

一般曲線座標系における非圧縮性乱流数値解析に 適した差分スキーム

—第 1 報, 一般座標変換を施した基礎方程式系の解析的保存特性—

Proper Finite Difference Schemes for Simulations of Incompressible Turbulent Flow in
Generalized Curvilinear Coordinates

(1st Report, Analytical Conservative Properties of Coordinate Transformed Basic Equations)

小 垣 哲 也*・小 林 敏 雄*・谷 口 伸 行*

Tetsuya KOGAKI, Toshio KOBAYASHI and Nobuyuki TANIGUCHI

1. 緒 言

非圧縮性乱流を解析する計算手法としては, スペクトル法, 有限差分法 (有限体積法), 有限要素法といった手法があり, 主として, 計算対象の特性や必要とされる計算精度に応じて最適な計算手法が選択されてきた. スペクトル法は, 流れ場を記述する基礎方程式系を打ち切り誤差なしで離散化することができるため, 最も高精度である. 従って, スペクトル法は, 一様等方性乱流や平行平板間内流れの DNS (Direct Numerical Simulation) や LES (Large Eddy Simulation) に適用され, 高精度な結果を提供するとともに, 乱流の理解に貢献してきた¹⁾²⁾³⁾. しかし, スペクトル法は, 流れ場の幾何形状の柔軟性に優れた有限要素法を組み合わせたスペクトルエレメント法 (Spectral Element Method) に拡張され, 円柱周りの流れに適用された例⁴⁾を除いて, 一般的には直交座標系の単純な流れ場形状への適用に限定される. 従って, より複雑な幾何形状の乱流場の解析は, 他の 2 つの手法にゆだねざるを得ない. 境界適合座標系を利用した有限差分 (体積) 法は, 有限要素法と比較して, 形状の柔軟性は劣るが, 計算コードのメモリ使用量および計算時間に関して優位にあり, 任意形状に対する乱流解析手法として適当であると考えられる. しかし, 有限差分法による LES あるいは乱流モデルを用いない疑似 DNS には, 2 次精度では不十分であり, さらに, 基礎方程式の解析的な保存特性が離散化式においても適切に近似されることが, 高精度で安定な解を得るのに必要であることが森西⁵⁾により示された. そこで, 森西は⁵⁾, 要求される解析的保存特性を満足する適切な 4 次精度差分スキームを提案した. しかし, この森西のスキームは, 等間隔正規

直交座標系に対するものであるため, 一般座標系に対する拡張が望まれる.

そこで本研究は, まず第 1 報において, 一般座標変換した基礎方程式系の解析的保存特性が, 森西⁵⁾が明らかにした正規直交座標系における基礎方程式系の解析的保存特性と全く同じになることを示す. また, 第 2 報, 第 3 報において, 森西が提案した等間隔正規直交座標系に対する適切な差分スキーム⁵⁾を, 一般座標系に対して拡張し適切な差分スキームを構成する.

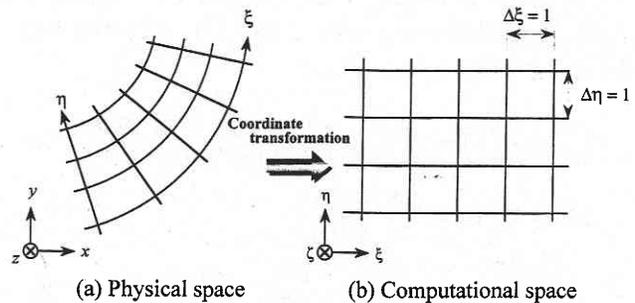


図 1 座標変換

2. 一般座標変換

複雑な形状をした流れ場を有限差分法または有限体積法で解析する際には, 図 1 (a) のような流れ場形状に適合した計算格子を作成する. しかし, 流れ場を支配する基礎方程式系は, 計算格子が等間隔直交格子である場合, 最も容易に離散化することができる. そこで, 物理座標系 $(x, y, z) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 上で作成された計算格子を, 格子間隔 $\Delta \xi = \Delta \eta = \Delta \zeta = 1$ の等間隔正規直交座標系である計算

*東京大学生産技術研究所 第 2 部

研究速報
座標系 $(\xi, \eta, \zeta) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ へ変換することを考える。

ある変数 Φ の1階微分は、変数変換により次のように物理座標系から計算座標系へ変換される。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_m} \quad (1)$$

ここで、以降ことわりのない場合、一つの項の中で同じ指標が2度現れる時は、その指標を変えた総和を表す、Einsteinの和の規約に従うものとする。次章で保存形の基礎方程式系を導出するため、式(1)の保存形式を導く。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = J \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \Phi \right) \quad (2)$$

ここで、 J は物理空間から計算空間への変換で定義される Jacobian であり、3次元の場合、

$$J^{-1} = \det \begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{bmatrix} \\ = x_\xi y_\eta z_\zeta + x_\eta y_\zeta z_\xi + x_\zeta y_\xi z_\eta \\ - x_\zeta y_\eta z_\xi - x_\eta y_\zeta z_\xi - x_\xi y_\zeta z_\eta \quad (3)$$

与えられる。式(3)中の x_ξ は偏微分 $\partial x / \partial \xi$ を表し、その他 y_ξ 等も同様である。また、ある変数 Φ の2階微分の保存形式は1階微分を繰り返すことにより、以下のように導くことができる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = J \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_n} \right) \quad (4)$$

$$\Delta \Phi = \nabla^2 \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) \\ = J \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{1}{J} G^{mn} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_n} \right) \quad (5)$$

式(5)中の G^{mn} は、物理空間における計算格子のひずみの度合いを表す格子ひずみ率 (mesh skewness factor) であり⁶⁾ 次式で与えられる。

$$G^{mn} = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \quad (6)$$

定義から明らかのように、 G^{mn} は対称テンソルであり、 $G^{mn} = G^{nm}$ である。また、直交格子でしかも (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 軸の方向が (x_1, x_2, x_3) 軸の方向と一致している場合、

$$G^{mn} \neq 0, \quad (m = n)$$

$$G^{mn} = 0, \quad (m \neq n)$$

である。

3. 座標変換を施した基礎方程式系の解析的保存特性

保存形の定義は森西⁵⁾に従い、時間発展方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + F^1 + F^2 + F^3 \dots = 0 \quad (7)$$

中の項 $F^k (k=1, 2, \dots)$ が次のような発散形で表される場合、その項は保存形であるとする。

$$F^k = \nabla \cdot (G^k) = \frac{\partial}{\partial x_j} (G_j^k) \quad (8)$$

非圧縮性流体の基礎方程式は連続の式および Navier-Stokes 方程式であり、以下のように表現される。

$$(\text{Cont.}) \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\text{Conv.})_i + (\text{Pres.})_i + (\text{Visc.})_i = 0 \quad (10)$$

上式中の記号 $(\text{Pres.})_i$ および $(\text{Visc.})_i$ は Navier-Stokes 方程式中の圧力項および粘性項を表し、次のように定義される。

$$(\text{Pres.})_i \equiv \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (11)$$

$$(\text{Visc.})_i \equiv - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (12)$$

さらに、 $(\text{Conv.})_i$ は対流項であり、保存形である発散型 $(\text{Div.})_i$ の他に勾配型 $(\text{Adv.})_i$ 、混合型 $(\text{Skew.})_i$ および回転型 $(\text{Rot.})_i$ がある。

$$(\text{Div.})_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) \quad (13)$$

$$(\text{Adv.})_i \equiv u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (14)$$

$$(\text{Skew.})_i \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) + \frac{1}{2} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (15)$$

$$(\text{Rot.})_i \equiv u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_j u_j}{\partial x_i} \quad (16)$$

回転型の保存特性についての議論は勾配型と同じであるので省略する⁵⁾。式(10)の $i=1$ 成分に u_1 を乗じることにより速度の2乗量 $u_1^2/2$ の輸送方程式を、さらに、式(10)の i 成分に u_i を乗じて縮約を取ることにより、運動エネルギー $K (\equiv u_i u_i/2)$ の輸送方程式を導出できる。Navier-

Stokes 方程式と速度の 2 乗量, 運動エネルギーの輸送方程式中の各項の保存特性については, 森西⁵⁾に詳しく説明されているので割愛するとし, その結果のみを表 1 に示す.

表 1 各輸送方程式中の各項の保存特性 (森西¹⁾から抜粋)

Terms in Mementum Eq.	u_i	$u_i^2/2$	$K = u_i^2/2$
(Conv.)	(Div.)	◎	○
	(Adv.)	○	○
	(Skew.)	○	◎
(Pres.)	◎	×	○
(Visc.)	◎	×	×

表中の記号は, ◎が保存形, ○は (Cont.)=0が満足されると保存形, ×は非保存形であることを示している.

次に, 座標変換を施した基礎方程式系を導出し, その解析的保存特性を調べる. まず, 連続の式(9)および Navier-Stokes 方程式(10)を, 2章で説明した概念により座標変換すると以下ようになる.

$$(\text{Cont.})^{\text{CT}} \equiv \frac{\partial U_m}{\partial \xi_m} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\text{Conv.})_i^{\text{CT}} + (\text{Pres.})_i^{\text{CT}} + (\text{Visc.})_i^{\text{CT}} = 0 \quad (18)$$

$$(\text{Pres.})_i^{\text{CT}} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial \xi_m} \quad (19)$$

$$(\text{Visc.})_i^{\text{CT}} \equiv - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right) \quad (20)$$

ここで, U_m は体積フラックスまたは反変速度成分であり, 次式で定義される.

$$U_m = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} u_j \quad (21)$$

座標変換後の連続の式(17)および Navier-Stokes 方程式(18)は, 両辺 Jacobian J で除されている. また, 右付き添字^{CT}は座標変換された項であることを表している. 式(18)中の対流項 $(\text{Conv.})_i^{\text{CT}}$ は, 式(13)~(15)と同様に発散型 $(\text{Div.})_i^{\text{CT}}$, 勾配型 $(\text{Adv.})_i^{\text{CT}}$ および混合型 $(\text{Skew.})_i^{\text{CT}}$ が定義できる.

$$(\text{Div.})_i^{\text{CT}} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_m} (U_m u_i) \quad (22)$$

$$(\text{Adv.})_i^{\text{CT}} \equiv U_m \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \quad (23)$$

$$(\text{Skew.})_i^{\text{CT}} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_m} (U_m u_i) + \frac{1}{2} U_m \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \quad (24)$$

ここで, 座標変換前後の対流項(13)~(15)と比較すると, 対流成分 u_j が体積フラックス U_m になっていることを除いて, 形式的に大きな違いがないことがわかる. また, Navier-Stokes 方程式中の対流項の各型は, 座標変換前と全く同様に次のように関係づけられる.

$$(\text{Adv.})_i^{\text{CT}} = (\text{Div.})_i^{\text{CT}} - u_i (\text{Cont.})^{\text{CT}} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} (\text{Skew.})_i^{\text{CT}} &= (\text{Div.})_i^{\text{CT}} - \frac{1}{2} u_i (\text{Cont.})^{\text{CT}} \\ &= (\text{Adv.})_i^{\text{CT}} + \frac{1}{2} u_i (\text{Cont.})^{\text{CT}} \end{aligned} \quad (26)$$

式(18)~(26)から, 座標変換後の Navier-Stokes 方程式の解析的保存特性が, 表 1 に示される変換前のものと同じになることがわかる.

次に, 式(18)の $i = 1$ 成分に u_1 を乗じることにより速度の 2 乗量 $u_1^2/2$ の輸送方程式を導くと以下ようになる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u_1^2}{2} \right) + u_1 (\text{Conv.})_1^{\text{CT}} \\ + u_1 (\text{Pres.})_1^{\text{CT}} + u_1 (\text{Visc.})_1^{\text{CT}} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

左辺第 2 項は, Navier-Stokes 方程式中の対流項の型に応じて, 次のように変形できる.

$$u_1 (\text{Div.})_1^{\text{CT}} = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(U_m \frac{u_1^2}{2} \right) + \frac{u_1^2}{2} (\text{Cont.})^{\text{CT}} \quad (28)$$

$$u_1 (\text{Adv.})_1^{\text{CT}} = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(U_m \frac{u_1^2}{2} \right) - \frac{u_1^2}{2} (\text{Cont.})^{\text{CT}} \quad (29)$$

$$u_1 (\text{Skew.})_1^{\text{CT}} = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(U_m \frac{u_1^2}{2} \right) \quad (30)$$

また, Navier-Stokes 方程式中の圧力項および粘性項に起因する式(27)中の左辺第 3 項および第 4 項についても, 以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} u_1 (\text{Pres.})_1^{\text{CT}} &= \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(p \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} u_1 \right) \\ &\quad - p \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} u_1 \right) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} u_1 (\text{Visc.})_1^{\text{CT}} &= - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\nu u_1 G^{mn} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_n} \right) \\ &\quad + \nu G^{mn} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_n} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_m} \end{aligned} \quad (32)$$

研究速報

式(27)~(31)から、座標変換を施した速度の2乗量 $u_1^2/2$ の輸送方程式の保存特性についても、座標変換前と全く同様であることが分かる。その他の速度の2乗量 $u_2^2/2$, $u_3^2/2$ の保存特性も同様である。さらに、式(18)の i 成分に u_i を乗じて縮約を取ることにより、運動エネルギー K の輸送方程式を導出すると以下ようになる。

$$\frac{1}{J} \frac{\partial K}{\partial t} + u_i (\text{Conv.})_i^{\text{CT}} + u_i (\text{Pres.})_i^{\text{CT}} + u_i (\text{Visc.})_i^{\text{CT}} = 0 \quad (33)$$

Navier-Stokes 方程式中の圧力項および粘性項に起因する式(33)中の左辺第3項および第4項は、次のように変形できる。

$$u_i (\text{Pres.})_i^{\text{CT}} = \frac{\partial}{\partial \xi_m} (p U_m) - p (\text{Cont.})^{\text{CT}} \quad (34)$$

$$u_i (\text{Visc.})_i^{\text{CT}} = - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(u_i \nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right) + \nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \quad (35)$$

対流項に起因する式(33)中の左辺第2項は、速度の2乗量の輸送方程式におけるものと同様に評価できる。従って、座標変換した運動エネルギー K の輸送方程式も座標変換する前と同様の保存特性を持つことがわかる。

4. 結 論

まず、予備知識として変数変換を利用した一般座標変換の概要を示し、その概念により、座標変換を施した非圧縮

性流体の基礎方程式系を導いた。そして、座標変換した Navier-Stokes 方程式、速度の2乗量の輸送方程式および運動エネルギー K の輸送方程式の各項の解析的保存特性が、森西⁵⁾が明らかにした正規直交座標系における基礎方程式系の解析的保存特性と同じになることを明らかにした。

謝 辞

本研究の着想は、名古屋工業大学、森西洋平助教授の研究発表および論文に依るところが大きい。また、同氏から本研究に関する貴重なご意見を頂いた。記して謝意を表する。

(1997年4月22日受理)

参 考 文 献

- 1) Moin, P. and Kim, J., Numerical investigation of turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.*, 118, 341-377 (1982).
- 2) Kim, J., Moin, P. and Moser, R., Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, 177, 133-166 (1987).
- 3) Mansour, N. N., Kim, J. and Moin, P., Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.*, 194, 15-44 (1988).
- 4) Karniadakis, G. E. and Triantafyllou, G. S., Three-dimensional dynamics and transition to turbulence in the wake of bluff objects, *J. Fluid Mech.*, 238, 1-30 (1992).
- 5) 森西洋平, 非圧縮性流体解析における差分スキームの保存特性, 日本機械学会論文集, 62-604, B(1996), 4090-4112.
- 6) Zang, Y., Street, R. L., Koseff, J. R., A Non-staggered Grid, Fractional Step Method for Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equations in Curvilinear Coordinates, *J. Comput. Phys.*, 114, 18-33 (1994).