修　士　論　文

Free-form Deformation と 局所的位置合わせを用いた 三次元形状解析

3D Shape Analysis by using Free-Form Deformation and Local Alignment Methods

平成 18 年度

東京大学大学院情報理工学系研究科

電子情報学専攻

学籍番号 56421

真川　純

指導教員　池内 克史　教授

概　要

近年，三次元形状データを取得するデバイスやアラインメント，マージング等のモデリング技術が急激に発展してきており，高精細な三次元形状データを手軽に獲得できるようになってきた．そのため，三次元形状データを用いた形状解析の需要が高まってきている．

今までの三次元形状解析では，特徴点を用いるものが多く，解析対象の知識やユーザの操作が多く必要であった．

そこで本論文では，解析結果の見た目のわかりやすさも考え，特徴点を必要としない FFD(Free-form deformation)を用いた三次元形状解析を行う．FFD を用いた三次元形状解析には物体同士の対応点が必要なため，特徴点が未知の場合に対応点を探し変形を行うための手法について提案する．そして実際に鶏の頭骨に対して解析を行い，本手法の有用性を実証する．

目次

図目次

表目次

第 1 章

はじめに

1.1　研究の背景

人間の視覚の仕組みをコンピュータ上で実現する，いわゆる「コンピュータビジョン」と呼ばれる研究は，人間の知能の解明（大脳の大半は視覚処理に用いられている）という非常に知的好奇心をそそられる研究であるということはもとより，仮想現実感，ロボットビジョン，コンピュータグラフィックスなどその応用も多岐に渡ることから，現在に至るまで非常に盛んに行われてきている．

コンピュータビジョンの研究は,外界の情報を取得できるデバイスの開発,デバイスより取得されたデータの活用,の大きく2つに分けることができる．デジタルカメラに代表される2次元画像の取得デバイスの発展に支えられ,現在まで様々な2次元画像解析手法が提案されてきた．

近年になり3次元形状を取得するデバイス，位置合わせ[1]・統合[2]等のモデリング技術が急激に発展し，高精細な3次元形状データが手軽に獲得できるようになってきている．一般的に3次元形状データは2次元画像よりも情報量が大きいことから，現在では3次元形状データを活用する研究が注目されてきている．

例えば生物学では，遺伝子的には99%の類似性を有している人間と猿でもその形態の違いは一目瞭然であるという事実に基づき，形態による違いから生物種の系統分類を行う，いわゆる「形態学」的手法はまず真っ先に試みられる手法であり，広く注目されている．形態学の 1 つである骨計測法(Osteometry) では，骨標本上の特徴的な部位の間の距離をノギスで計測し，形態の違いを数値化することを行ってきた [3]が，現在ではこのような特徴部位間距離のみでなく，3 次元形状データを用いた物体全体の形状の解析方法の構築が強く望まれている[4].

増田らは日本各地で出土した三角縁神獣鏡の形状データの差から，その親子関係を類推することを行っている[5]．三角縁神獣鏡は，鋳型による複製を繰り返し日本全国に伝播したと考えられており，複製による劣化の継承関係から親子関係を推定することができる．最も親つまりマスターとなった三角縁神獣鏡が発掘された場所を知ることにより，邪馬台国の場所を推測することができる．

重要文化財の保護に対しても，例えば形状の経年変化を解析することにより効果的な補修場所・方法を選択することができ，また補修効果の是非を科

学的・定量的に評価することが可能になる.

1.2　関連研究

三次元形状データは，通常三次元座標系での点群やポリゴンメッシュモデルで与えられる．しかし，それらをそのままの形で用いて三次元形状解析をおこなうのは非常に難しい．そこで，通常は三次元形状データを別の表現系で表現し，解析を行っていくこととなる.

1.2.1　微分幾何を用いた表現

三次元形状を表現するための表現系のひとつとして法線や曲率を用いるものがある. 通常, ポリゴンメッシュモデル上では微分演算は可能ではないが, 近似的に法線や曲率を計算する方法が提案されている．法線・曲率を用いて形状を表現する方法は大きく分けて 3 つある．1 番目の手法は，三次元データ上の特徴点，または特徴点からなる曲線を抽出する方法である．例えば, ガウス曲率や平均曲率０となる等値線や umbilic point と呼ばれるすべての方向で曲率が同じになる点，曲率の変化が 0 となるいわゆる尾根・峰に対応する線などが提案されている[6]. ただこの方法では物体の特徴的な部分の情報のみしか利用できないと言う欠点がある.

2 番目の手法は，法線の向きの出現頻度を利用した手法である．例えば Extended Gaussian Image(EGI)[7]と呼ばれる手法では，物体表面上ある向きの法線が出現する頻度を球面上に表現することで，物体形状を表現する．例えば, 平面は球面上の 1 点に, 円柱では球面のある大円状上にピークが現れる. この方法は，閉じた凸物体のみしか区別することができず，一般の物体の解析には不十分である．EGI には様々な変種[8]や Zernike Moment[9]，いずれも任意形状の物体の解析には不十分である.

3 番目の手法は, これらの情報を改めて統一的な座標(主に球面)で表現する方法である．例えば，Spherical Attribute Image(SAI)法[10]では，物体と球面との間の単射な写像を Deformable Surface の手法を用いて構築し, Simplex Angle と呼ばれる曲率の変種を計算し，この写像を用いて球面へマッピングすることで物体の形状を表現している．Simplex Angle がマッピングされた球面を SAI と呼ぶ．ちなみに写像が全射でないのは，球面と同相でない物体でも表現可能にするためである．1. SAI は並進・回転・スケーリングに不変である

こと，2. SAI から元の物体への復元が可能であるというという良い性質があり，SAI 同士の比較により任意形状の比較をすることができるというメリットがある．ただし，本手法では，写像の構築の結果により適切な SAI が得られない，あるモデルから生成された SAI とそのモデルの一部がかけたモデルから生成された SAI が, 場合により大きく異なってしまうという問題がある．

1.2.2　局所的な点情報を用いた表現

前述した微分幾何に基づく表現は，その計算法の性質上誤差に弱いといわれている．その問題を解消しつつ注目点周りの形状の局所的特徴を表現する方法として Spin Image[11]がある．

Spin Image はある注目点の近傍の点位置関係を法線に垂直な方向αと法線方向βで表し，その 2 つの方向に関して点の数で作成されたヒストグラムのことを指す(図 1.1).

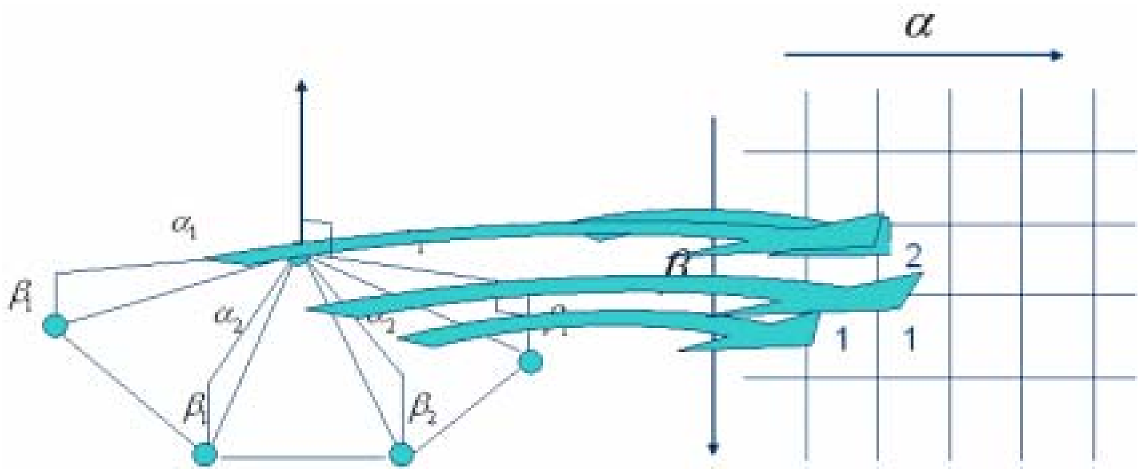


図 1.1:Spin Image

Spin Image 同士の相関を取ることにより，近傍形状の類似度を計算することができ，物体認識などを行うことができる[12][13].

Spin Image では法線を用いて座標系を決めているため，並進・回転に不変であるという特徴はある．ただしスケールに関しては不変ではない．Spin Image は，局所的な形状の違いを比較するのが主な目的であり，3 次元距離画

像から，対象物体の位置・姿勢を決定する以外の，本研究で対象とする形状解析に向く表現とは言いがたい．

1.2.3　変形による表現

別の表現系として，物体形状の変形・比較によって三次元形状を表現する手法がある．そのような手法として Free-Form Deformation(FFD)[14]を用いる手法がある．FFD では物体を中に含むような制御格子点群をつくり，その制御格子点に囲まれた空間をひとつの座標系とする．制御格子点を動かすことで中の座標系を歪め，中にある物体も一緒に変形させる手法である．

Mochimaru らはこの FFD を用いて人の足の形状分布を求める研究を行った[15][16]. 別の 2 つの物体が同じになるような変形を与える制御格子点の動きを求めることで，その制御格子点の動きは 2 つの物体の類似度を表す表現系とみなすことができる．この表現法は物体が 1 つしかない場合には用いることができないが，似たような形状をした物体群を解析したい場合には有効な手法である．しかし，この手法は解析対象の特徴点の抽出をあらかじめ行っておく必要があり，解析対象の知識が不可欠である．

1.3　本研究の目的

本研究のさまざまな用途に対して適用可能な三次元形状解析手法の構築を目指している．本研究において三次元形状解析の対象とする物体は，図 1.2 に示すように質的には同一の物体（どちらも鶏の頭骨）ではあるが，大きさ・形など量的には同一でない物体の比較を対象とする．また，骨計測法など，三次元形状解析においては大量のデータを扱う必要があるためできる限りユーザの補助を必要としない手法の構築を目指す．ただし，形状解析は一種のデータマイニングと言えるべき側面，つまりその意味付けには人間の知識の導入をある程度必要とするため，解析結果の可視化が容易であることや，知識導入が容易であることも考慮する必要がある．

前述した FFD を用いた手法では FFD の結果の格子点の動きの和をとり，その値を物体間の類似度としたが，FFD による制御格子点の動きは形状の差異そのものを表現している．また，制御格子点の数やサンプリング点の数を変えることで大まかな形状誤差から細かな形状誤差まで，解析目的に合わせて多様的な使い方が可能である. また, その他の座標系への変換を伴わずに,

直接世界座標系で比較を行うことができるという FFD の性質は差異の可視化においては他の手法にはない優れた性質である.

しかし，前述したとおり，従来の手法では解剖学的観点から得られた特徴点を用いて行っていた．そのような解剖学的知識を用いることができることはまれであり，できたとしても，解析対象物の数が多いと，特徴点を抽出することは非常に手間がかかり，この手法の導入は容易ではない.

以上のことから, 本研究では特徴点を必要としない FFD による三次元形状解析手法として，変形によって近づけるべき点である対応点を推定しながら変形させていく Iterative Closest Point FFD(ICP-FFD)によって物体間の形状の差異を表現する手法を提案する．また，局所的位置合わせを組み合わせることで,形状の差異の大きさに対してよりロバストな手法を提案する.そして，実際に鶏の頭骨の解析を通じてその手法の有用性を検証する.

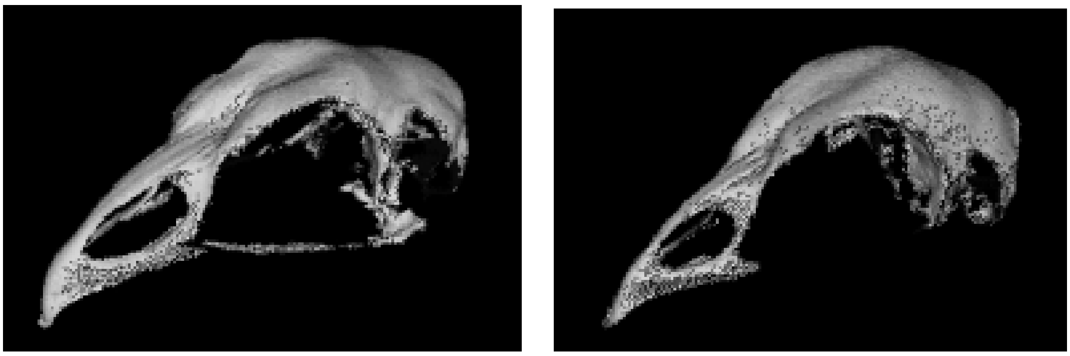


図 1.2:鶏の頭骨(左:軍鶏，右:小軍鶏)

1.4　本論文の構成

以下に本論文の構成を示す.
第 1 章では本研究の背景と関連研究，本研究の目的，提案手法の概要について述べた.
第 2 章では，本研究で用いる FFD の変形の手法について説明し，それを用いた三次元形状解析手法について述べる.
第 3 章では，位置合わせ手法と局所的位置合わせについて説明する.
第 4 章では, 本研究の提案手法である局所的位置合わせを用いた FFD について説明する.

第 5 章では提案手法により鶏の頭骨の形状比較を行い，その結果の解析を行う．
第 6 章で研究についてまとめ，今後の課題について述べる．

第 2 章

Free-Form Deformation

2.1　はじめに

Free-Form Deformation はコンピュータグラフィックスにおける変形の手法である．コンピュータグラフィックの変形は，アニメーションやシミュレーション，製品設計などさまざまな用途に利用されている．

本章では，最初に FFD の定義とその性質について説明する．次に FFD を利用して 2 つの物体の形状を比較する方法について説明し, 最後に FFD を利用した三次元形状解析の方法について説明する．

2.2　Free-form Deformation による変形

2.2.1　Free-Form Deformation の定義

FFD はコンピュータグラフィックスで三次元形状データを変形させるための手法である．三次元座標系で表されている三次元形状データを，座標系を変形させることにより中のデータも一緒に変形させることができる．この手法を使うことにより，三次元形状を滑らかに変形させることができる(図 2.1). なおこの図は，簡単のために二次元で行った例である．

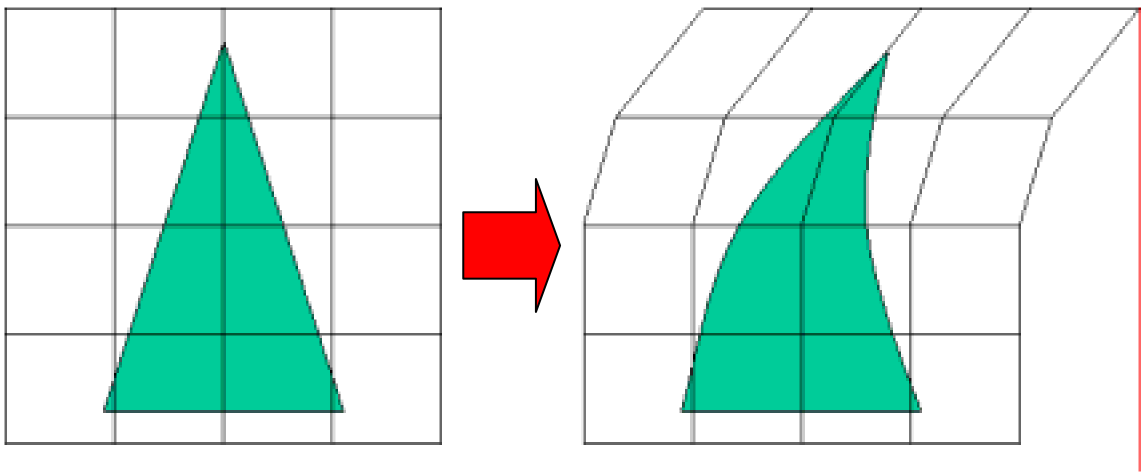


図 2.1:Free-form Deformation による変形

FFD の変形について説明する．ある世界座標系の中に，変形させたい場所

を含むような直方体を作る．直方体の頂点のひとつが世界座標系で$\mathbf{X}_0$，その頂点から伸びる直方体の辺がそれぞれ$\mathbf{S}$，$\mathbf{T}$，$\mathbf{U}$であるとき，直方体の内部の点$\mathbf{X}$は次のように表すことができる．

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + s\mathbf{S} + t\mathbf{T} + u\mathbf{U} \tag{2.1}$$

ただし，s，t，uはそれぞれ，0<s<1，0<t<1，0<u<1 である．この(s,t,u)で表される座標系を FFD 座標系と呼ぶ．このs，t，uは$\mathbf{X}$から次のように求めることができる．

$$\begin{gathered} s = \frac{\mathbf{T}\times\mathbf{U}\cdot(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)}{\mathbf{T}\times\mathbf{U}\cdot\mathbf{S}} \\ t = \frac{\mathbf{S}\times\mathbf{U}\cdot(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)}{\mathbf{S}\times\mathbf{U}\cdot\mathbf{T}} \\ s = \frac{\mathbf{S}\times\mathbf{T}\cdot(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)}{\mathbf{S}\times\mathbf{T}\cdot\mathbf{U}} \end{gathered} \tag{2.2}$$

次に，制御格子点群を設置する．制御格子点はs，t，u軸方向にそれぞれ均等に配置され，それぞれ$l+1$，$m+1$，$n+1$個の制御格子点があるとするとそれぞれの制御格子点の座標は,

$$\mathbf{P}_{ijk} = \mathbf{X}_0 + \frac{i}{l}\mathbf{S} + \frac{j}{m}\mathbf{T} + \frac{l}{n}\mathbf{U} \tag{2.3}$$

で表される．$\mathbf{P}_{ijk}$は各軸方向にそれぞれi，j，k番目の制御格子点である．

この制御点を動かしたとき，FFD 座標系も同時に変形される．この変形は制御格子点を制御点とする Bezier 曲線を基底とした区間多項式が用いられる．

　n+1 個の制御点$\mathbf{P}_0,\cdots\mathbf{P}_n$があるとき，Bezier 曲線は制御点を用いて次の式で表される．

$$\mathbf{R}(t)=\sum_{i=0}^{n}B_i^n(t)\mathbf{P}_i \tag{2.4}$$

この B_i^n は Bernstein 多項式と呼ばれるもので，

$$B_i^n(t)=\frac{n!}{(n-i)!i!}t^i(1-t)^{n-i} \tag{2.5}$$

で定義される．t は定義域[0,1]の媒介変数である．このとき，n は Bezier 曲線の次数と呼ばれ，次数が高いほど，すなわち制御点が多いほど複雑な曲線を作ることができる．

これにより，移動後の制御格子点の座標 $\mathbf{P}_{ijk}$ から，FFD 座標系の内部の点 $\mathbf{X}=(s,t,u)$ の，変形後の世界座標系での座標 $\mathbf{X}_{ffd}$ は

$$\mathbf{X}_{ffd}=\sum_i\binom{l}{i}(1-s)^{l-i}s^i\left(\sum_j\binom{m}{j}(1-t)^{m-j}t^j\left(\sum_k\binom{n}{k}(1-u)^{n-k}u^k\mathbf{P}_{ijk}\right)\right) \tag{2.6}$$

で表される．

2.2.2　Free-Form Deformation のパラメトリック曲面の変形

今，FFD 座標系の内部の点の移動について説明したが，FFD の変形はパラメトリック曲線に対しても有効な手法である．世界座標系で，パラメトリック曲面の式が

$$\begin{aligned}x&=f(\alpha,\beta)\\y&=g(\alpha,\beta)\\z&=h(\alpha,\beta)\end{aligned} \tag{2.7}$$

で与えられていて，FFD による変形が，

$$\mathbf{X}_{ffd} = \mathbf{X}(x, y, z) \tag{2.8}$$

で与えられているとき，FFD による変形後のパラメトリック曲面は

$$\mathbf{X}_{ffd}(\alpha, \beta) = \mathbf{X}(f(\alpha, \beta), g(\alpha, \beta), h(\alpha, \beta)) \tag{2.9}$$

で表すことができる．これは，変形前にパラメトリック曲面で表されていた曲面は, FFD による変形の後でもパラメトリック曲面で表現できることを意味している.

2.2.2 Free-Form Deformation の連続的変形

FFD は，境界面での微分の連続性を保持することで 2 つ以上の FFD をつなげて利用することができる．パラメトリック曲面を用いてその連続性について述べる.

パラメトリック曲面を

$$(s, t, u) = (s(v, w), t(v, w), u(v, w)) \tag{2.10}$$

で表す．また，2 つの FFD の変形が $\mathbf{X}_1(s_1, t_1, u_1)$ と $\mathbf{X}_2(s_2, t_2, u_2)$ で表されていて，2 つの FFD の境界面を $s_1 = s_2 = 0$ で共有しているとき 1 階微分は次の式で表される.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{X}_1(v, w)}{\partial v} &= \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v} \\
\frac{\partial \mathbf{X}_1(v, w)}{\partial w} &= \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial w} + \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial w} + \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

このうち，$\frac{\partial s}{\partial v}$，$\frac{\partial t}{\partial v}$，$\frac{\partial u}{\partial v}$，$\frac{\partial s}{\partial w}$，$\frac{\partial t}{\partial w}$，$\frac{\partial u}{\partial w}$ は変形に依存する項である．よって，1 階微分が連続であるための条件は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{X}_1(0,t,u)}{\partial s} &= \frac{\partial \mathbf{X}_2(0,t,u)}{\partial s} \\
\frac{\partial \mathbf{X}_1(0,t,u)}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{X}_2(0,t,u)}{\partial t} \\
\frac{\partial \mathbf{X}_1(0,t,u)}{\partial u} &= \frac{\partial \mathbf{X}_2(0,t,u)}{\partial u}
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

で表される．これは，境界面$s_1 = s_2 = 0$において制御格子点が共有されていれば成り立つ．

2.3　Free-form Deformation を用いた三次元形状解析

Mochimaru[15]らはこの FFD を用いて足の形状分布を調べる研究を行った. ここで, FFD は 2 つの物体間の形状の差異を表現するために用いられる.

2.3.1　Free-Form Deformation を用いた形状比較

2.3.1.1　特徴点を用いた三次元モデル作成

まず物体の解剖学的な知見により特徴点を設定する．その特徴点の三次元位置を計測する．三次元位置の計測は物体の特徴点に印をうち，その点の位置情報をレーザーレンジセンサにより測定する手法や，まずレーザーレンジセンサによって物体全体の三次元モデルを作っておいてその中から特徴点にあたる場所を抽出するなどの手法がある．

2.3.1.2　特徴点を用いた位置合わせ

三次元モデルを作成したら，次にそのデータの位置合わせを行う．Kouchi[17]らは物体の特徴点のうち特定の 3 点 A，B，C を選び，線分 AB の中点を原点とした．そして，三角形 ABC を含む平面を XY 平面，直線 AB を Y 軸と定めた．残りの X 軸，Z 軸はこれらから求めることができる．特徴点を用いて座標系を設定することで同じ座標系に位置合わせを行っている．

鎌倉[18]らは特徴点 3 点を用いて次のように位置合わせを行っている．物体が 2 つあり，それぞれの特徴点 3 点の座標が$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$と$(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)$で表されているとする．このとき，特徴点同士の 2 点間の二乗距離の平均が最小になるような回転行列$\mathbf{R}$，並進行列$\mathbf{t}$，拡大縮小変数cを求める．この問題は

absolute orientation problem[19]と呼ばれ, 次のように求めることができる[20].
　二乗距離の平均は,

$$e^2(\mathbf{R},\mathbf{t},c)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\|\mathbf{y}_i-(c\mathbf{R}\mathbf{x}_i+\mathbf{t})\right\| \tag{2.13}$$

で表される．この式を最小化するためには以下のような方程式を用いる.

$$\mathbf{R}=\mathbf{USV}^T \tag{2.14}$$

$$\mathbf{t}=\boldsymbol{\mu}_y-c\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}_x \tag{2.15}$$

$$c=\frac{1}{\sigma_x^2}tr(\mathbf{DS}) \tag{2.16}$$

$$\frac{1}{\sigma_x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\|\mathbf{x}_i-\boldsymbol{\mu}_x\right\|^2 \tag{2.17}$$

$$\frac{1}{\sigma_y^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\|\mathbf{y}_i-\boldsymbol{\mu}_y\right\|^2 \tag{2.18}$$

ここで，$\boldsymbol{\mu}_x$ と $\boldsymbol{\mu}_y$ はそれぞれ $\mathbf{x}_i$，$\mathbf{y}_i$ の平均ベクトル，$\mathbf{UDV}^T$ は $\mathbf{x}_i$ と $\mathbf{y}_i$ の共分散行列を特異値分解したもの，$tr(\mathbf{A})$ は $\mathbf{A}$ の対角成分の和を表している．$\mathbf{S}$ は以下のようにして決まる.

$$\mathbf{S}=\begin{cases}\mathbf{I} & if\ \det(\sum_{xy}) \geq 0\\ diag(1,1,\cdots,1,-1) & if\ \det(\sum_{xy}) < 0\end{cases} \tag{2.19}$$

これにより得られた $\mathbf{R}$，$\mathbf{t}$，c により $\mathbf{x}_i$ を持つ物体に対して座標変換

$$\mathbf{x}'_i=c\mathbf{R}\mathbf{x}_i+\mathbf{t} \tag{2.20}$$

を行うことで **x** を **y** に位置合わせすることができる．

　ある基準物体を一つ設定し，他のすべての物体の座標系をその基準物体の座標系にあわせることですべての物体の位置合わせを行っている．

2.3.1.3　特徴点を用いた Free-Form Deformation による形状比較

　次に，FFD を用いた変形により 2 つの同一でない物体形状を一致させることを考える．モデルの作成に用いられた特徴点は，解剖学的な知見により得られた点であるため，それらの特徴点は 2 つの物体間において一対一の対応をとることができる．そのため，2 つの物体形状を一致させるように変形するということは，変形により同じ位置を表す特徴点同士が同じ位置になるということによって実現される．
このとき，一致させる特徴点よりも制御格子点の方が多いため変形は一意に決まらない．そこで，2 つの物体形状の差異の大きさは，一致させるために必要な最小の変形によって表されると考えられるために評価関数が最小となるような変形を求める．評価関数としては，各制御格子点の移動距離の和が使われている．

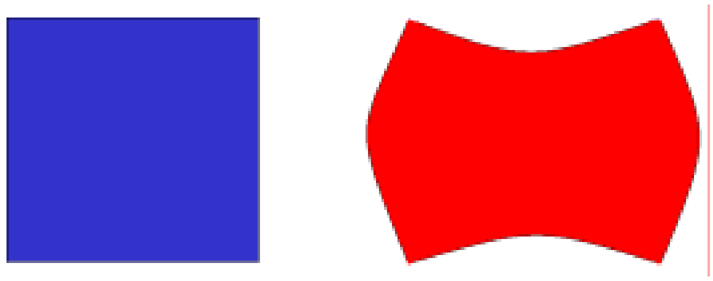
　これにより得られた制御格子点の動きによって 2 つの物体の形状の差異が表されており(図 2.2)，また各制御格子点の動きの大きさの和によって，2 つの形状の類似度が求められる．

2.3.2　多変量解析

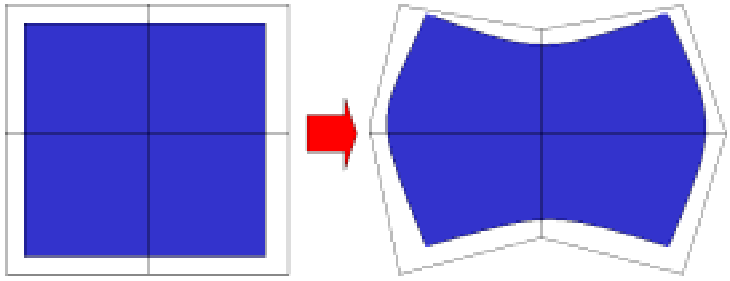
　前述した方法で，FFD を用いて 2 つの物体間の形状の差異を表現したが，これをすべての組み合わせで求めたとしても制御格子点の三倍の変数が得られ，次元数が大きすぎるためそのまま解析を行うのは非常に困難である．そこで，解析においてはデータの縮約をすることを考える．そのための手法を説明していく．

2.3.2.1　多次元尺度構成法

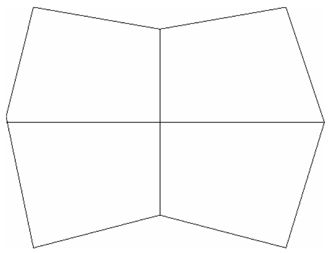
　この手法は各データ間の類似関係，非類似関係が与えられているときに用いられる手法で，類似した対象同士は近くに，類似してない対象同士は遠くに配置するような分布を求める手法である．その分布は以下によって求められる．



(a)



(b)



(c)

図 2.2:FFD による形状比較

$\mathbf{I}-\dfrac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n}$ は中心化行列と呼ばれ，この行列を行列にかけることを中心化と呼ばれる．ただし，n は行列のランクで，$\mathbf{1}$ は $(1,1,\cdots,1)$ である．中心化された行列は列の和が 0 となる．

データの個数が M 個あり，それぞれ N 次元のデータがあるとき，$M\times N$ 次元の座標データの距離の二乗行列 $\mathbf{D}^2$ は，

$$\mathbf{D}^2 = diag(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)\mathbf{1}\mathbf{1}^T - 2\mathbf{X}\mathbf{X}^T + \mathbf{1}\mathbf{1}^T diag(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) \tag{2.21}$$

で与えられる．

距離の二乗行列である $\mathbf{D}^2$ が与えられたとき両側から中心化行列をかける演算をヤング・ハウスホルダー変換といい，

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= -\frac{1}{2}(\mathbf{I}-\frac{\mathbf{11}^T}{n})\mathbf{D}^2(\mathbf{I}-\frac{\mathbf{11}^T}{n}) \\ &= (\mathbf{I}-\frac{\mathbf{11}^T}{n})\mathbf{XX}^T(\mathbf{I}-\frac{\mathbf{11}^T}{n}) \\ &= \mathbf{X}^*\mathbf{X}^{*T}\end{aligned} \tag{2.22}$$

である．ただし，$\mathbf{X}^*$ は $\mathbf{X}$ を中心化したベクトルである．このことから，中心化された座標行列 $\mathbf{X}^*$ は距離の二乗行列 $\mathbf{D}^2$ にヤング・ハウスホルダー変換を行った行列 $\mathbf{P}$ をスペクトル分解することにより得られることがわかる．

データの個数が N 個あり，それぞれのデータ間の距離の二乗とみなせる非類似度行列 $\mathbf{S}$ が与えられたとき，$\mathbf{S}$ にヤング・ハウスホルダー変換を行った行列 $\mathbf{P}$ を直行行列 $\mathbf{T}$ によりスペクトル分解をすると，

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{2}(\mathbf{I}-\frac{\mathbf{11}^T}{n})\mathbf{S}^2(\mathbf{I}-\frac{\mathbf{11}^T}{n}) = \mathbf{T\Lambda\ T^T} \tag{2.23}$$

となる．対角行列 $\mathbf{\Lambda}$ の正固有値は高々 $n-1$ 個である．$\mathbf{\Lambda}$ 固有値の大きい順に r 個の要素を取り出し，他を 0 とした対角行列を $\mathbf{\Lambda}_r$，取り出された固有値に対応する固有ベクトルを並べた行列を $\mathbf{T}_r$ とし，$\mathbf{X}_r = \mathbf{T}_r\mathbf{\Lambda}_r^{\frac{1}{2}}$ とおくと，

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{T}_r\mathbf{\Lambda}_r\mathbf{T}_r{}^T = \mathbf{X}_r\mathbf{X}_r{}^T \tag{2.24}$$

となる．これは

$$tr((\mathbf{P}-\mathbf{X}_r\mathbf{X}_r)^2) \tag{2.25}$$

の意味で，最小二乗法と同値である．この $\mathbf{X}_r$ を r 次元における対象の布置としたものが多次元尺度構成法による解である．正の固有値の全体に対する

割合がその固有ベクトルの寄与率であり，寄与率が大きいものから選ぶことによって低次元で物体の分布をよく表すことができる．

FFD の制御格子点の動きの二乗和を物体同士の非類似度と定めることで FFD の結果に対して多次元尺度法による分布を定めることができる．

2.3.2.2 主成分分析

主成分分析は，互いに相関関係を持つ変数を縮約し，より少ない変数で多くの情報量を記述する手法である．それでは以下で主成分分析の計算方法について述べる．

データの個数が M 個あり，それぞれ N 次元のデータをもっているとする．i 番目のデータの変数を次のように表すこととする．

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})$$

で表すとき，その平均 $\overline{m}$ は

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{m}} &= (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_N}) \\ &= (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{i1}, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{i2}, \cdots, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{iN})\end{aligned} \tag{2.26}$$

で表される．次に共分散行列を求める．共分散行列 $\mathbf{S}$ は

$$\mathbf{S} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \tag{2.27}$$

によって計算される．ただし，

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} - \overline{x_1} & x_{12} - \overline{x_1} & \cdots & x_{1M} - \overline{x_1} \\ x_{21} - \overline{x_1} & x_{22} - \overline{x_1} & \cdots & x_{2M} - \overline{x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} - \overline{x_1} & x_{N2} - \overline{x_N} & \cdots & x_{NM} - \overline{x_N} \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

である．

この共分散行列から固有値λ_1，λ_2，…，λ_Nと固有ベクトル$\begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ \vdots \\ w_{1M} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} w_{21} \\ w_{22} \\ \vdots \\ w_{2M} \end{pmatrix}$，

…，$\begin{pmatrix} w_{N1} \\ w_{N2} \\ \vdots \\ w_{NM} \end{pmatrix}$が求まる．ただし，$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_3$とする．任意のデータ$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix}$は

固有ベクトルの線形和で表すことができる．このとき$\begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ \vdots \\ w_{1M} \end{pmatrix}$を第一主成分，

$\begin{pmatrix} w_{21} \\ w_{22} \\ \vdots \\ w_{2M} \end{pmatrix}$を第二主成分，$\begin{pmatrix} w_{i1} \\ w_{i2} \\ \vdots \\ w_{iM} \end{pmatrix}$を第$i$主成分と呼び，第一主成分のベクトル方向はデータの分散が最も大きい方向となっている．以下順番にそれまでのベクトルに直行する中で最も分散が大きい方向のベクトルになっており，固有値の和に対する割合がその固有ベクトルが分布に対して持つ寄与率となっている．寄与率の高い軸を変数の軸とすることにより，少ない変数でより大きな情報を扱うことができる．

例えば基準物体を一つ設定し，それに対する FFD による制御格子点の動きを変数とすることで主成分分析を利用した解析を用いることができる．

2.3.2.3　階層クラスタ分析

階層クラスタ分析は複数のデータが与えられたときに似ているもの同士をクラスタリングしていくことで樹形図をつくる手法である．その方法は以下のような手順で行われる．

N 個の対象からなるデータが与えられたとき，1 個の対象だけを含む N 個のクラスタがある初期状態をつくる．そして，すべてのクラスタ間距離 $D(C_i, C_j)$ を計算し, その値が最小になるような C_i と C_j を新たにクラスタリングする．それを逐次的に繰り返し，最後の一つになるまで繰り返すことで樹形図を作ることができる．ここで，$D(C_i, C_j)$ に用いられる関数をいくつか紹介する．

最短距離法

$$D(C_i, C_j) = \min_{x_1 \in C_i, x_2 \in C_j} D(x_1, x_2) \tag{2.29}$$

最長距離法

$$D(C_i, C_j) = \max_{x_1 \in C_i, x_2 \in C_j} D(x_1, x_2) \tag{2.30}$$

群平均法

$$D(C_i, C_j) = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{x_1 \in C_i} \sum_{x_2 \in C_j} D(x_1, x_2) \tag{2.31}$$

ウォード法

$$D(C_i, C_j) = E(C_i \cup C_j) - E(C_i) - E(C_j) \tag{2.32}$$

ただし，$E(C_i) = \sum_{x \in C_i} (D(x, c_i))^2$ である．ウォード法は，各対象からその対象を含むクラスタのセントロイドまでの距離の二乗和を最小とする関数である．最短距離法，最長距離法，群平均法に関しては任意の対象間距離 $D(x_i, x_j)$ が与えられている場合に解くことができる．ウォード法では対象が数値ベクトルで与えられている場合にのみ適用できる．

FFD による制御格子点の移動距離の和を非類似度として用いることで最

短距離法，最長距離法，群平均法による階層クラスタ解析を，FFD による制御格子点の移動ベクトルをデータとして用いることでウォード法を利用した階層クラスタ解析を適用できる．

第３章

局所的位置合わせ

3.1　はじめに

近年，物体の三次元データを取得するのにレーザーセンサがよく用いられている．レーザーセンサとは，レーザーを出し，物体に跳ね返って戻ってくるまでの時間や三角距離の原理により物体までの距離を測り物体の距離画像を測定するための装置である．しかし，一度の計測ではある可視範囲内にある可視部分しか計測することができない．そのため，物体の三次元モデルを作成するためにはいろいろな方向からレーザーセンサで計測をする必要がある．しかし，いろいろな方向から計測された距離画像はそれぞれ別の座標系で表されているため，同じ座標系に位置合わせする必要がある．この処理のことを Alignment という．三次元データの座標変換は計測データの性質上，剛体変換，つまり回転，平行移動によって行うことができる．位置合わせによく使われる手法として ICP-Alignment(Iterative Closest Point Alignment)[1][21][22]があげられる．

しかし，形状比較など形状に個体差があるものに用いる場合には，剛体変換だけでは不十分である．そこで，用いられる手法として局所的位置合わせがある．局所的位置合わせとは，誤差の大きい部分などのデータの一部を他のデータと切り離しそれぞれの部分ごとに位置合わせをすることで，形状に個体差がある場合でも近づけることができる．

3.2　位置合わせ

3.2.1　同一データの位置合わせ

同じデータが別の座標系で表されているとき，

$$\sum_i (\mathbf{R}\mathbf{x}_i + \mathbf{t} - \mathbf{y}_i)^2 = 0 \tag{3.1}$$

となる $\mathbf{R}$ と $\mathbf{t}$ が存在し，同一直線状にない $\mathbf{x}_i$ と $\mathbf{y}_i$ の組が 3 つ以上あればその解は一意に求まる．ただし，2 つの座標系のスケールは等しいものとし，$\mathbf{R}$ は

回転行列，$\mathbf{t}$ は平行移動ベクトルであり，$\mathbf{x}_i$ と $\mathbf{y}_i$ はそれぞれの座標系での同じ位置を表すデータ（以下，対応点と呼ぶ）である．つまり回転移動と平行移動だけで，一致するように位置合わせを行うことができる．これにより，別の座標系で表されていた 2 つの同じデータを同じ座標系に直すことができる．

3.2.2　ICP-Alignment

同じデータを位置合わせする方法について説明したが，レーザーレンジセンサで多方向から得られた画像の位置合わせをする場合などを考えると，同一表面上の点をではあるが，同一の点を計測しているわけではない．このように，別々に取ったデータを位置合わせするときには，式(3.1)を満たすような $\mathbf{R}$ と $\mathbf{t}$ は一般的に存在しない．また，互いに別のデータではどの点を対応点とするかという問題もある．そのような場合によく用いられる位置合わせの手法が ICP-Alignment である．ICP-Alignment では次のような手順で位置合わせを行っている．

ICP-Alignment を行うには， 2 つのデータ群がある程度近づいている必要がある．そのため， 2 つのデータ群がある程度近づけるおおよその回転行列・並進ベクトルを決定する[23]．次に，現状の与えられたおおよその位置関係の元で相手の物体のデータの中で最も近い場所にあるデータを探索し，対応点とする．そして，対応点との二乗誤差，

$$f(\mathbf{R},\mathbf{t}) = \sum_i \left|\mathbf{R}\mathbf{x}_i + \mathbf{t} - \mathbf{y}_i\right|^2 \tag{3.2}$$

が最小になるような $\mathbf{R}$ と $\mathbf{t}$ を計算する．ただし， $\mathbf{y}_i$ は $\mathbf{x}_i$ の対応点である．この操作によりデータの位置関係が変わるため，最も近い場所にあるデータが変わる．そのため，ICP-Alignment では対応点を探す処理と 2 つのデータ群を近づける処理を繰り返すことにより精度をよくしていく．

3.2.3　ロバスト位置合わせ

通常の ICP-Alignment は式(3.2)の通り，対応点同士の二乗和によって計

算されている．しかし，計測したデータの中には誤差が含まれている場合がある．この誤差が大きい場合において，評価関数が対応点間の距離の二乗和であることから評価関数に与える影響は誤差の大きさの二乗のオーダーで与えられる．そのため，位置合わせの結果が誤差に大きく左右されてしまうという問題がある．そこで，Nishino[24]らは誤差の影響を受けにくい評価関数として次のような評価関数を提案した．

$$E(\mathbf{p}) = \frac{1}{N}\sum_{i}^{N}\rho(z_i(\mathbf{p})) \tag{3.3}$$

ただし，

$$z_i(\mathbf{p}) = \left\| \mathbf{R}(\mathbf{q})\mathbf{x}_i + \mathbf{t} - \mathbf{y}_i \right\| \tag{3.4}$$

$$\rho(z_i) = \log(1 + \frac{1}{2}z_i^{\ 2}) \tag{3.5}$$

であり，$\mathbf{R}(\mathbf{q})$はクオータニオン$\mathbf{q}$によって与えられる回転行列である．この評価関数$E(\mathbf{p})$は誤差が小さいときには二次関数で近似され，そうでない場合には線形で近似されるような関数である．このため，大きな誤差を含むデータの位置合わせに対しても非常にロバストな手法である．

3.3　局所的位置合わせ

ICP-Alignment は非常に精度の高い位置合わせの手法であるが，形状比較のために同じ物体ではないものを位置合わせする場合のことを考えるとどうしても誤差が大きくなってしまう．そこで，そのような場合に有効である局所的位置合わせ[25]について説明する．

最初に ICP-Alignment によって全体の位置合わせを行う．そして，誤差が大きいところなどの領域を分割する．そして，それぞれの領域ごとに ICP-Alignment を行う(図 3.1)．n個の領域に分割され，それぞれの領域をD_1～D_nで表すこととする．ただし，

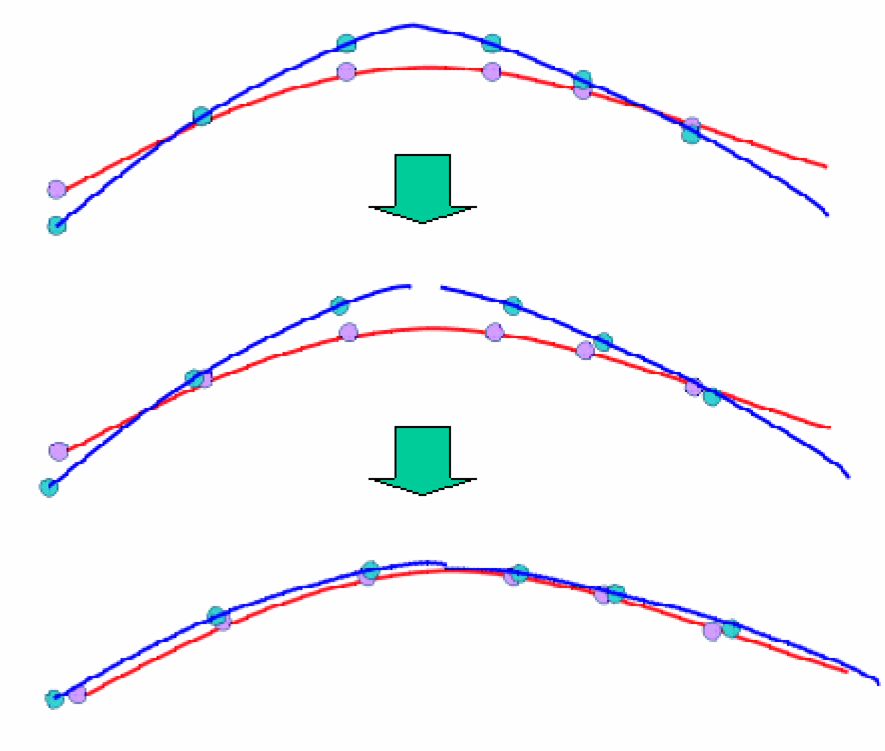


図 3.1:局所的位置合わせ

$$D_i \cap D_j = \phi$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} D_i = D_{all}$$

ただし，D_{all} である．

このとき，位置合わせの評価関数は次の式で表すことができる．

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{R}_i, \mathbf{t}_i) \qquad (3.6)$$

ただし，

$$f_i(\mathbf{R}_i, \mathbf{t}_i) = \sum_{j, x_j \in D_i} \left| \mathbf{R}_i \mathbf{x}_j + \mathbf{t}_i - \mathbf{y}_j \right|^2 \tag{3.7}$$

である．また，$f_i(\mathbf{R}_i, \mathbf{t}_i)$ はそれぞれ独立であるため，それぞれの最小化問題を解けばよい．これにより 2 つの物体を近づけることができる．

第 4 章

提案手法

4.1　ICP-FFD

2 章で述べた従来の FFD を用いた三次元形状解析では，特徴点同士が近づくように FFD による変形を行っていた．しかし本研究では前述の通り既知の特徴点の情報を全く用いないため，どの点とどの点が近づくように変形をさせればいいかが未知である．そこで，ICP-Alignment を参考にした，ICP-FFD を提案する．その手順を以下に示す．

物体同士が同じ形状である場合，対応点は当然同じ場所に位置している．形状の違いがわずかしかない場合には，対応点が近くにあることが容易に想像できる．そこで，まず 2 つの物体を ICP-Alignment によって位置合わせを行う．この位置合わせにより 2 つの物体の座標系を合わせることで，対応点を近づけるともに，2 つの物体を一致させるために必要な変形を小さくすることができる

前述したとおり，形状の似た物体同士では対応点は近くにあると考えられるので，FFD の変形の対応点として最近傍点を用いる．しかし，図 4.1 の赤丸に囲まれた部分のように，本来は対応点がない頂点データも存在する．このように，本来は対応点がなく，最近傍点が遠くにあるような点に対しても最近傍点を対応点として取ると，本来は近づけるべきでない遠くの点に対して近づくような変形がなされてしまう．そこで，本研究ではすべての最近傍点間の距離から平均値と分散を計算し，最近傍点との距離が平均値と分散の和より大きい場合には，その点には対応点がないものとして扱った．

次に，最近傍点を対応点とした FFD による変形を行う．FFD の変形については以下のように求める．

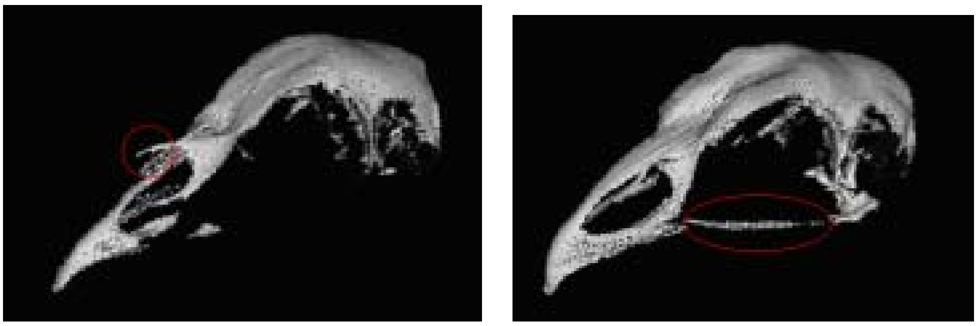


図 4.1:対応点の存在しない例

変形すべき物体上の点を $\mathbf{p}$，変形しない物体上の点を $\mathbf{q}$ で表す．断りがな

い限り$\mathbf{p}$はFFD座標系上で，$\mathbf{q}$は世界座標系で表されているとする．

ある点がFFD座標系で$\mathbf{p}=(s,t,u)^t$とすると，変形した後の点の世界座標系での位置は式(2.6)より以下の式を用いて計算される．

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{p}) &= \sum_i^l \binom{l}{i}(1-s)^{l-i}s^i\left(\sum_j^m \binom{m}{j}(1-t)^{m-j}t^j\left(\sum_k^n \binom{n}{k}(1-u)^{n-k}u^k\mathbf{P}_{ijk}\right)\right) \\ &= \sum_i^l\sum_j^m\sum_k^n c_{ijk}(\mathbf{p})\mathbf{P}_{ijk}\end{aligned} \tag{4.1}$$

ただし，(l,m,n)は各軸における制御格子点の数である．また，$\mathbf{P}_{ijk}$は世界座標系での制御点の位置を表し，

$$c_{ijk}(\mathbf{p}) = \binom{l}{i}(1-s)^{l-i}s^i\binom{m}{j}(1-t)^{m-j}t^j\binom{n}{k}(1-u)^{n-k}u^k \tag{4.2}$$

である．

対応点間の距離の二乗和を評価関数とすると，評価関数の式は以下のように表される．

$$E = \sum_a (\mathbf{f}(\mathbf{p}_a)-\mathbf{q}_a)\cdot(\mathbf{f}(\mathbf{p}_a)-\mathbf{q}_a) \tag{4.3}$$

ただし，$\mathbf{q}_a$は$\mathbf{p}_a$の対応点である．

この評価関数Eを最小化するために，制御点をどのように動かせばよいかを計算する．そのために各制御点における微分を行い，その値が0になる点を探す．今ある制御点のx座標値のみが変わった場合，式(4.1)から，その影響は各点のx座標値のみである．つまり，x，y，z，に関して独立に考えることができる．そこで，xに関してのみ考えると，

$$\frac{\partial E}{\partial Px_{ijk}} = 2\sum(fx(\mathbf{p}_a) - \mathbf{q}_a)\cdot\frac{\partial fx(\mathbf{p}_a)}{\partial \mathbf{P}_{ijk}} \tag{4.4}$$

となる．ここで，式(4.1)より

$$\frac{\partial fx(\mathbf{p}_a)}{\partial \mathbf{P}_{ijk}} = c_{ijk}(\mathbf{p}_a) \tag{4.5}$$

が言える．Eが最小となるとき，すべてのi，j，kにおいて，式(4.4)=0 が成り立つ必要がある．つまり，式(4.5)に示す線型方程式を満たす必要がある．

$$A\mathbf{P}_x = \mathbf{b}_x \tag{4.6}$$

ただし，

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{111}^{111} & a_{112}^{111} & \cdots & a_{lmn}^{111} \\ a_{111}^{112} & a_{112}^{112} & \cdots & a_{lmn}^{112} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{lmn}^{111} & a_{112}^{lmn} & \cdots & a_{lmn}^{lmn} \end{pmatrix}$$

$$a_{ijk}^{IJK} = \sum_a c_{ijk}(\mathbf{P}a)c_{IJK}(\mathbf{P}a)$$

$$Px = (Px_{111}, Px_{112}, \cdots, Px_{lmn})^T$$

$$bx = (bx_{111}, bx_{112}, \cdots, bx_{lmn})^T$$

$$bx_{ijk} = \sum_a c_{ijk}(\mathbf{p}_a)qx_a$$

この線型方程式を解くことにより，対応点間の距離の二乗和が最小となるような変形を行うことができる．しかし，解が一意に決まらない場合もある．そのときには格子点の動きが最も少ない場合，つまり最も小さい変形で最も

近づくものを解とする．このような解は得意値分解を用いることにより，より簡単に計算することができる．

この変形により 2 つの物体形状を近づけることが可能である．2 つの物体形状が近ければ近いほど，本来とるべき対応点同士も近づく．よってここでさらに最近傍点をとることで，はじめに取った最近傍点よりも本来の対応点に近い点を選ぶことができる．そこで，対応点探索と FFD による変形を繰り返すことで，より正しい対応点を推定しつつ変形をしていくことが可能である．

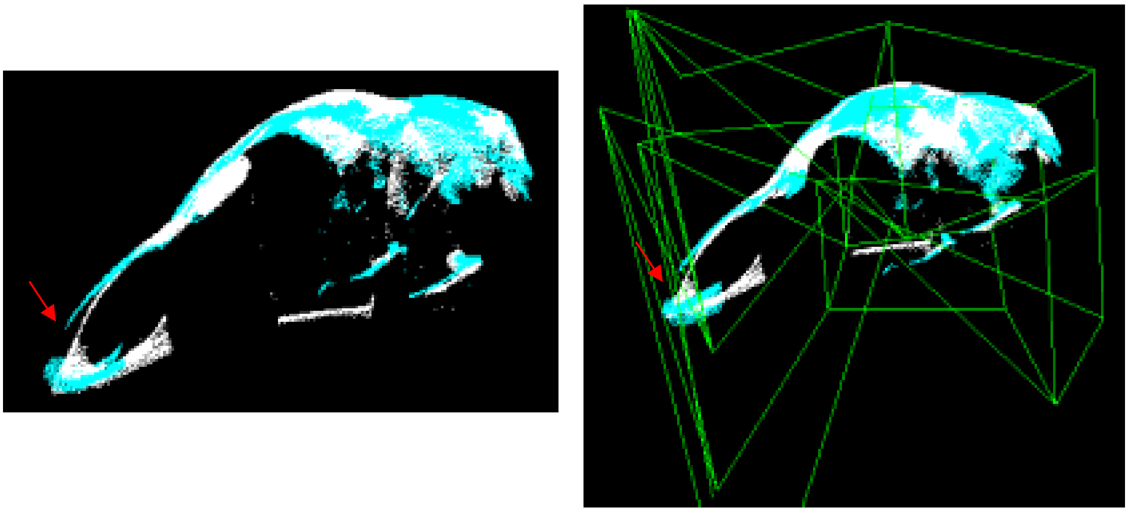


図 4.2:形状の差異が大きいため失敗する例

4.2　局所的位置合わせを用いた FFD

通常 ICP-Alignment は同一の物体を計測したデータに対して用いられる．そのため, ICP-Alignment をすることで 2 つのデータを近づけることができる．しかし，今は別の 2 つのデータの位置合わせに用いている．そのため，全体的に誤差が小さくなるように位置合わせをしても，それぞれの部位では誤差が大きくなっているところがあり，例えば，図 4.2 をみると位置合わせをしたときにくちばしのあたりの誤差が大きくなってしまっている．このように誤差が大きいと，本来の対応点からは離れてしまい，別のところに変形されてしまったり，閾値を越えてしまい対応点がないとみなされてうまく変形がなされなかったりすることがある．そこで，全体としては個体差による誤差があるものの，局所的に見ると形状は似ているといえるため，それぞれの

ICP-FFD を適用する前に二物体の形状をできるだけ近づけておくために次のようなことを行う.

位置合わせをした物体の一方の三次元データを分割して，分割したそれぞれの部分を個別にさらに位置合わせを行う．そうすることで，誤差をより小さくすることができる．そして，FFD の最初の一度目は分割して位置合わせした結果に対して行う．まとめると全体の手順は次のようになる.

① 物体 A と物体 B の三次元形状データを用意する.
② 2 つの物体に対して全体の位置合わせを行う.
③ A のデータを半分に分割し，それぞれの部位を個別に B と位置合わせを行う．その結果を A’とする.
④ A に FFD を用いて A と A’の各頂点間の距離の和が最小になるように変形する．このとき，A と A’は同じ頂点データを持っているので対応点は既知である．この A の変形の結果を A’’とする.
⑤ A’’と B に対して ICP-FFD を行う

局所的位置合わせの結果は FFD の変形により ICP-FFD を用いる前の 2 つの物体を近づけるためだけに使われているため, FFD の制御格子点の動きは局所的位置合わせに関係なく 2 つの物体の初期形状の差異を表すことができる. この手法で，図 4.2 と同じデータに用いたところ図 4.3 のようになった．また, 同じデータに従来手法と提案手法を使い，FFD を繰り返したときの 2 つの物体の対応点間の距離の二乗和を測定したところ, 表 4.1 のようになった. 視覚的に見ても数値の面から見ても，変形により 2 つの物体が提案手法のほうが近づいているのがわかる.

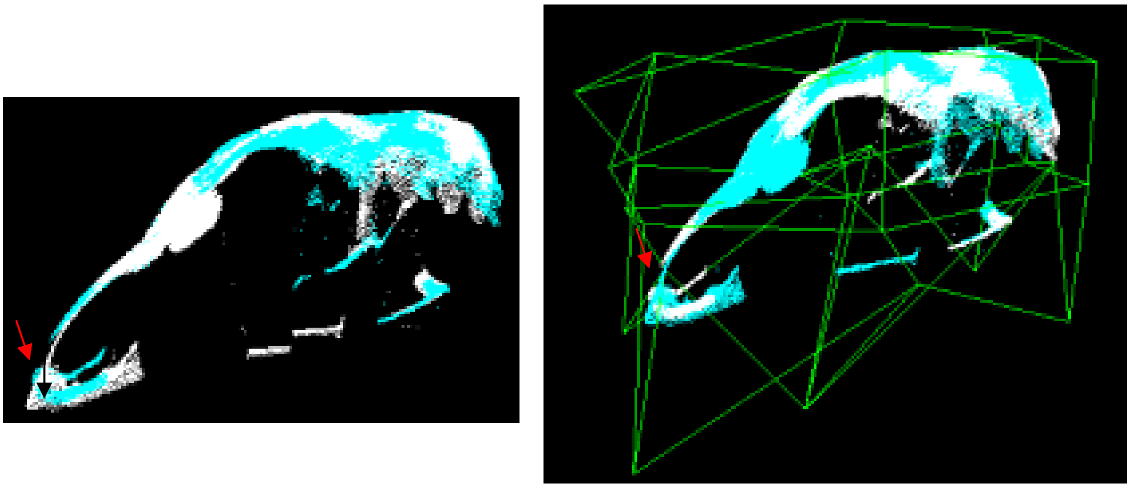


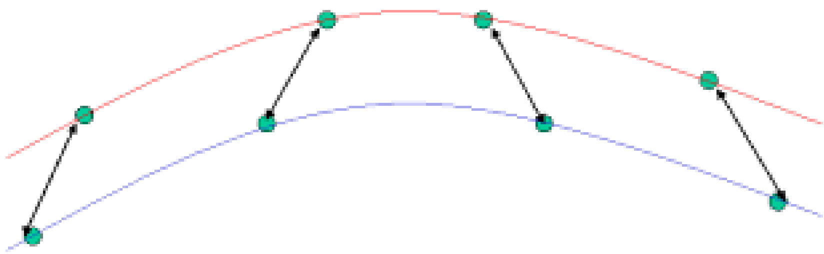
図 4.3:局所的位置合わせを用いた FFD

表 4.1:2 物体間の誤差の比較

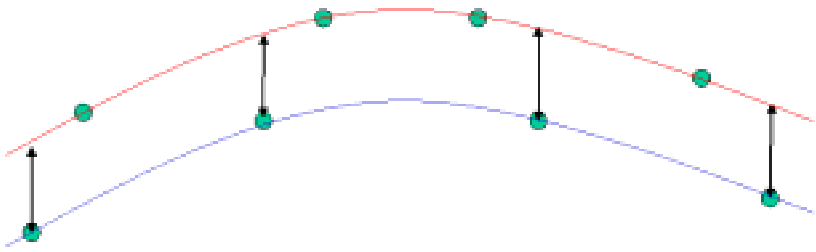
FFD 回数	従来手法の 2 物体間の二乗誤差	局所的位置合わせを用いた手法の 2 物体間の二乗誤差
1 回目	0.001657	0.001160
2 回目	0.001548	0.001114
3 回目	0.001455	0.001108

4.3　点と面の距離を評価関数とした FFD

これまでの FFD の変形では式(2)のように対応点同士の距離が小さくなるように計算を行ってきた．しかし，たとえば図 4.4 のように本来は点と点の距離が小さくなるようにするのではなく，点と面の距離が小さくなればよい．



(a) 点と点の距離の評価関数



(b) 点と面の距離の評価関数

図 4.4:評価関数の違いによる変形の違い

そこで，計算式を以下のようにして，変形の評価関数を点と面の距離で考えるようにした．評価関数は次の式で与えられる．

$$E = (\mathbf{n}(\mathbf{q}_a) \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{p}_a) - \mathbf{q}_a))^2 \tag{4.7}$$

となる．ただし， $\mathbf{n}(\mathbf{q})$ は $\mathbf{q}$ の法線ベクトルである．対応点の法線ベクトルに垂直な面を擬似的に物体の面とすることで計算を行っている．対応点同士の距離をノルムとしたときと同様に微分をすると

$$\frac{\partial E}{\partial Px_{ijk}} = 2n_x(\mathbf{q}_a) \sum \mathbf{n}(\mathbf{q}_a) \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{p}_a) - \mathbf{q}_a) \cdot \frac{\partial fx(\mathbf{p}_a)}{\partial \mathbf{P}_{ijk}} \tag{4.8}$$

となる．どうように y,z に関しても計算を行う．点と点で評価値を計算したときはそれぞれ独立であったが，点と面での計算では独立ではない．これが

0 になるように計算をすると，

$$\mathbf{AP} = \mathbf{b} \tag{4.9}$$

となる．ただし，

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
a_{xx_{111}}^{111} & a_{xy_{111}}^{111} & a_{xz_{111}}^{111} & a_{xx_{112}}^{111} & a_{xy_{112}}^{111} & a_{xz_{112}}^{111} & \cdots & a_{xz_{lmn}}^{111} \\
a_{yx_{111}}^{111} & a_{yy_{111}}^{111} & a_{yz_{111}}^{111} & a_{yx_{112}}^{111} & a_{yy_{112}}^{111} & a_{yz_{112}}^{111} & \cdots & a_{yz_{lmn}}^{111} \\
a_{zx_{111}}^{111} & a_{zy_{111}}^{111} & a_{zz_{111}}^{111} & a_{zx_{112}}^{111} & a_{zy_{112}}^{111} & a_{zz_{112}}^{111} & \cdots & a_{zz_{lmn}}^{111} \\
a_{xx_{111}}^{112} & a_{xy_{111}}^{112} & a_{xz_{111}}^{112} & a_{xx_{112}}^{112} & a_{xy_{112}}^{112} & a_{xz_{112}}^{112} & \cdots & a_{xz_{lmn}}^{112} \\
a_{yx_{111}}^{112} & a_{yy_{111}}^{112} & a_{yz_{111}}^{112} & a_{yx_{112}}^{112} & a_{yy_{112}}^{112} & a_{yz_{112}}^{112} & \cdots & a_{yz_{lmn}}^{112} \\
a_{zx_{111}}^{112} & a_{zy_{111}}^{112} & a_{zz_{111}}^{112} & a_{zx_{112}}^{112} & a_{zy_{112}}^{112} & a_{zz_{112}}^{112} & \cdots & a_{zz_{lmn}}^{112} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{zx_{111}}^{lmn} & a_{zy_{111}}^{lmn} & a_{zz_{111}}^{lmn} & a_{zx_{112}}^{lmn} & a_{zy_{112}}^{lmn} & a_{zz_{112}}^{lmn} & \cdots & a_{zz_{lmn}}^{lmn}
\end{pmatrix}$$

$$a_{xy_{ijk}}^{IJK} = n_x n_y \sum_a c_{ijk}(\mathbf{P}a) c_{IJK}(\mathbf{P}a)$$

$$P = (Px_{111}, Py_{111}, Pz_{111}, Px_{112} \cdots, Pz_{lmn})^T$$

$$b = (bx_{111}, by_{111}, bz_{111}, bx_{112} \cdots, bz_{lmn})^T$$

$$bx_{ijk} = \sum_a c_{ijk}(\mathbf{p}_a) qx_a$$

である．この式を解くことで，点と面の距離を最小とするような変形を与えることができる．

従来手法と提案手法で FFD による 2 物体間の距離の二乗和をとったところ，表 4.2 のようになった．点と面の距離を評価値としたほうが早く近づいていっているのがわかる．

表 4.2: 2 物体間の誤差の比較(2)

FFD 回数	評価値に点と点の距離を使った場合の二乗誤差	評価値に点と面の距離を使った場合の二乗誤差
1 回目	0.023949	0.023949
2 回目	0.022397	0.022919
3 回目	0.021588	0.021841
4 回目	0.021113	0.020907
5 回目	0.021289	0.020111
6 回目	0.021584	0.019543
7 回目	0.021256	0.019109
８回目	0.020446	0.018837

4.4　B-Spline 曲線を用いた FFD

オリジナルの FFD の変形では，変形の曲線に Bezie 曲線を用いていた．しかし，Bezie 曲線は一つの格子点の動きが全体に影響するため，それぞれの格子点の動きから変形を想像するのが難しい．そこで，本研究では変形の曲線に Bezie 曲線の代わりに B-Spline 曲線を用いた．B-Spline 曲線は以下のように計算され，格子点の動きが，その付近にしか影響しない．

B-Spline 曲線は n+1 個の制御点列 $P_0,\cdots,P_n$ およびノット列 $x_0,\cdots,x_r$ から以下の式により定義される．

$$R(t)=\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(t)\,p_i \tag{4.10}$$

ここで，$r=m-n$ であり，k を B-Spline 曲線の位数という．また，$N_{i,r}(t)$ は B-Spline 基底関数と呼ばれ,

$$N_{i,r}(t)=\frac{(t-x_i)N_{i,r-1(t)}}{x_{i+r-1}-x_i}+\frac{(x_{i+r}-t)N_{i+1,r-1(t)}}{x_{i+r}-x_{i-1}} \tag{4.11}$$

$$N_{i,0}(t)=\begin{cases}1 & (x_i \le t \le x_{i+1})\\ 0 & (\text{上記以外}\end{cases}$$

で表される．ノット列 $x_0,\cdots,x_r$ は単純増加で与えられる．ノット列の与えられ方によって性質が変化するが，本研究では曲線が制御多角形の両端と一致する開一様分布を用いることとした．

基底関数に B-spline 曲線を用いた場合の FFD 座標系で $\mathbf{p}=(s,t,u)^t$ である点の世界座標系での位置は，

$$\mathbf{f(p)}=\sum_{i}^{l}\sum_{j}^{m}\sum_{k}^{n} d_{ijk,r}(\mathbf{p})\mathbf{P}_{ijk} \tag{4.12}$$

ただし，

$$d_{ijk,r}(\mathbf{p})=N_{i,r}(s)N_{j,r}(t)N_{k,r}(u) \tag{4.13}$$

である．よって変形を求めるには次の式を解けばよい

$$\mathbf{AP}=\mathbf{b} \tag{4.14}$$

となる．ただし，

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}
a_{xx111}^{111} & a_{xy111}^{111} & a_{xz111}^{111} & a_{xx112}^{111} & a_{xy112}^{111} & a_{xz112}^{111} & \cdots & a_{xz\,lmn}^{111}\\
a_{yx111}^{111} & a_{yy111}^{111} & a_{yz111}^{111} & a_{yx112}^{111} & a_{yy112}^{111} & a_{yz112}^{111} & \cdots & a_{yz\,lmn}^{111}\\
a_{zx111}^{111} & a_{zy111}^{111} & a_{zz111}^{111} & a_{zx112}^{111} & a_{zy112}^{111} & a_{zz112}^{111} & \cdots & a_{zz\,lmn}^{111}\\
a_{xx111}^{112} & a_{xy111}^{112} & a_{xz111}^{112} & a_{xx112}^{112} & a_{xy112}^{112} & a_{xz112}^{112} & \cdots & a_{xz\,lmn}^{112}\\
a_{yx111}^{112} & a_{yy111}^{112} & a_{yz111}^{112} & a_{yx112}^{112} & a_{yy112}^{112} & a_{yz112}^{112} & \cdots & a_{yz\,lmn}^{112}\\
a_{zx111}^{112} & a_{zy111}^{112} & a_{zz111}^{112} & a_{zx112}^{112} & a_{zy112}^{112} & a_{zz112}^{112} & \cdots & a_{zz\,lmn}^{112}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{zx111}^{lmn} & a_{zy111}^{lmn} & a_{zz111}^{lmn} & a_{zx112}^{lmn} & a_{zy112}^{lmn} & a_{zz112}^{lmn} & \cdots & a_{zz\,lmn}^{lmn}
\end{pmatrix}$$

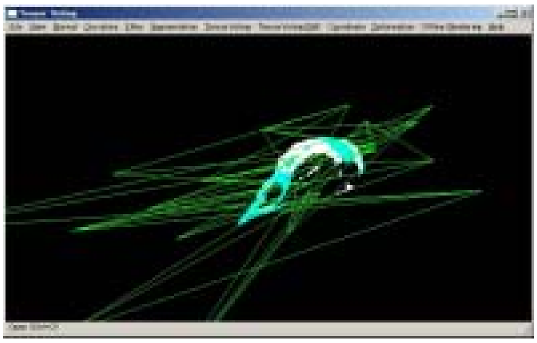
$$a_{xy_{ijk}}^{IJK} = n_x n_y \sum_a d_{ijk,r}(\mathbf{P}a) d_{IJK,r}(\mathbf{P}a)$$

$$P = (Px_{111}, Py_{111}, Pz_{111}, Px_{112} \cdots, Pz_{lmn})^T$$

$$b = (bx_{111}, by_{111}, bz_{111}, bx_{112} \cdots, bz_{lmn})^T$$

$$bx_{ijk} = \sum_a d_{ijk,r}(\mathbf{p}_a) qx_a$$

従来の手法では，格子点の数が増えると変形のときに格子点が大きく動きどのような変形が行われているのか理解するのが非常に困難であったが，B-Spline 曲線を基底関数に用いた FFD ではずいぶんわかりやすくなった(図 4.5).



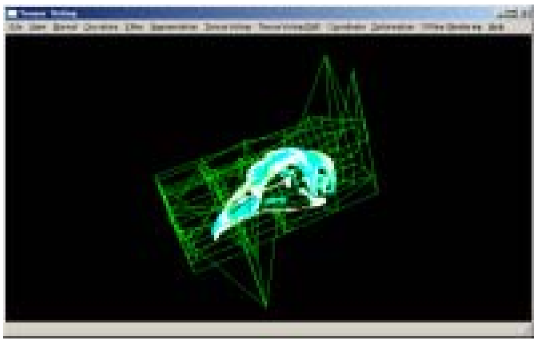


図 4.5:基底関数を Bezier 曲線と B-Spline 曲線にした場合の比較

第 5 章

実験

5.1 実験データ

本論文では，1 章で述べたとおり鶏の頭骨(図 5.1)を通じて三次元形状解析を行った．鶏は 5 品種，全 22 体のデータを用いており，鶏の種類と数はそれぞれ岐阜地鶏が 3 体，薩摩鶏が 5 体，軍鶏が 5 体，小軍鶏が 5 体，白色レグホンが 4 体である．

これらの鶏の頭骨の距離画像をレーザーレンジセンサ VIVID910 [26]を用いて取得する．一度の計測ではある一地点からの可視範囲しか測定できないため物体モデルを作るには別の場所から複数回距離画像を取得する必要がある．本論文では外側に向いている物体表面の距離画像を用いるものとして，前方，上方，後方の三方向から距離画像を取得した(図 5.2)．

三方向から取得された距離画像は，それぞれ別の位置から測定されているために座標系が別に表現されている．そのため，それぞれの距離画像を一つにし，三次元モデルを作成するために第 3 章で説明した ICP-Alignment による同時位置合わせ手法を用いて位置合わせしたもの(図 5.3～5.6)を用いた．

図 5.1:鶏の頭骨

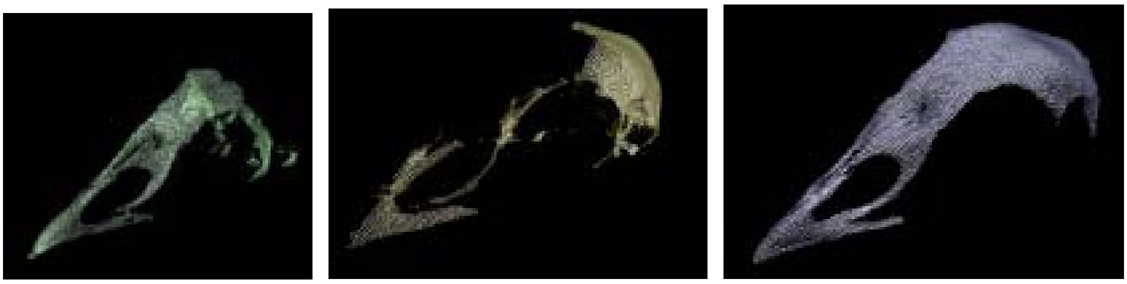
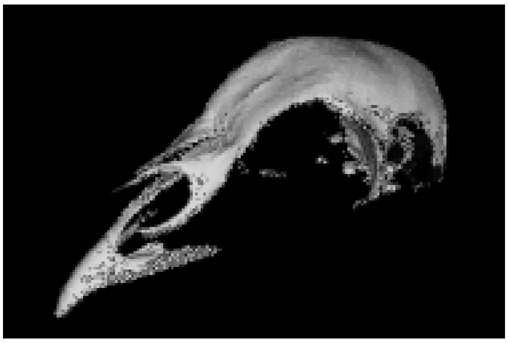
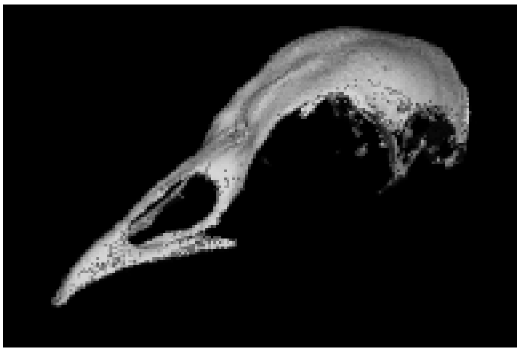


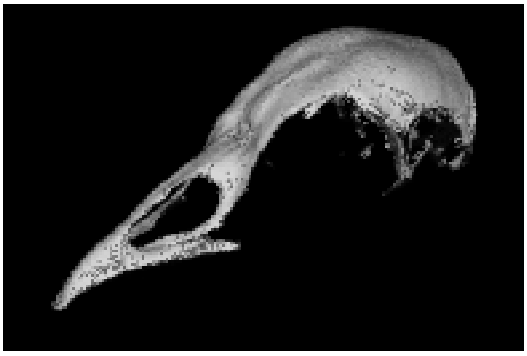
図 5.2:距離画像



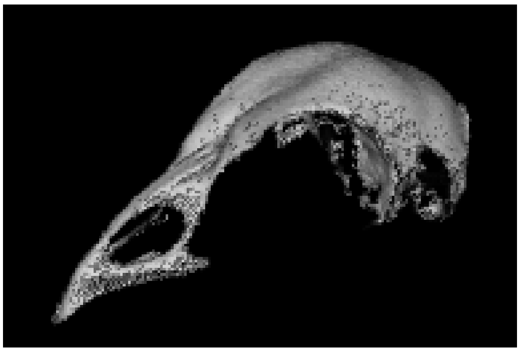
岐阜地鶏 1



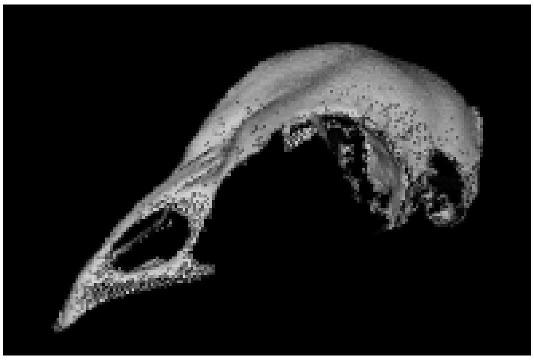
岐阜地鶏 2



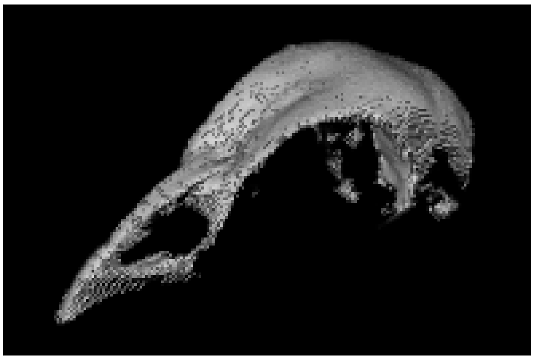
岐阜地鶏 3



小軍鶏 1

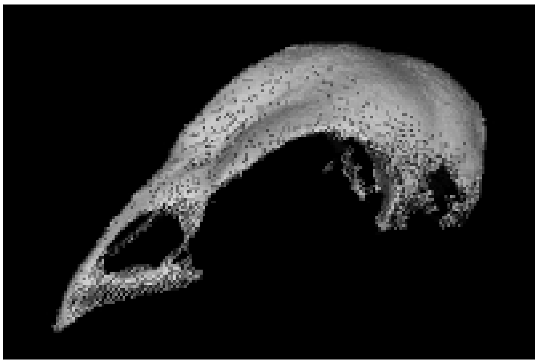


小軍鶏 2

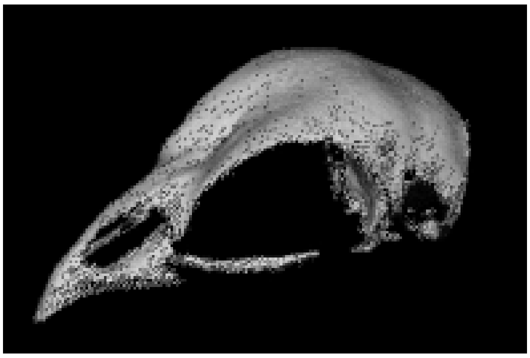


小軍鶏 3

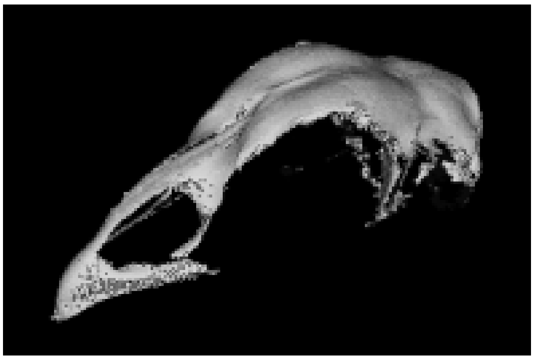
図 5.3:実験データ(1)



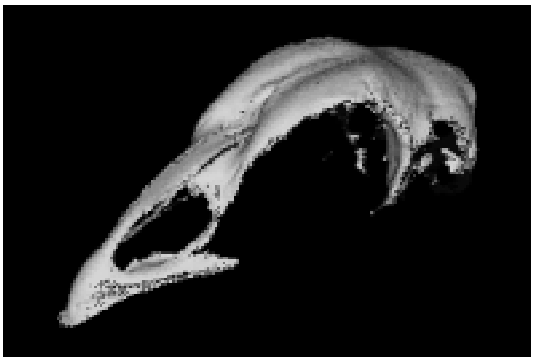
小軍鶏 4



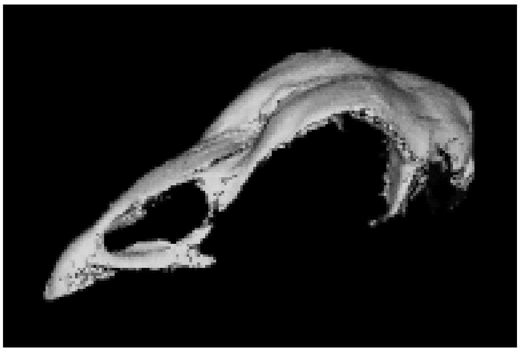
小軍鶏 5



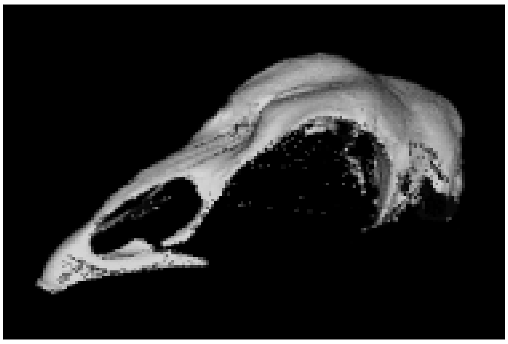
薩摩地鶏 1



薩摩地鶏 2

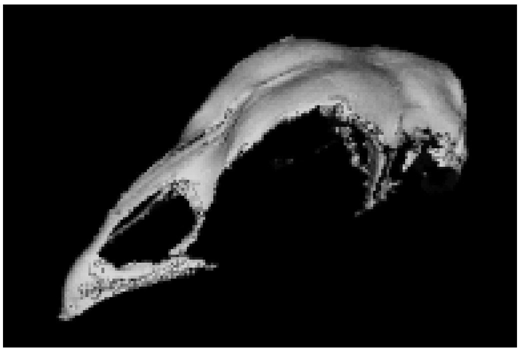


薩摩地鶏 3

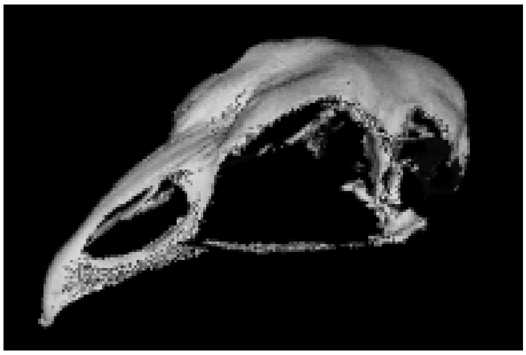


薩摩地鶏 4

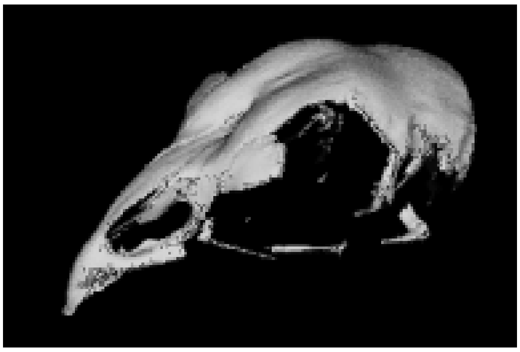
図 5.4:実験データ(2)



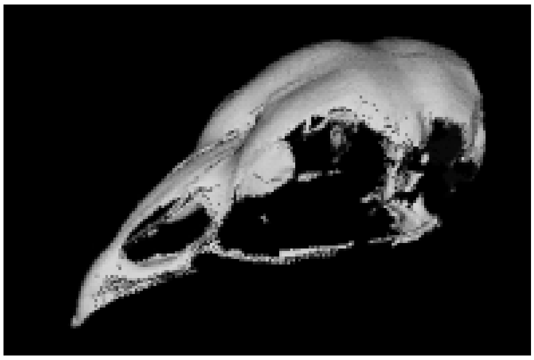
薩摩地鶏 5



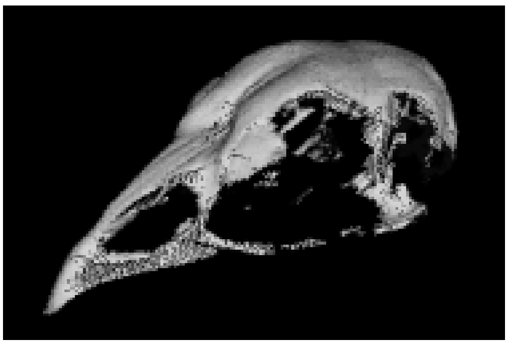
軍鶏 1



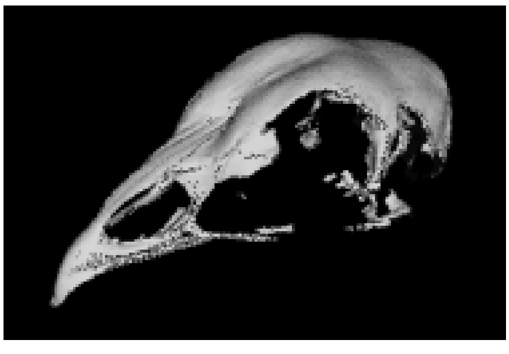
軍鶏 2



軍鶏 3

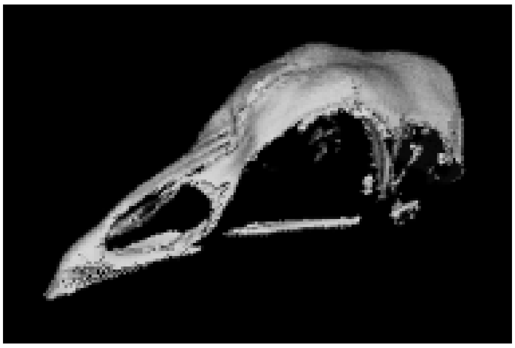


軍鶏 4

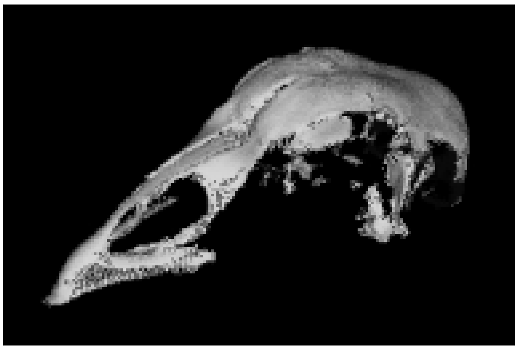


軍鶏 5

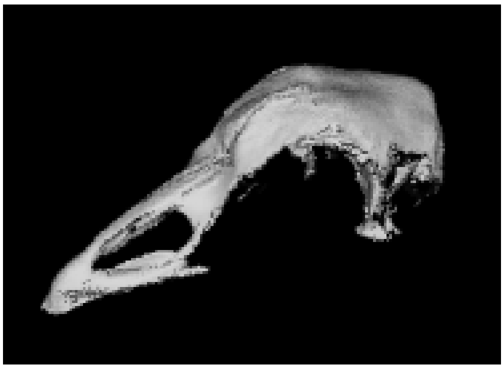
図 5.5:実験データ(3)



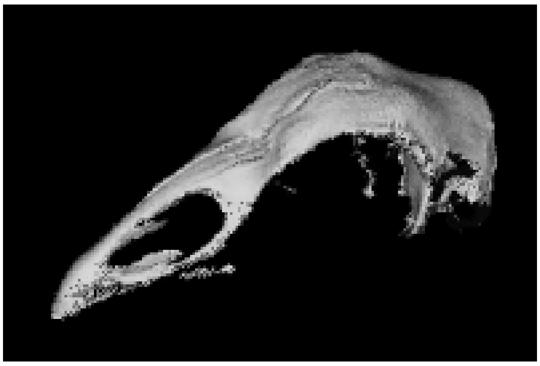
白色レグホン 1



白色レグホン 2



白色レグホン 3



白色レグホン 4

図 5.6:実験データ(4)

5.2　実験手法

本論文では，軍鶏 1 を基準物体と定め，この基準物体との差異によって他の物体の形状を表現する．

まず基準物体である軍鶏 1 の座標系を設定する．座標系の決定は第 3 章で説明した主成分分析によって求めることを考える．軍鶏 1 の三次元モデル中の頂点データの個数を N とし，i 番目の頂点データの座標を，

$$\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i) \tag{5.1}$$

表すとき，共分散行列 $\mathbf{S}$ は

$$\mathbf{S} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \tag{5.2}$$

によって計算される．ただし，$\bar{\mathbf{p}}$ は $\mathbf{p}$ の平均とし，

$$\bar{\mathbf{p}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} & x_2 - \bar{x} & \cdots & x_N - \bar{x} \\ y_1 - \bar{y} & y_2 - \bar{y} & \cdots & y_N - \bar{y} \\ z_1 - \bar{z} & z_2 - \bar{z} & \cdots & z_N - \bar{z} \end{pmatrix}$$

である.

この共分散行列から固有値 λ_1，λ_2，λ_3 と固有ベクトル $\begin{pmatrix} w_{1x} \\ w_{1y} \\ w_{1z} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} w_{2x} \\ w_{2y} \\ w_{2z} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} w_{3x} \\ w_{3y} \\ w_{3z} \end{pmatrix}$ が求まる. ただし, $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ とする. これにより求められた $\bar{\mathbf{p}}$ を原点，$\begin{pmatrix} w_{1x} \\ w_{1y} \\ w_{1z} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} w_{2x} \\ w_{2y} \\ w_{2z} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} w_{3x} \\ w_{3y} \\ w_{3z} \end{pmatrix}$ をそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸とするような座標系を軍鶏 1 の座標系として設定した(図 5.7).

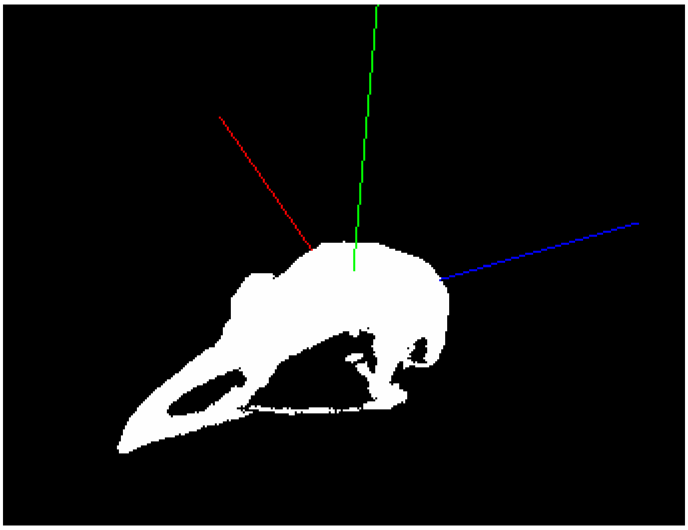


図 5.7:基準物体の座標系(青: x 軸，赤: y 軸，緑: z 軸)

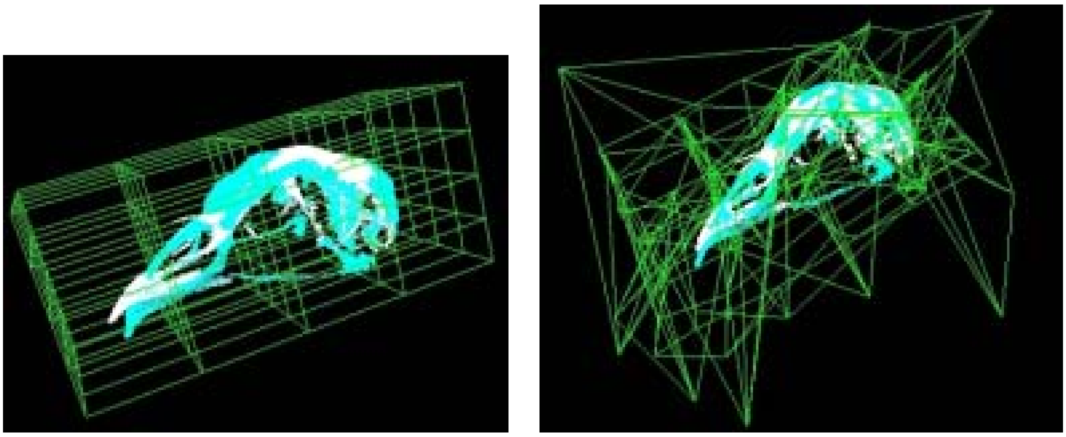
次に基準物体に対して他の個体を ICP-Alignment により位置合わせをした．

そして，提案手法による比較を行う．基準物体を提案手法により変形させ他の個体に近づけ，その差異を求める．変形させる物体を常に同一の物体にすることで同じ格子点群を用いることができるため，別々の物体に対する格子点の動きの結果をそのまま比較することができる．FFD 座標系は基準物体のもつ頂点データの中で，x 軸，y 軸，z 軸方向のそれぞれ最大値と最小値を求め，それにより作られる直方体として設定した．つまり，世界座標系と同じ軸方向を持ち，そのなかでもっとも小さな直方体である．本論文では制御格子点群の数は各辺 5 個として設定した．局所的アラインメントのため分割は，x 軸方向に半分の場所で分割を行った．x 軸方向では，座標設定の際に分散が最も大きくなるようにとったため，その方向に分割することでもっとも効果的な分割ができると考えられる．ICP-FFD の繰り返し回数は 5 回とした．

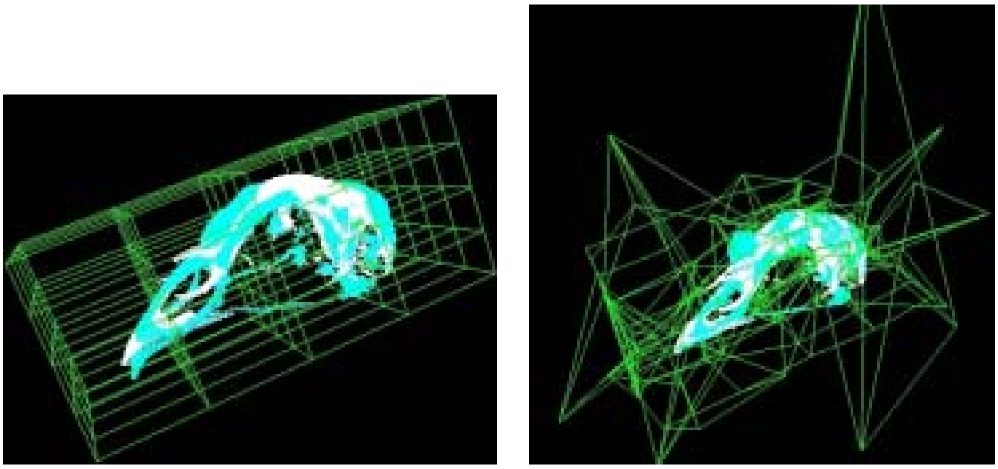
この変形によって各制御格子点の移動量 $\mathbf{D}_{ijk}$ が得られる．この $\mathbf{D}_{ijk}$ をパラメータとして主成分分析や階層クラスタ分析により解析を行った．

5.3　変形の結果

提案手法の変形の結果を図 5.8～5.15 に示す．青で表されているのが基準物体であり，白で表されているのが変形対象物体である．緑の線は制御格子点を表している．基準物体と同じ品種である軍鶏の結果を見ると，他の品種の鶏の結果と比べ格子点の移動が小さいことが見て取れる．つまり，変形の必要が少なく，元から形状が似ていたと言える．

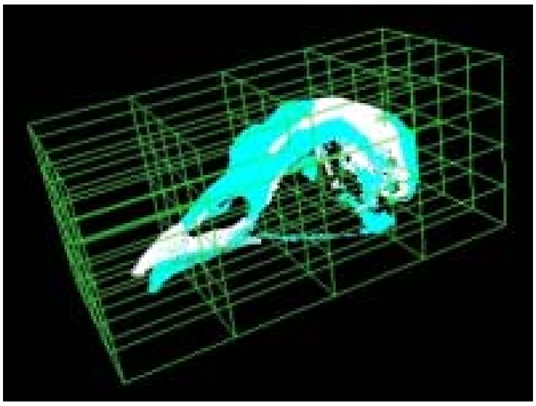
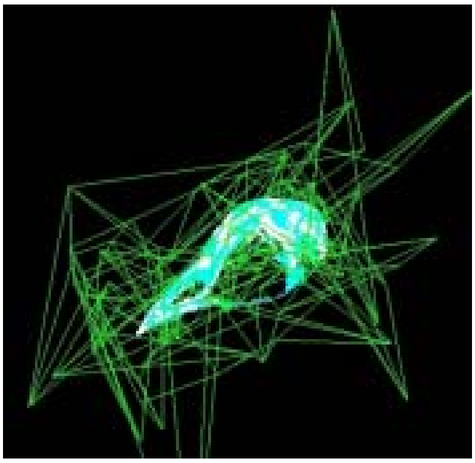


岐阜地鶏 1

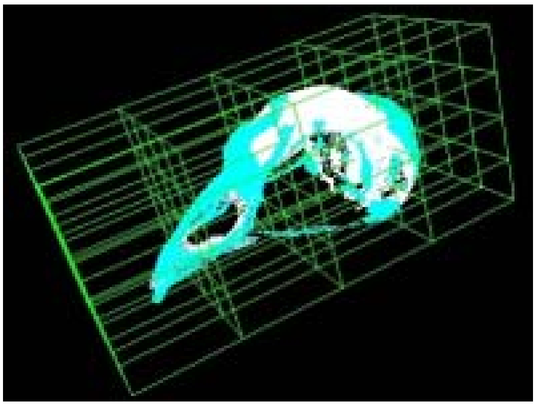
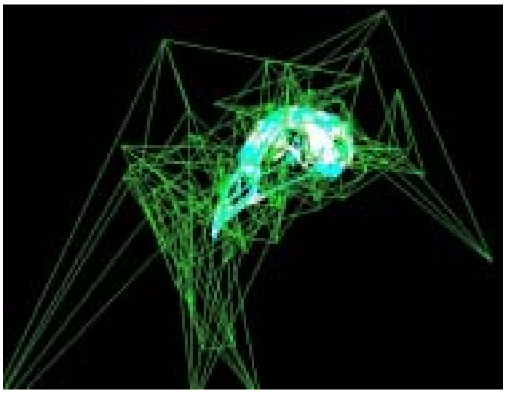


岐阜地鶏 2

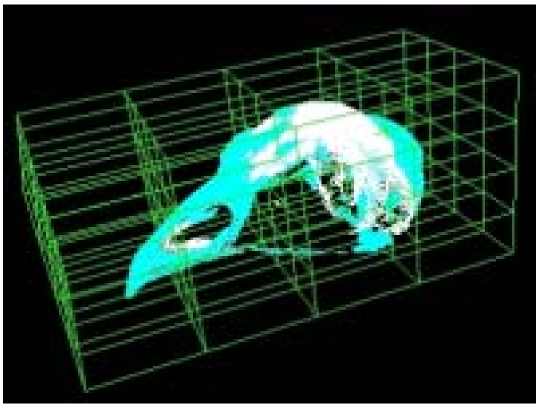
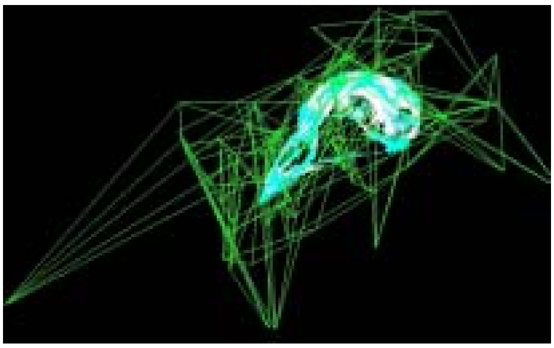
図 5.8:FFD の結果(1)

岐阜地鶏 3

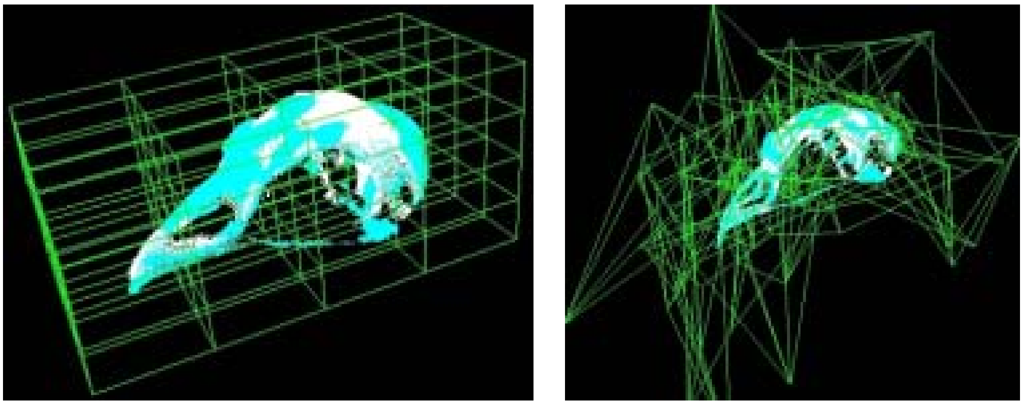



小軍鶏 1

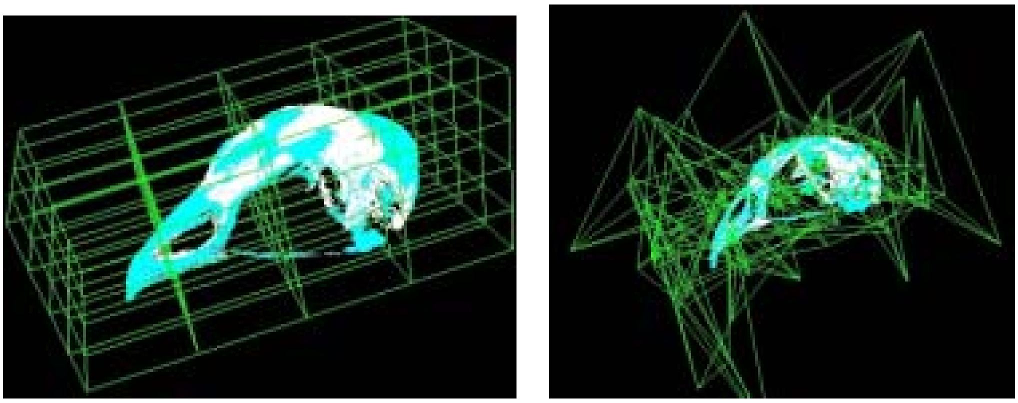



小軍鶏 2

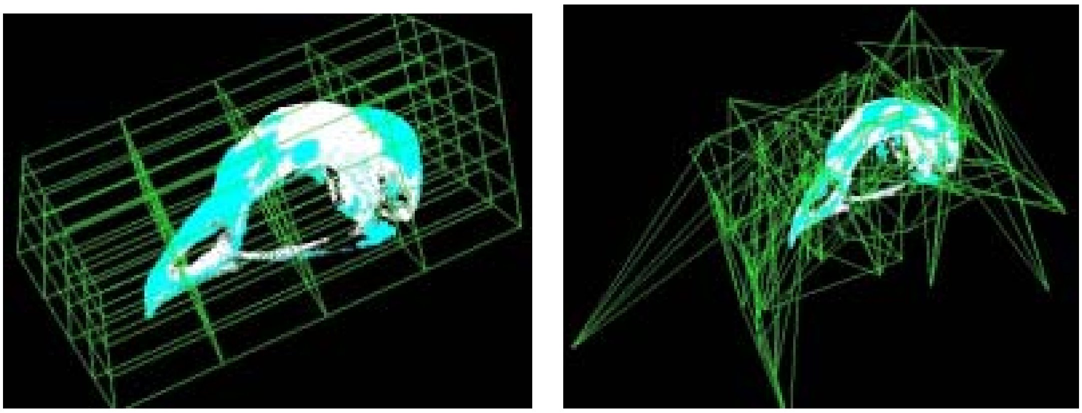
図 5.9:FFD の結果(2)



小軍鶏 3

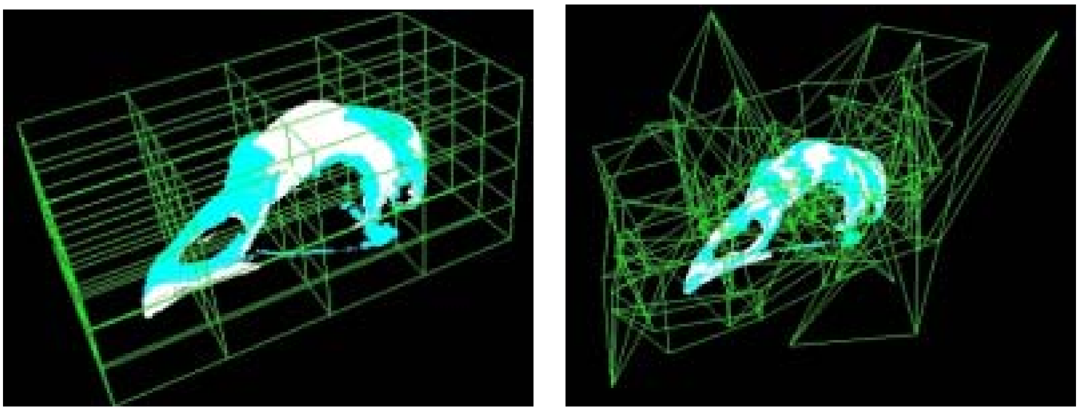


小軍鶏 4

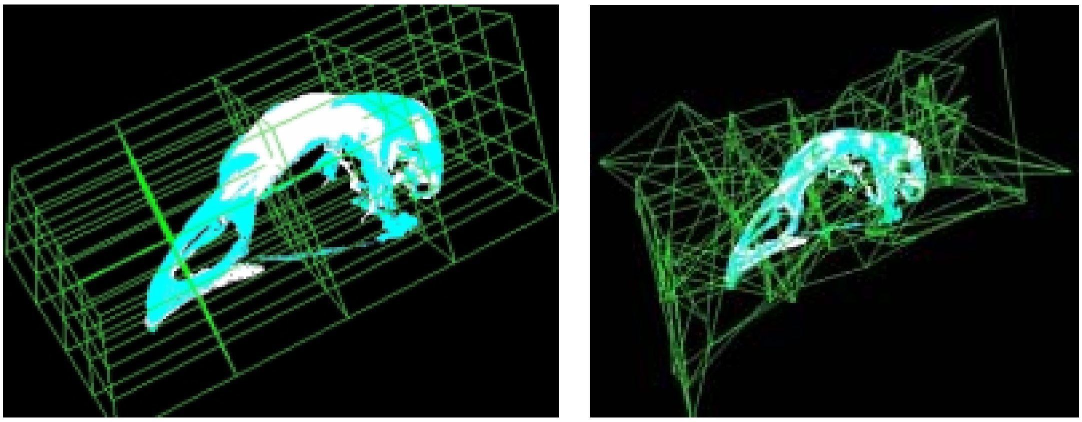


小軍鶏 5

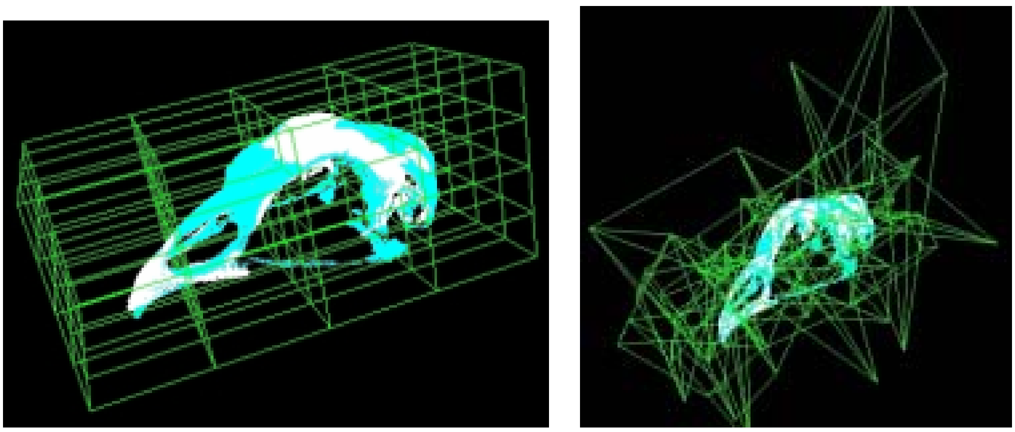
図 5.1０:FFD の結果(3)



薩摩地鶏 1

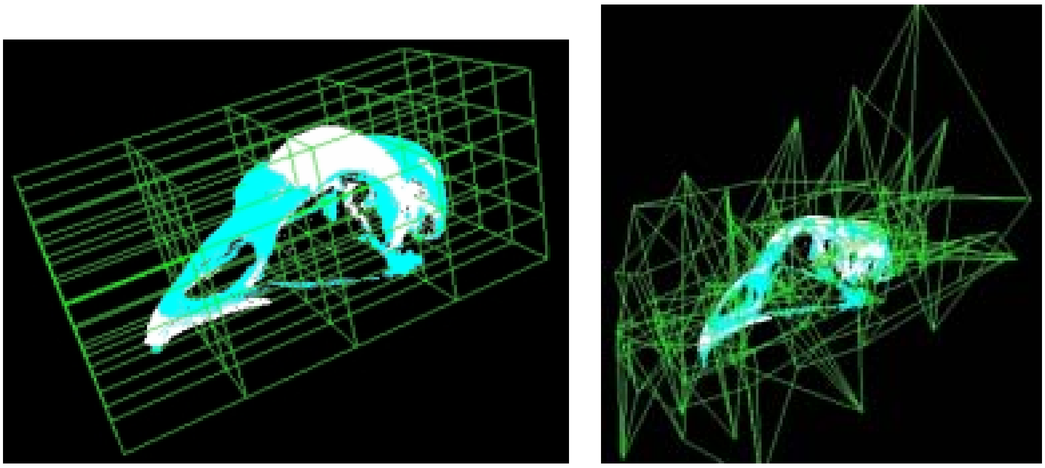


薩摩地鶏 2

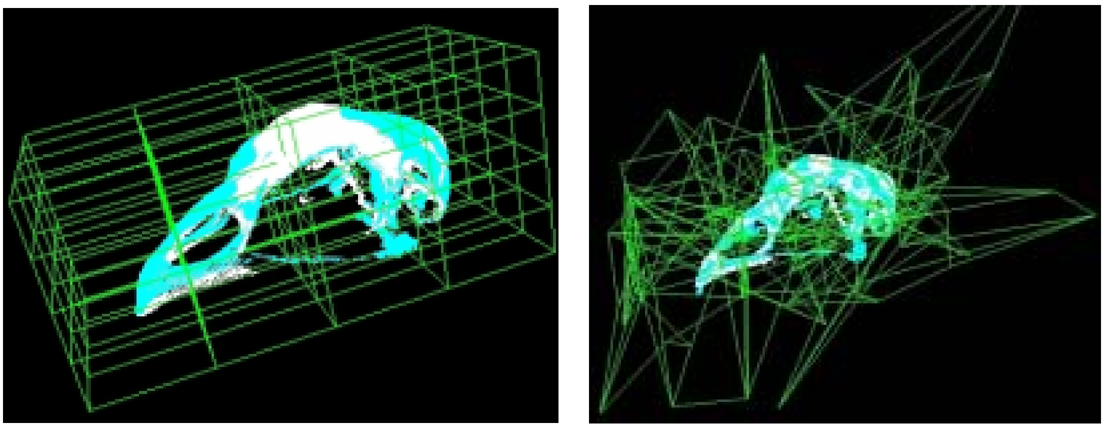


薩摩地鶏 3

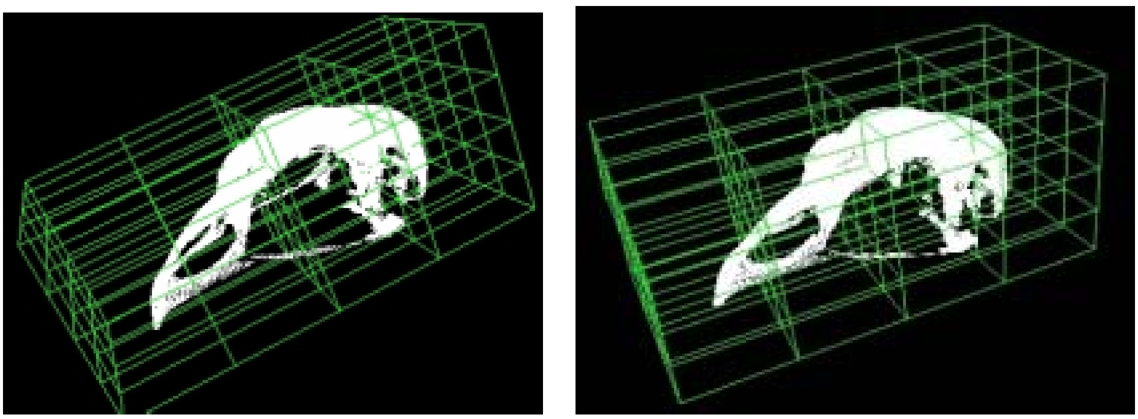
図 5.11:FFD の結果(4)



薩摩地鶏 4

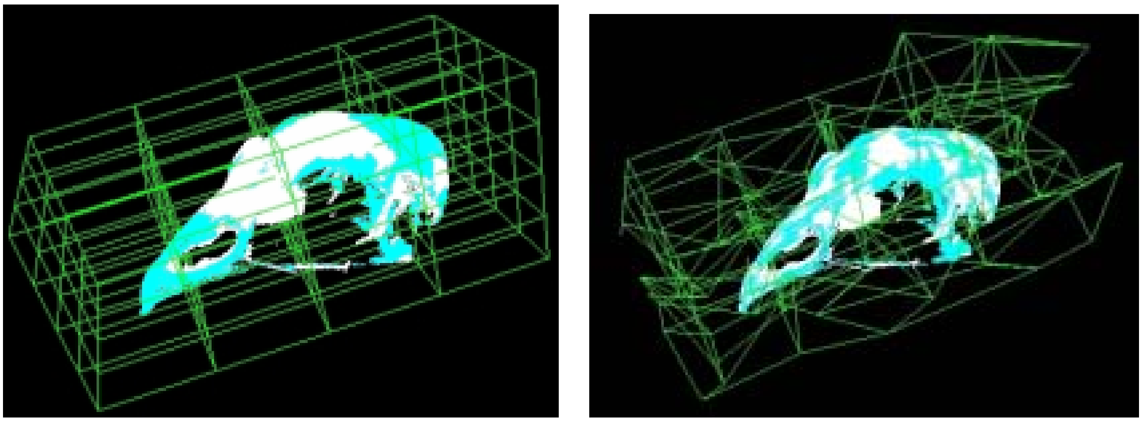


薩摩地鶏 5

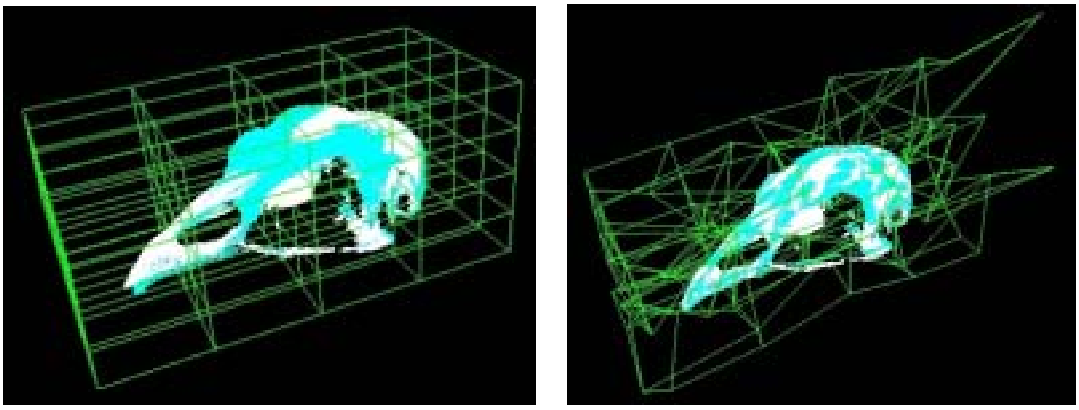


軍鶏 1

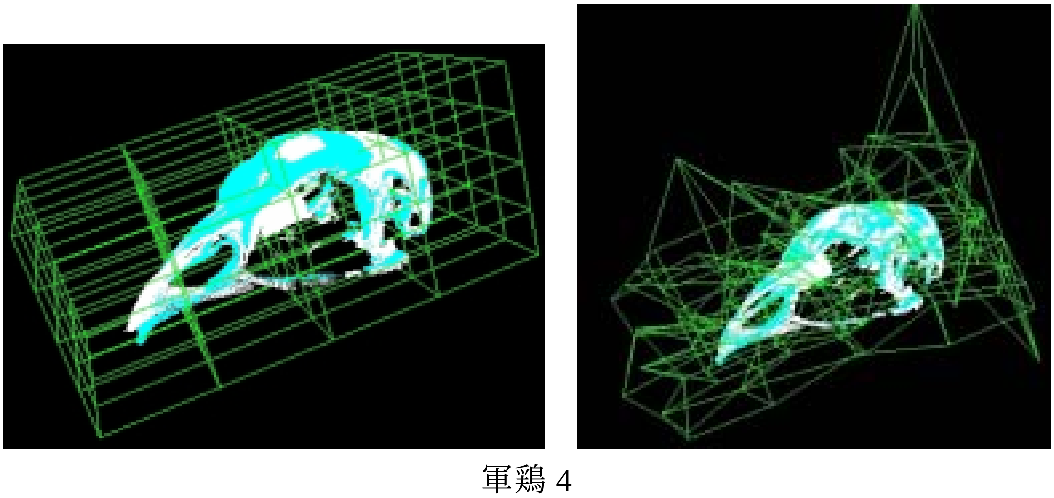
図 5.12:FFD の結果(5)



軍鶏 2

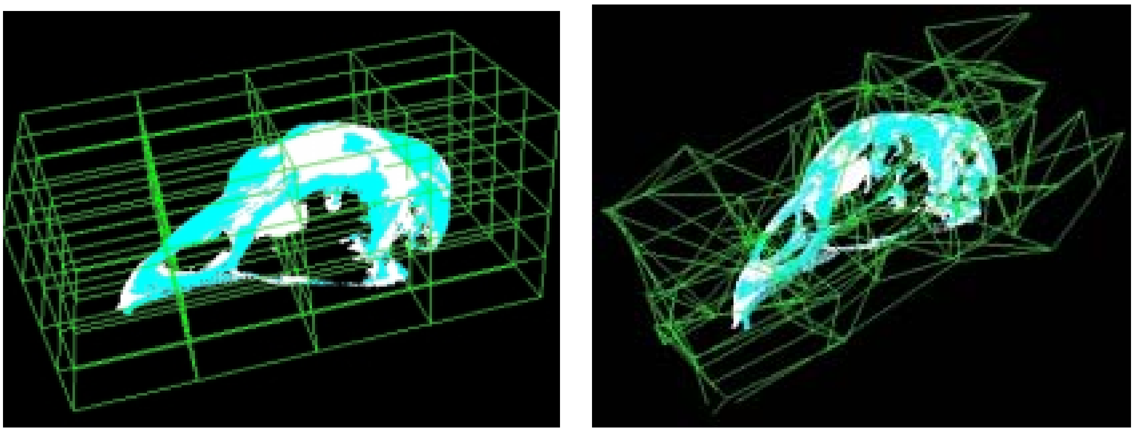


軍鶏 3

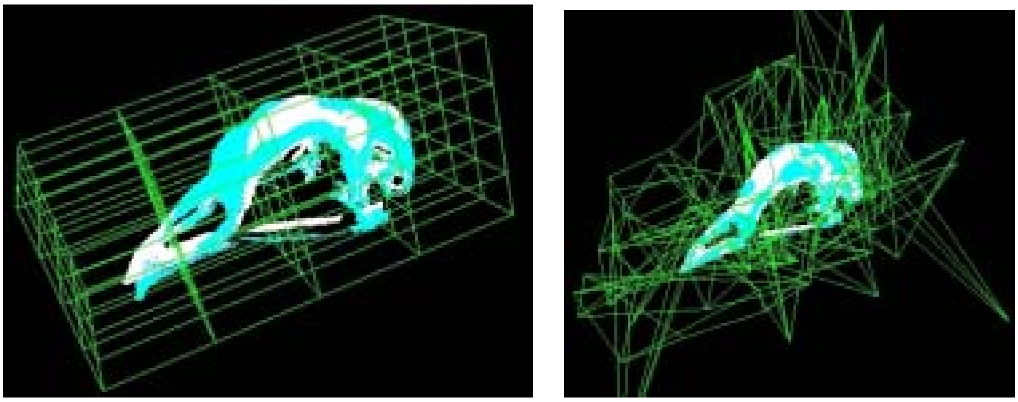


軍鶏 4

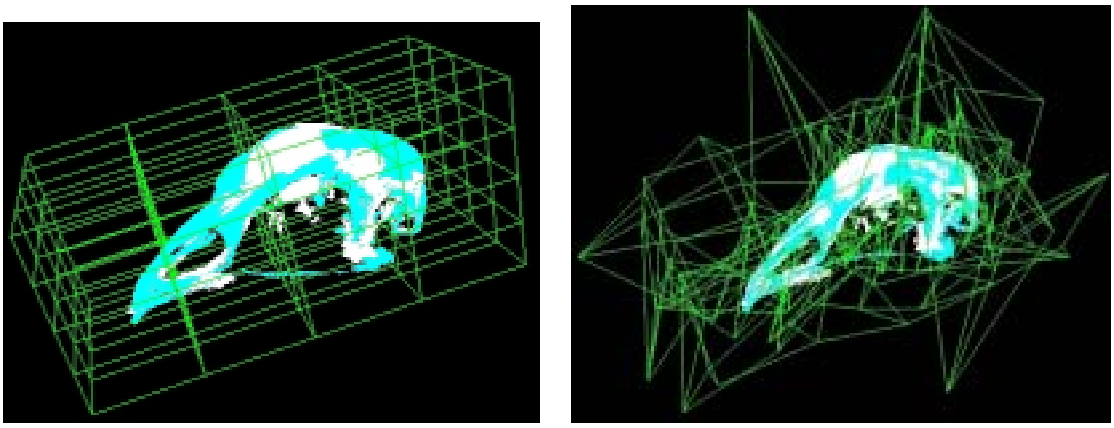
図 5.13:FFD の結果(6)



軍鶏 5

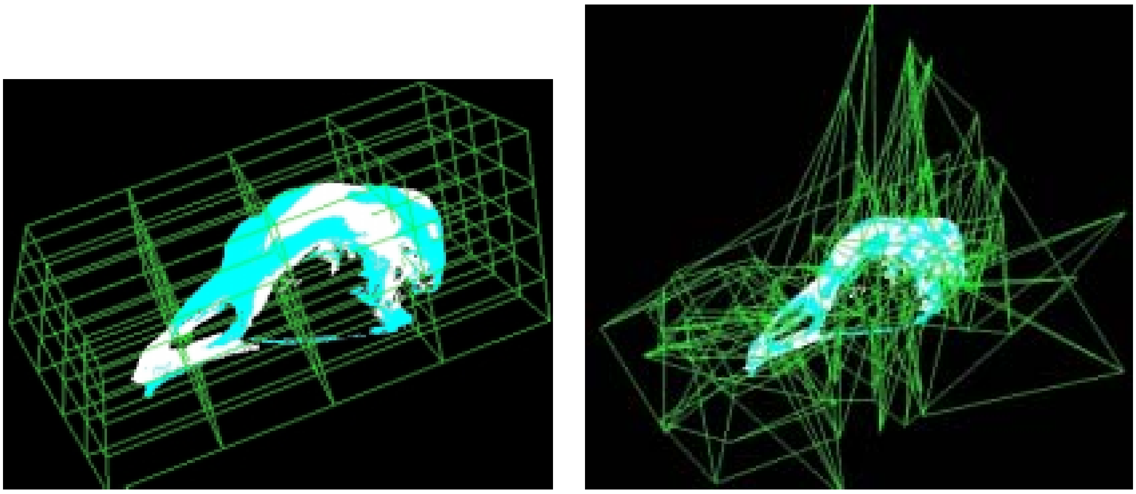


白色レグホン 1

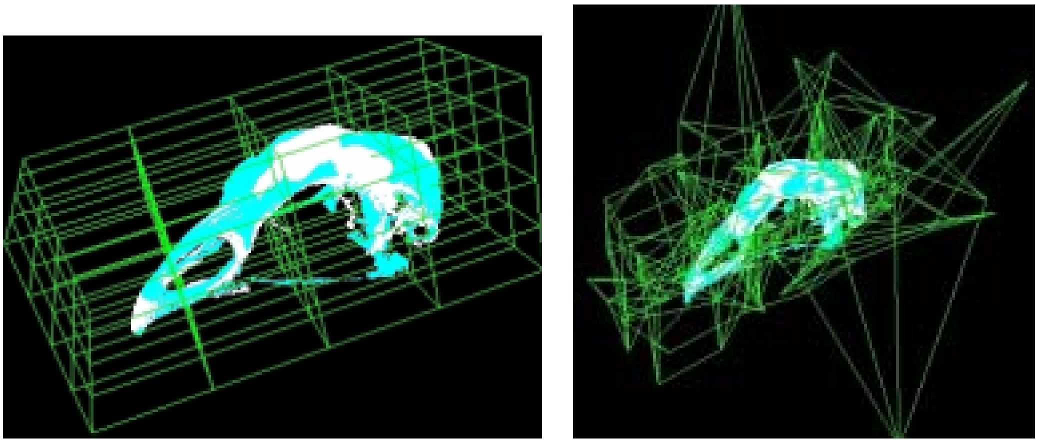


白色レグホン 2

図 5.14:FFD の結果(7)



白色レグホン 3



白色レグホン 4

図 5.15:FFD の結果(8)

5.4　主成分分析

この節では前節の FFD の結果を主成分分析で解析する．主成分分析は FFD の結果の格子点の動き $\mathbf{D}_{ijk}$ を変数とした主成分分析を行ったところ，第一主成分の寄与率は 18%，第二主成分の寄与率は 10%であった．また，第十四主成分までで累積寄与率が 90%を超えた．制御格子点の数は全部で 125 個あり，それぞれが三次元のデータを持っているので，もともとの次元数は

375 次元である．375 次元有ったものを，主成分分析することで 14 次元でその 9 割を表すことができた．第一主成分と第二主成分を軸としてで散布図を作ると図 5.16 のようになった．同じ種類の鶏同士が集まる傾向があるのが見える．つまり，同種の個体間の違いよりも品種間の違いのほうが大きいという直感に非常に合致した結果を得ることができたこのことより，本手法が少なくとも鶏の頭骨の形態解析に利用可能であることが示されたと言える．

　また，主成分分析の第一主成分と第二主成分のベクトルを可視化したものを図 5.17，5.18 に示す．白いデータは軍鶏 1 のデータ，青のデータは主成分により変形された軍鶏 1 のデータである．第一主成分では，頭のてっぺんの膨らみに関して変形されており，第二主成分では，くちばしと頭蓋骨の間のへこみ部分について変形されている．このくちばしと頭蓋骨の間のへこみ部分は「ストップ」と呼ばれ，形態学の観点からも非常に重要視されている部分である．

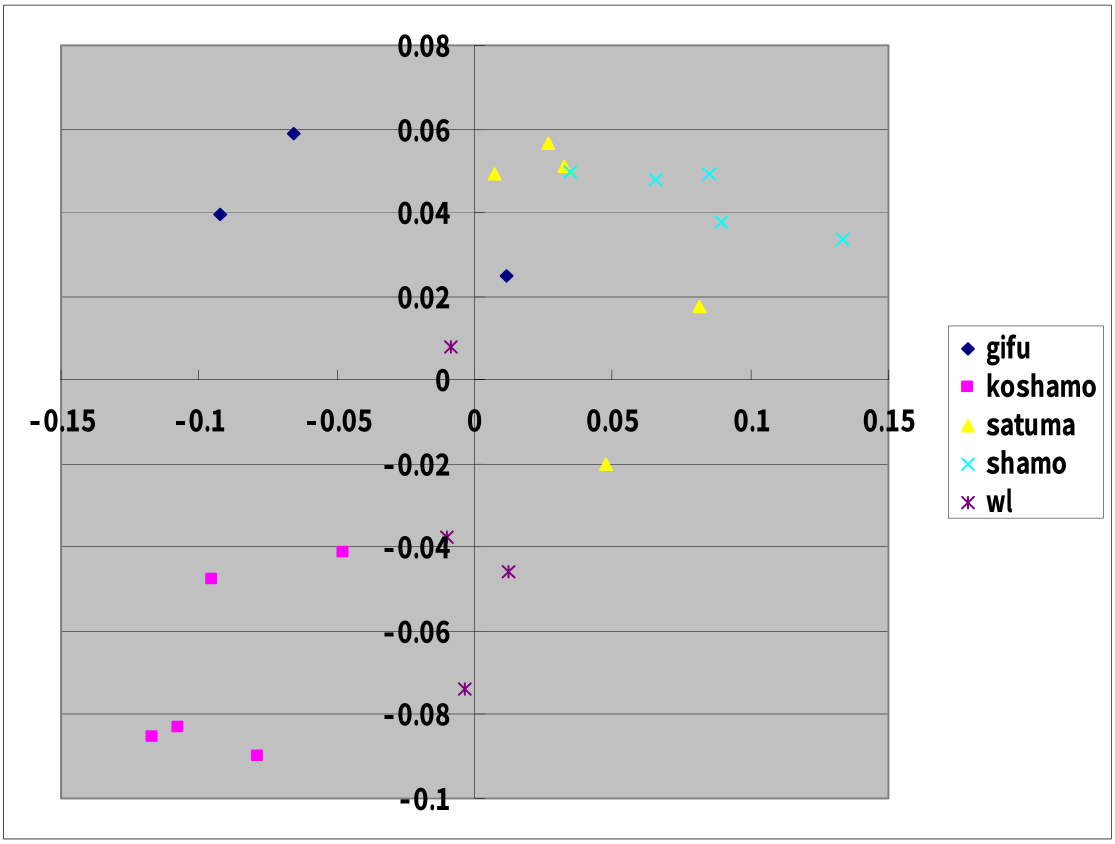


図 5.16:主成分分析の結果

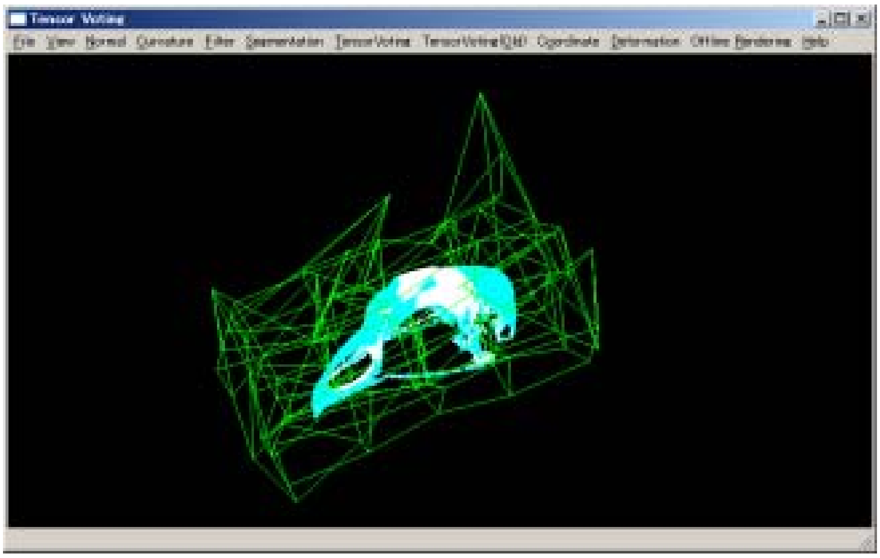


図 5.17:第一主成分

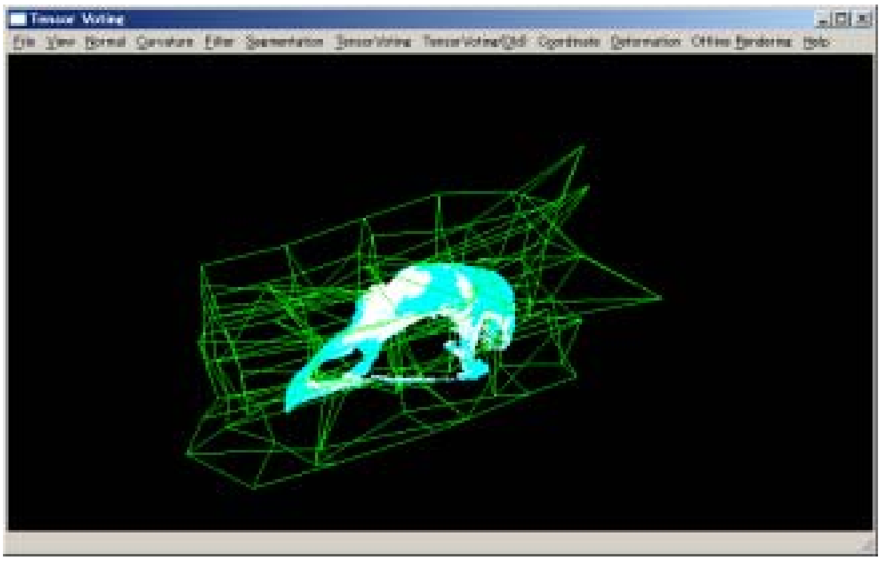


図 5.18:第二主成分

5.5　階層クラスタ分析の結果

$\mathbf{D}_{ijk}$ をパラメータとして階層クラスタ分析を行った．距離尺度としてはす

べての $\mathbf{D}_{ijk}$ の二乗和を用いており，融合の際のクラスタ間の距離の定義はward 法に基づいて決定している．その結果は図 19 のようになった．まず同一品種間が正しく同一クラスタに収まるという結果が一目瞭然である．これは，主成分分析の適用により得られた散布図において，同一品種が近くに集まる傾向が強いことの裏づける結果である．また，生物学の専門家から，野生種に近い岐阜地鶏と白色レグホンが先にクラスタわけされるのはいい傾向ではないかという意見をいただいた．

また, SAI を用いた手法により得られた階層クラスタ分析の結果を図 20 に示す．SAI を用いた手法では，岐阜地鶏や白色レグホンがうまく一つのクラスタに収まっておらず，本手法は形状誤差を表す手法として優れていると考えられる．

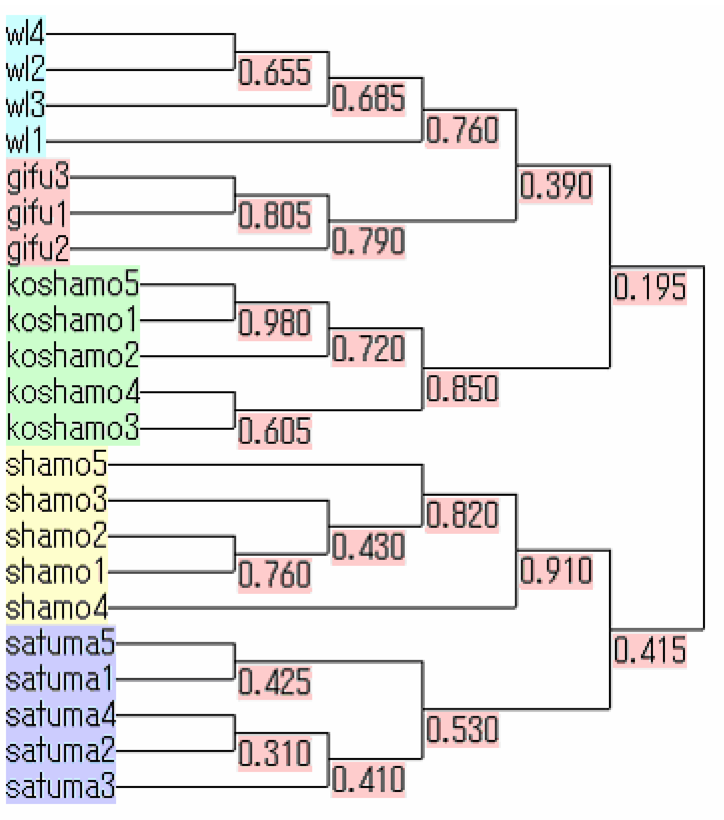


図 5.19:階層クラスタ分析の結果

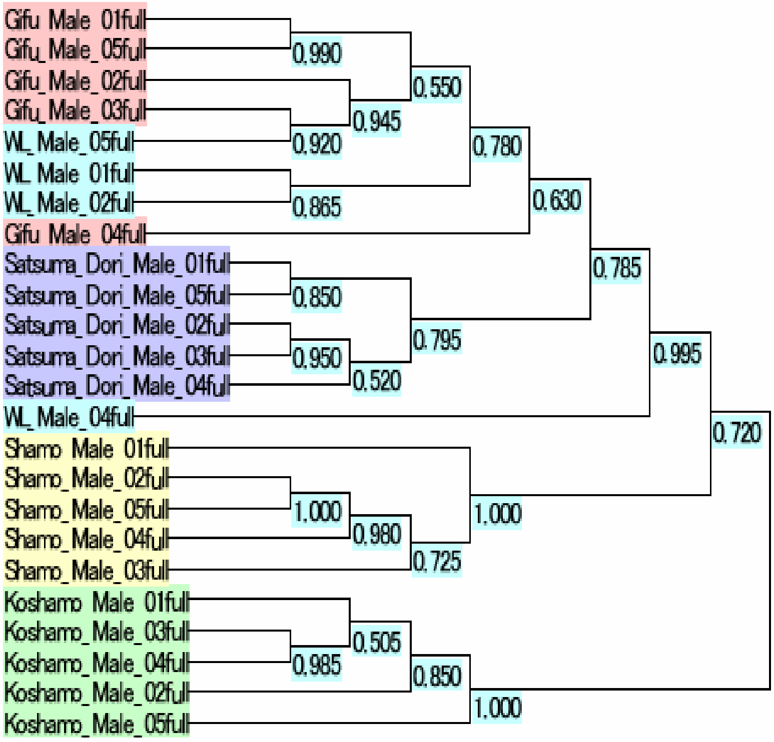


図 20:SAI の結果による階層クラスタ分析

第 6 章

まとめ

6.1 結論

本論文では三次元形状解析手法として，三次元形状変形の手法である FFD を用いた特徴点を必要としない三次元解析手法を提案した．対応点を見つける際に従来手法では特徴点を利用していたが, 提案手法を用いることにより，特徴点を利用することなく対応点を探し出し，FFD の変形によって 2 つの物体の形状を近づけることができるようになった．

2 つの物体形状がある程度以上離れていると対応点がうまく見つけられず変形がうまくいかないという問題があったが，局所的位置合わせと組み合わせることによりうまく変形ができるようになった．

従来手法では多くの特徴点を必要としたため，解剖学的知識からの特徴点の選択とその特徴点の抽出が必要であった．しかし，それは容易に行えることではなく，導入には困難が伴う手法であった．しかし，本論文の提案手法により特徴点を用いることなく FFD による形状比較が行えるようになったことで，複数の解析対象のレーザーセンサから得られる距離画像があれば解析を行うことが可能となった．これは，さまざまな場面で導入が容易な手法である．

さらに精度をよくするため，FFD の変形の評価関数を点と点の距離で計算していたものを点と面の距離で計算することにより，初期位置に対してよりロバストな変形をできるようになった

さらに，FFD の基底関数に B-Spline 曲線を用いることで，ユーザにわかりやすい変形結果を得られるようになった．解析において，変数の意味がユーザが理解できることは非常に重要なことでる．

第 5 章では鶏の頭骨を通じて実際に解析を行った．その結果 5 品種，各 3〜5 体のクラスタわけを行ったところ，品種ごとにクラスタが分かれる結果となった．品種間の形状の違いは，同一品種間での形状の違いより大きいという直感に合致しており，本手法により形状の差異をよく表現できていると考えられる．

また，主成分分析の結果から解剖学的観点で重要とされる部位が提案手法でも物体を特徴付ける部位であるという結果が得られ，解剖学的な解析にも有用であるといえる．

6.2　今後の課題

本論文の提案手法は，最初に述べたとおりさまざまな目的に適用できる手法を目指している．本論文の実験により鶏の頭骨の形状解析を行い，品種の分類がうまくできたことを示したが，他の物体データや目的に関しても本手法を適用しどのような結果が得られるか検討する必要がある．

本論文では制御格子点の数を決めて実験を行った．しかしこの数は，解析の目的や物体の三次元形状データの解像度などにより変わってくるはずである．今後は解析目的や解像度，データの分散等から最適な制御格子点の数を求める手法を考える必要がある．

局所的位置合わせにおける分割数についても今回は半分にするということで固定していた．しかし，半分にしただけでは十分に位置合わせできないこともある．逆に分割しすぎると，データの特徴がなくなり位置合わせによって本来とは別の場所に位置合わせがされてしまう可能性もある．よって最適な分割数や分割場所を決定するための手法について研究していく必要がある．

ICP-FFD においても繰り返し回数を固定で行っていたため，これらの回数においても考える必要がある．

謝辞

本研究を進めるにあたり，忙しい中でわざわざ時間を割いて毎週のようにミーティングを開きアドバイスをしていただいた池内克史教授に心からお礼を申し上げます．また，研究のすばらしい環境を与えていただき，本当にありがとうございました．

高松淳さんには，直接の指導にあたっていただき，研究内容から研究の進め方，論文の書き方まで広く相談にのっていただき，いつも親切丁寧にご指導いただきました．この場を借りて深く感謝の意を表したいと思います．

研究室の同じ幾何グループのみなさまには，研究内容やプログラムなどでさまざまなアドバイスをいただきました．深く感謝を申し上げます．

同期である塩田一貴さん，太田大介さん，宮崎麻衣子さんには研究だけでなく日常の相談にのっていただき，また，とても楽しい時間を過ごさせていただきました．深く感謝いたします．

その他の研究室のみなさまにも非常に多くのアドバイスをいただきました．本当にありがとうございます．

研究を進めるにあたっていつも快適な環境を作り出してくださった秘書，助手のみなさま，ありがとうございました．

最後に，学生生活をさまざまな面から支えてくださった家族，友人のみなさまに最大限の感謝の意を表したいと思います．本当にありがとうございました．

参考文献

[1] P. Besl and N. McKay, "A Method for Registration of 3-D Shapes", IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 14, No. 2, 1992

[2] W. E. Lorensen and H. E. Cline, “Marching cubes: A high resolution 3-d surface construction algorithm”, In Proceedings of SIGGRAPH, pp.163-169, ACM, 1987

[3] Y. Hayashi, et al, "Measurement of the Skull of Jangle and Domestic Fowls." Jpn. J. Vet. Sci. 44(6), pp. 1003-1006, 1982

[4] J. Takamatsu, et al, "A Novel Osteometrical Method Using Computer Vision Techniques for Comparison of Morphological Differences," J. Yamashina Inst. Ornithol., 36 2, March 2005

[5] T Masuda, et al, "Shape difference visualization for ancient bronze mirrors through 3D range images," The Journal of visualization and computer animation, Vol.14, No. 4, pp.183-196, 2003

[6] S. Petitjean, "A Survey of Methods for Recovering Quadrics in Triangle Meshes", ACM Computing Surveys, Vol. 34, No. 3, pp. 211-262 2002

[7] Berthold.K.P.Horn, “Extended Gaussian Images," Proc. IEEE, Vol.72, No.12, pp.1671-1686, 1984

[8] Kang, S.B. and Ikeuchi, K., "The Complex EGI: New Representation for 3-D

Pose Determination," IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 15, No. 7, pp. 707-721, July 1993

[9] A. Ono, “Face recognition with Zernike moments”, Trans. IEICE, Vol. J85-D-II, No. 7, pp. 1149.1156, 2002

[10] K. Ikeuchi and Martial Hebert, "Spherical Representations: from EGI to SAI", CMU-CS, 1995

[11] A. Johnson, Spin-Images: “A Representation for 3-D Surface Matching, doctoral dissertation”, The Robotics Institute, Carnegie Mellon Univ., 1997

[12] A. Johnson and M. Hebert, "Using Spin Images for Efficient Object Recognition in Cluttered 3D Scenes", IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 21, No. 5, pp. 433-449, 1999

[13] C. Conde, R. Cipolla, L. Rodriguez-Aragon, A. Serrano and E. Cabello, "3D Facial Feature Location with Spin Images", IAPR Conference on Machine Vision Appricattions, pp. 418-421, 2005

[14] T. Sederberg, "Free-From Deformation of Solid Geometric Models", Proceedings of ACM SIGGRAPH in Computers & Graphics, 20(4), 151-160. 1986

[15] M. Mochimaru and M. Kouchi, "Statistics for 3D Human Body Forms", SAE Digit Human Modeling for Design and Engineering, 2000

[16] M. Mochimaru, M.Kouchi, H.Yahara, and Y.Fukui,“Automatic landmarking based on 3-D foot database using the FFD method”, SAE Digital Human Modeling for Design and Engineering, 2004, pp.2004-01-2197

[17] M. Kouchi and M. Mochimaru, "Analysis of 3D Human Face Forms and Spectacle Frames Based on Average Forms", Digital Human Modeling Conference, pp.69-89, 2002

[18] 鎌倉真音，大石岳史，高松淳，池内克史，"カンボジアバイヨン寺院尊顔の分類から見た尊顔制作背景"，人文科学とコンピュータシンポジウム じんもんこん 2005

[19] Berthold.K.P.Horn, “Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions”, Journal of the Optical Society of America A, vol.5, no.7, pp.1127-1135, 1987

[20] S. Umeyama, “Least-Squares Estimation of Transformation Parameters Between Two Point Patterns”, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.13, no.4, 1991.

[21] Y. Chen and G. Medioni : Object modelling by registration of multiple range images, Image and Vision Computing, Vol. 10, No. 3, pp. 145-155, 1992

[22] T. Oishi, R. SAgawa, A.Nakazawa, R. kurazume ando K. Ikeuchi: "Parallel alignment of a large number of range images", The 4th International Conference on 3D Digital Imaging and Modeling, pp. 195-202, 2003

[23] A. Makadia, A. Patterson IV, and K. Daniilidis: "Fully Automatic Registration of 3D Point Clouds", IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, vol.1, pp.1297-1304, 2006

[24] K. Nishino and K. Ikeuchi: ”Robust Simultaneous Registration of Multiple Range Images”, In Proc. of Fifth Asian Conf. on Computer Vision ACCV’02,

pp. 454-461, 2002

[25] L. Ikemoto, N. Gelfand, and M. Levoy. “A hierarchical method for aligning warped meshes”. In Fourth International Conference on 3D Digital Imaging and Modeling 2003

[26] http://konicaminolta.jp/products/industrial/instrument/3d/vivid910/index.html