig. 4 Wall boundary condition (no slip) in co-located grids system

表1　計算parameter

	格子形状	格子数	Δt^*	助走時間	平均時間
Case A	正規直交	30*38*15	0.0005	35	15
Case B-1	曲線斜交	30*38*15	0.0005	50	15
Case C	曲線斜交	40*65*33	0.0005		

$$\left\{\delta_t u_i = -\frac{\Delta t}{J}\cdot\frac{\delta_1\left(A_{ji}\delta_t P\right)}{\delta_1\xi_j}\right\}_{e,w,n,s,t,b} \quad \cdots\cdots(4\text{-}12)$$

これより$\delta_t F_i = A_{ij}\delta_t u_i$を計算する．

④新しい連続式の残差量を計算する．即ち：

$$D_{new}^* = \frac{1}{J}\frac{\delta_1}{\delta_1\xi_j}\left(F_j^* + \delta_t F_j\right) \leq O(\varepsilon)$$

⑤：②-④を繰り返し，$D_{new} \leq 0.001$となるまで，$\delta_t u_i$と$\delta_t P$を更新する．

⑥：control volume境界上の値$\delta_t u_i$をFig. 2の中央点に補間して，新しい時刻（n＋1）のu_iを算出する．

研　究　速　報

5. Codeの検証，チャネル流れ場の解析

このcodeを検証するために，正規直交格子と曲線斜交格子（Fig. 3）の二つのチャネル流れ場を解析した．

対象とするチャネル流れ場においては，チャネル幅H，流れ方向πH，スパン方向0.5πHとしている．この時，流れ方向の体積外力項には，圧力勾配が陽的に与えられている．流れ方向，スパン方向には，それぞれ周期境界条件を与え，壁面上では滑りなし条件である（Fig. 4）．レイノルズ数はKim[4]らの条件に合わせて，壁面摩擦速度u_τとチャネル幅Hを用いて，無次元化し360を用いている．流れ方向とスパン方向に対して格子は等間隔に，壁面方向は級数比1.15の等比級数を用いて不等間隔に配置する．格子分割数，統計量をとる無次元時間と無次元時間stepをそれぞれ表1に示す．

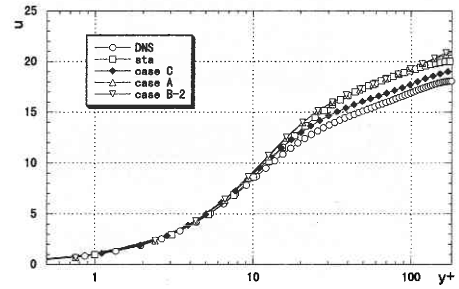


Fig. 5　Main flow velocity profile at Re = 360

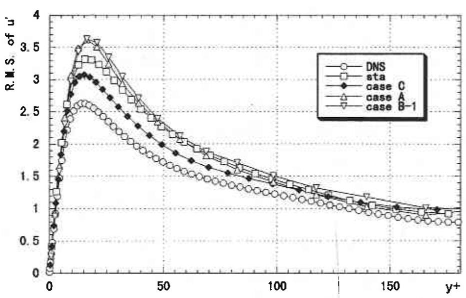


Fig. 6　Intensity of stream wise direction Re = 360

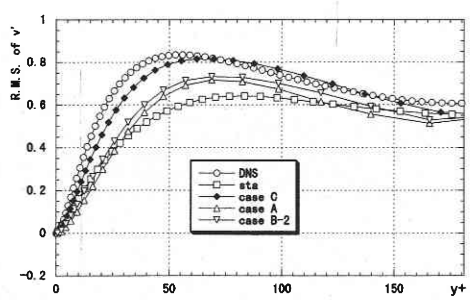


Fig. 7　Intensity of normal-wall wise direction Re = 360

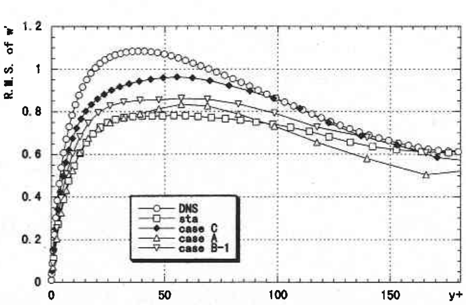


Fig. 8　Intensity of span wise direction Re = 360

6. 計　算　結　果

Fig. 5に主流方向の時間平均速度分布，Fig. 6～Fig. 8に各方向の乱れ強さを順に示す．各時間ステップにおける平均壁面摩擦速度u_τは計算中に1.00 ± 0.02の間で変化した．計算結果はDNSと一致することがわかる．特に壁面近くの平均速度分布（$y^+ < 10$）はDNSと良く一致している．Case AとCase Bはそれぞれ正規直交格子と曲線斜交格子を持つ，解析結果は殆ど一致しており，そのの中心速度分布の偏差については流れ中心部格子の解像度が粗いためと考えられ，Case Cでは同じ格子解像度のstaggered格子系[5]より，その結果が改善されることが分かった．

7. 結　　論

本研究において行った検証計算結果から，開発した一般座標系におけるco-located格子系LESコードが工学的な実用性を有することが確認でき，式（4-8）のA項とB項の修正によりco-located格子系の特有な非物理的な空間振動を防止することが出来た．

8. 謝　　辞

LES計算においては本研究室の坪倉　誠博士，小垣哲也氏から助言を頂いた．ここに感謝の意を表す．

（1997年11月14日受理）

参　考　文　献

1）森西洋平，日本機械学会論文集，62-604，B，4090-4197，4098-4105，4106-4112（1996）．
2）Smagorinsky "General circulation experiments with the primitive equations I The basic experiment". Mon. Weather Rev. 91 (1963), pp. 99-164.
3）内藤　健等，日本機械学会論文集，59-559，B，92-1042（1993）．
4）Kim, J., Moin, P. and Moser, R., (1987). J. Fluid Mech., Vol. 177, pp 133-166.
5）坪倉　誠，博士論文，東京大学，(1997.3).