

# 一般曲線座標系における非圧縮性乱流数値解析に適した差分スキーム

—第 4 報, 座標変換の誤差評価と適切な差分スキームの検証計算—

Proper Finite Difference Schemes for Simulations of Incompressible Turbulent Flow in Generalized Curvilinear Coordinates  
(4 th Report, Error Estimation of Coordinate Transformation and Validation of Proper Finite Schemes)

小 垣 哲 也\*・小 林 敏 雄\*\*・谷 口 伸 行\*

Tetsuya KOGAKI, Toshio KOBAYASHI and Nobuyuki TANIGUCHI

## 1. 緒 言

著者らは, 第 1~3 報<sup>1-3)</sup>において, 座標変換を施した基礎方程式 (連続の式, Navier-Stokes 方程式, 速度の 2 乗量と運動エネルギー  $K$  の輸送方程式) の解析的保存特性が正規直交座標系における基礎方程式系の解析的保存特性と等しくなることを示すとともに, 等間隔正規直交座標系における Staggered 格子系, Regular 格子系, Collocation 格子系における適切な差分スキーム<sup>4-6)</sup>を一般座標系に拡張した。

本報では, まず, 座標変換を施した基礎方程式を導く際に導入した, 変数変換に基づく座標変換の誤差評価を理論的および数値実験的に行う。さらに, 平行平板間内乱流の解析を行い, 既報<sup>2)</sup>で構成した一般座標系における適切な差分スキームを検証する。

## 2. 座標変換の誤差評価

### 2.1 理論的評価

基礎方程式に座標変換を施すと, 速度, 圧力といった従属変数の微分は, 全て等間隔直交座標系である計算座標系  $(\xi, \eta, \zeta)$  における微分となること, 第 1 報<sup>1)</sup>で示された。従って, 離散化のための基本的な任意精度の差分および補間スキームは計算座標系で定義された<sup>2)</sup>。しかし, そこで使用した精度 (次数) という言葉は, あくまでも計算空間での精度 (次数) を意味している。従って, 離散オペレータの物理空間における精度を確認しておくことが重要である。

簡単のため, ある変数  $f$  の 1 次元の 1 階微分  $\partial f/\partial x$  の 2 次精度中心差分を考える。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{f(\xi+1) - f(\xi-1)}{2h_1} + T_1 \dots \dots \dots (1)$$

ここで,  $T_1$  は打ち切り誤差であり, 以下のように評価される<sup>7)</sup>。

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{1}{6} \frac{x_{\xi\xi\xi}}{x_{\xi}} f_x - \frac{1}{2} x_{\xi\xi} f_{xx} - \frac{1}{6} \frac{x_{\xi}}{x_{\xi}} f_{xxx} + \dots \\ &= -\frac{1}{6} \frac{1}{N^2} \frac{q'''}{q'} f_x - \frac{1}{2} \frac{q''}{N^2} f_{xx} - \frac{q'^2}{N^2} f_{xxx} + \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

$q$  は任意の 1 次元格子点分布関数であり, 次のように定義される。

$$x(\xi) \equiv q\left(\frac{\xi}{N}\right), \quad 0 \leq \xi \leq N, \quad 0 \leq x \leq 1 \dots \dots \dots (3)$$

式 (2) 中の右辺第 1, 2 項は格子間隔が不等間隔であるため生じる誤差項であり, メトリックを  $\partial f/\partial x$  の差分スキームと同じ差分式を用いて計算すると第 1 項はゼロになる。第 3 項は等間隔の場合にも同様に現れる誤差項である。式 (2) からわかることは, 格子点の分布関数  $q$  を固定した場合, 格子点数  $N$  の増加に対して, 打ち切り誤差の主要項が全て  $1/N^2$  に比例して減少するという意味で, 式 (1) の 1 階微分離散オペレータは物理空間でも 2 次精度であるということである。4 次精度差分オペレータも同様に評価すると, 打ち切り誤差の主要項は  $1/N^4$  に比例し, 計算空間上で 4 次精度の差分オペレータは物理空間でも 4 次精度である。

多次元における打ち切り誤差は, これらの誤差に加えて格子の非直交性に起因する誤差が新たに現れる。2 次元の場合, 打ち切り誤差  $T_2$  は以下のように評価できる<sup>7)</sup>。

$$T_2 = -\frac{1}{2} x_{\xi\xi} f_{xx} + \frac{1}{2} (y_{\eta\eta} f_{yy} - x_{\xi\xi} f_{xx}) \cot \theta + \dots \dots \dots (4)$$

ここで,  $\theta$  は格子線の交差角である。式 (4) 中の右辺第 1

\*東京大学生産技術研究所 第 2 部

研 究 速 報

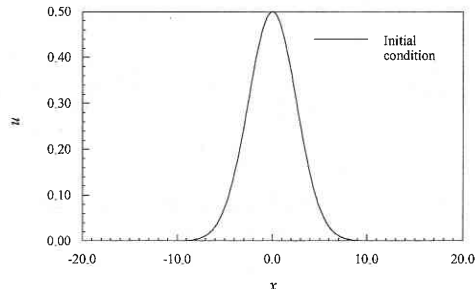


図 1 ベンチマークテストの初期値

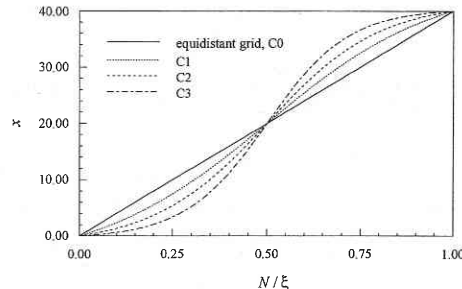
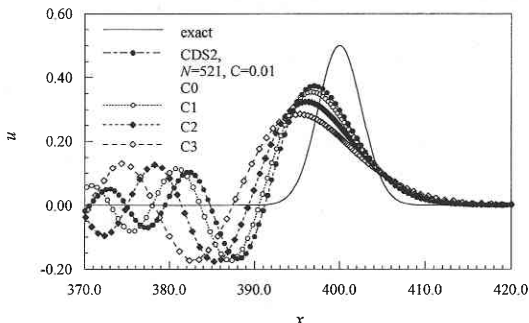
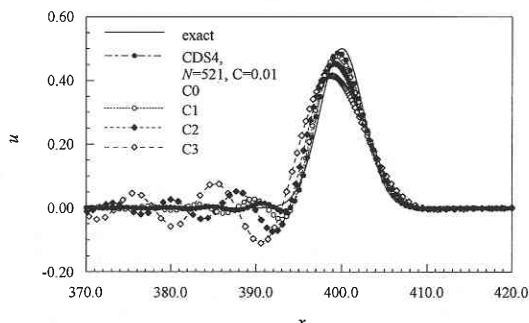


図 2 点分布関数のプロファイル



(a) 2次精度中心差分の場合.



(b) 4次精度中心差分の場合.

図 3 点分布関数の影響

項は式 (2) 中の右辺第 2 項に対応し、格子の不等間隔による誤差であり、式 (4) 中の右辺第 2 項は格子の非直交性により生じる誤差である。この非直交性による誤差項は、 $\cot \theta$  に比例しているため、非直交性が強いところでは注意を要するが、格子の交差角  $\theta$  が  $45^\circ$  以下の場合、格子の不等間隔による誤差よりも小さくなるのが経験的にわかっている<sup>7)</sup>。従って、計算格子の直交性と格子間隔の伸縮比に注意すれば、計算空間で定義された任意精度の離散オペレータは物理空間でもその精度を維持するものと考えられる。

2.2 数値実験の評価

次に、座標変換を伴う差分オペレータの精度を簡単なベンチマークテストで確認する。ここで、取り上げられる問題は、次式で与えられる 1 次元対流方程式である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C_x \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $C_x$  は対流速度であり定数 1 とする。初期値は、ICASE/LARC Workshop on Benchmark Problems in Computational Aeroacoustics<sup>(8)</sup> で定められたものを与える (図 1)。

$$u(x, 0) = 0.5 \exp \left[ - \left( \frac{x}{3} \right)^2 \ln(2) \right] \dots\dots\dots (6)$$

計算領域は  $x = -40 \sim 480$  とし、 $t = 400$  後の波形を厳密

解 (初期値の波形がそのまま流れ方向  $x$  に 400 移動したものと) と比較することにより、一階微分差分スキームの誤差を評価する。1 次元の場合、座標変換の影響は格子の不等間隔のみであり、格子の不等間隔による影響を調査するため、図 2 に示される 4 つの異なる格子点分布を準備した。C0 は等間隔、C1 ~ C3 は不等間隔格子であり、番号が大きくなるほど最大/最小格子幅の比が大きくなり、その結果、隣り合う格子の伸縮率も大きくなる。格子点分布関数には  $\tanh$  を使用している。この格子点分布に基づき、まず、 $-40 < x < 0$  の計算格子を作成し、その格子を流れ方向に周期的に 13 個連結して  $-40 < x < 480$  の計算格子としている。時間進行による誤差の影響をなるべく小さくするため、時間進行法に 4 次精度 Runge-Kutta 法を用い、クーラン数  $C (= C_x \Delta t / \Delta x)$  は十分小さい  $C = 0.01$  としている。対流項の離散化は 2 次精度および 4 次精度中心差分スキーム (CDS2, CDS4) を用いた。座標変換のメトリックとヤコビアンは、対流項の離散化と同じ精度のスキームを利用し計算している。

格子点数  $N$  を 521 と固定し、点分布を変化させたときの影響を図 3 に示す。同じ格子点数でも、格子間隔の伸縮率が大きくなると、誤差が大きくなるのがわかる。格子点数の増加による  $L_2$  ノルムの変化を図 4 に示す。 $L_2$  ノルムを計算する際の積分は、台形則を用いている。等間隔格子の場合、図 4 の両対数グラフの中で、CDS2 および

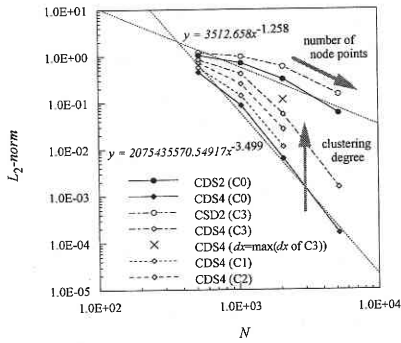


図4 格子点数の増加によるL2ノルムの変化

CDS4はそれぞれ傾きが約-1.3と-3.5の線形関数で近似でき、それぞれほぼ2次精度と4次精度の解が得られていることがわかる(多少、傾きが緩やかなのは、時間積分および境界条件等の誤差に加え、横軸を1オーダーしか変化させていないためであると考えられる)。不等間格子と等間格子の場合を比較すると、誤差の絶対量は大きくなるが、両対数グラフ上で傾きはほぼ同じであるということから、不等間格子でも、格子点数を増加させた時の厳密解への収束性という意味での精度は、等間格子の場合とほぼ等しい。つまり、座標変換を伴う差分スキームは、計算空間の精度が物理空間でもほぼ維持されていることが確認できる。

次に、格子の非直交性の影響を調べるため、図5に示されるような非直交性の異なるS0~S3の格子を準備し、1次元対流問題を2次元で計算した。1次元の場合同様、S0~S3の格子はそれぞれ、流れ方向に13個連結されて一つの計算格子を構成する。格子数の増加に伴う一様ノルムの変化を図6に示す。図6の中には、比較のために1次元計算の結果も一部プロットされている。格子の非直交性が最も強いS3の場合、誤差の絶対量は1次元の等間隔の場合(2次元の等間隔直交格子の場合の結果と等価であると考えられる)よりも大きくなるが、格子の増加に伴う誤差の減少傾向はほぼ同様である。従って、非直交格子の場合でも、座標変換を伴う差分スキームの精度はほぼ維持されていることが確認できた。

### 3. 平行平板間内乱流による検証計算

#### 3.1 計算の概要

第2報で構成したStaggered格子における一般座標系差分スキームの検証として、まず、 $Re = 180$ の平行平板間内乱流の計算を行い、DNSデータ<sup>9)</sup>と比較する。計算格子は直交で壁方向のみが不等間隔であるため、座標変換の影響は壁方向のみである。

計算アルゴリズムにはFractional step法を用い、時間進

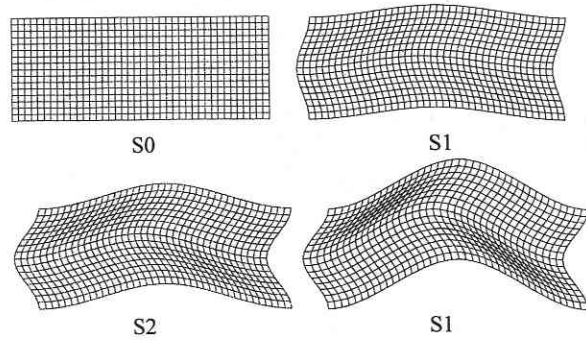


図5 2次元計算の格子

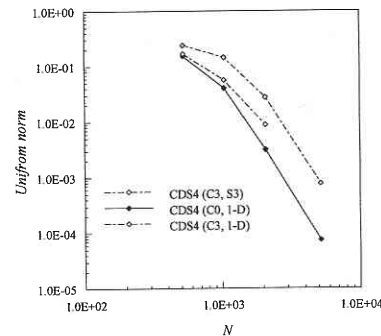


図6 2次元計算の場合の一様ノルム

行法は、対流項を2次精度Adams-Bashforth法、拡散項をCrank-Nicolsonスキームにより行う半陰解法とした。空間離散化は第2報で構成したStaggered格子系における適切な2次精度および4次精度中心差分スキームを使用した。圧力Poisson方程式はBi-CGStab法を用いている。SGSモデルは、入れない場合(NM)、Dynamic SGS model<sup>10)</sup>(DS)およびZang型Dynamic mixed model(DMZ)<sup>11)</sup>を使用した。SGS渦粘性モデル係数は、最小自乗法を用いて算出し<sup>12)</sup>、一様方向に平均化している。陽的なフィルタリング操作は、谷口の手法<sup>13)</sup>に基づき、 $\alpha (= \tilde{C}_s \tilde{\Delta} / (C_s \Delta)) = \beta (= \tilde{\Delta} / \Delta) = 2, \gamma (= \tilde{\Delta} / h) = \sqrt{6}$ とし( $C_s$ :SGS渦粘性モデル係数、 $\Delta$ :フィルタ幅、 $h$ :格子間隔)、今後の一般的な流れ場への適用を考えて(計算空間で)全方向にフィルタリング操作を施すこととする。計算領域および格子点数は $x, y, z$ 方向にそれぞれ、 $\pi \times H \times \pi / 2, 33 \times 65 \times 33$ である。

#### 3.2 計算結果

流れ方向の時間平均速度分布を図7に示す。各SGSモデルにおいて、計算スキームを2次精度から4次精度にすると、対数則に従う領域において傾きは変わらないものの、速度がわずかに減少する傾向にある。図8に各流速のRMS値の分布を示す。RMS値の場合RMS値の場合は、計算を2次精度から4次精度に変更することにより、流れ

## 研 究 速 報

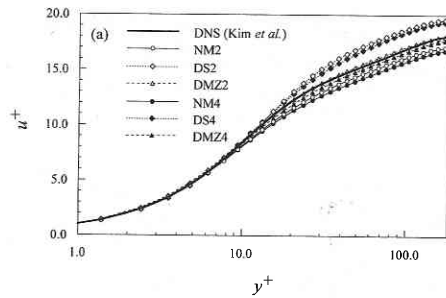


図 7 時間平均流れ方向速度分布

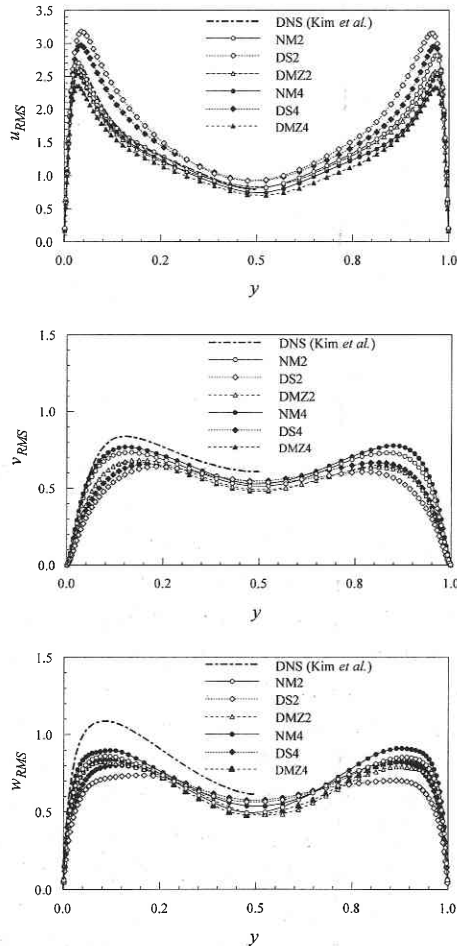


図 8 時間平均乱流強度分布

方向速度の RMS 値  $u_{rms}$  は減少し、壁方向およびスパン方向速度成分の RMS 値  $v_{rms}$ ,  $w_{rms}$  は増加する傾向にある。このような傾向は、ともに正規直交座標系における適切な差分スキームの場合の結果<sup>6)</sup>と一致している。

## 4. 結 論

第 1 報で導入した座標変換方法が実際の非圧縮性流体解析計算に与える影響を調べるため、理論的な誤差評価を行

うとともに簡単なベンチマークテストを行った。その結果、不等間隔非直交座標系 ( $x, y, z$ ) における微分を等間隔直交系 ( $\xi, \eta, \zeta$ ) に座標変換し、等間隔直交系である精度である差分スキームを利用して計算した場合でも、格子点数を増加させた時の厳密解への収束性という意味での精度は維持されることが確認された。

また、第 2 報で構成した一般座標系における適切な差分スキームを平行平板間内乱流の LES 計算に適用した。スキームの精度を上げたときの時間平均流れ方向速度分布、乱れ強度の分布の変化の傾向が、正規直交座標系における適切な差分スキームを用いた計算結果<sup>6)</sup>とほぼ同様であることが確認できた。従って、一般座標系における適切な差分スキームが、正規直交座標系における適切な差分スキーム<sup>4,5)</sup>から適切に一般座標系に拡張されていることを確認できた。

## 謝 辞

数値計算スキームの精度の評価について、Old Dominion 大学 Demuren 博士に助言をいただいた。記して謝意を表す。本研究は、日本学術振興会特別研究員奨励費 (No. 7186) の援助を受けた。

(1997 年 10 月 28 日受理)

## 参 考 文 献

- 1) 小垣哲也・小林敏雄・谷口伸行, 生産研究, 49-7, 303-306 (1997).
- 2) 小垣哲也・小林敏雄・谷口伸行, 生産研究, 49-7, 307-310 (1997).
- 3) 小垣哲也・小林敏雄・谷口伸行, 生産研究, 49-7, 311-313 (1997).
- 4) 森西洋平, 日本機械学会論文集, 62-604, B, 4090-4197 (1996).
- 5) 森西洋平, 日本機械学会論文集, 62-604, B, 4098-4105 (1996).
- 6) 森西洋平, 日本機械学会論文集, 62-604, B, 4106-4112 (1996).
- 7) Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A. and Wayne Mastine, C. (小国力・河村哲也訳), 数値格子生成の基礎と応用, 丸善.
- 8) Hardin, J. C., Ristorcelli, J. R. and Tam, C. K. W., ICASE/LARC Workshop on Benchmark Problems in Computational Aeroacoustics CAA, (1995).
- 9) Kim, J., Moin, P. and Moser, R., J. Fluid Mech., 177, 133-166 (1987).
- 10) Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, W. H., Phys. Fluids, A3 (7), 1760-1765 (1991).
- 11) Zang, Y., Street, R. L. and Koseff, J. R., Phys. Fluids, A5 (12), 3186-3196 (1993).
- 12) Lilly, D. K., Phys. Fluids, A4 (3), 633-635 (1992).
- 13) 谷口伸行, 生産研究, 47-2, 120-123 (1997).