

一般曲線座標系における非圧縮性乱流数値解析に 適した差分スキーム

—第 2 報, Staggered 格子系における差分スキーム—

Proper Finite Difference Schemes for Simulations of Incompressible Turbulent Flow
in Generalized Curvilinear Coordinates

(2nd Report, Finite Difference Schemes for The Maliska's Staggered Grid System)

小 垣 哲 也*, 小 林 敏 雄*, 谷 口 伸 行*

Tetsuya KOGAKI, Toshio KOBAYASHI and Nobuyuki TANIGUCHI

1. 緒 言

第 1 報では, 座標変換を施した非圧縮性流体の基礎方程式を導出し, それらの解析的保存特性が, 座標変換前と全く同様であることを示した. 座標変換後の基礎方程式は, 等間隔正規直交座標系である計算空間上で離散化される. 従って, 森西¹⁾により示された解析的保存特性を適切に近似する差分スキームを, 座標変換後の基礎方程式に容易に拡張できる.

第 2 報では, 速度・圧力といった変数が定義される場所の違いからいくつかに区分される格子配列系の中で, Maliska²⁾の Staggered 格子配列系について取り上げ, その格子系における, 解析的保存特性を離散的に適切に近似する 2 次および 4 次精度差分スキームを構成する.

2. 格子配列系

一般座標系による流れの数値解析には, 第 1 報で導出したような, 座標変換を施した基礎方程式が直交速度成分を基礎変数とする場合の他に, 反変あるいは共変速度成分が基礎変数となる座標変換の方法もある³⁾. しかし, 後者の場合, 座標変換した基礎方程式中にソース項が現れ保存形とはならず, 離散化も前者と比較して煩雑である. 従って, ここでは, 基礎変数が直交速度成分である場合のみを考える. これまで, 一般座標系における格子配列として, 図 1 に示すものが使用されている. 図 1 (a) に示される Regular 格子系では, 直交速度成分, 反変速度成分, 圧力が同位置に定義されている. 従来から, この格子系は圧力場にチェス盤状の振動が生じることで知られている. その問題を解決するため, Rhie⁴⁾らはセル界面における速度を求め

るために特別な補間を導入した格子系 (図 1 (b)) を提案した. これらは「Collocation 格子系」と呼ばれている. また, 速度と圧力のデカップリングを防ぐ別の方法として, 速度成分の定義点が, 圧力の定義点からそれぞれの方向に半格子ずれた位置に定義される Staggered 格子系がある (図 1 (c)). しかし, 一般座標系において, この Staggered 格子配列は, 格子が 90 度回転した場合を考えると, 直交速度成分が格子界面に対して平行になり, 本来の Staggered 格子系の利点が失われてしまうことがわかる. Maliska²⁾は, 全ての直交速度成分をそれぞれのセル界面に定義した Staggered 格子系を提案した. この配列系の場合, 3 次元計算を想定すると, 9 個の運動量方程式を解く必要があるが, 前述の問題は回避される.

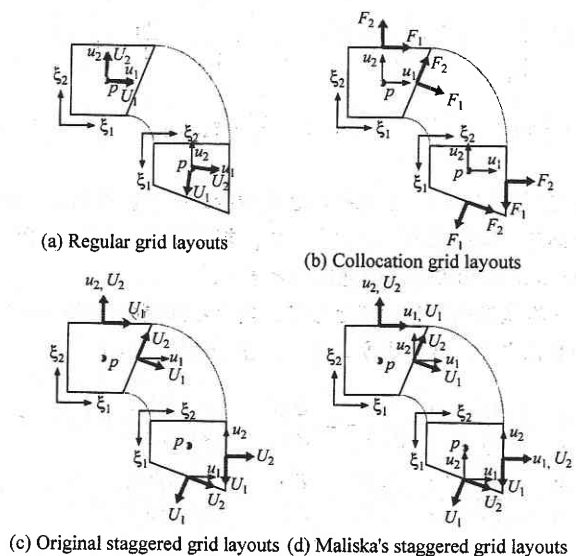


図 1 格子配列系

*東京大学生産技術研究所 第 2 部

研究速報

本報では、この図1(d)のMaliskaのStaggered格子系における差分スキームについて考察し、その格子系における適切な差分スキームを構成する。図1(a)のRegular格子系および図1(b)のCollocation格子系における差分スキームについては第3報で論じられる。

3. 離散オペレータの定義

第1報において、座標変換された基礎方程式中の速度、圧力といった従属変数の微分が、全て等間隔直交座標系である (ξ, η, ζ) 空間上における微分となることが示された。従って、離散化のための基本的な差分および補間スキームは、等間隔直交座標系で定義されていけばよい。任意の変数 Φ の間隔 nh_1 の ξ_1 方向の差分オペレータ、補間および任意の2つの変数 Φ, Ψ の積に対する補間は、森西¹⁾に従い、次のように定義する。

$$\left. \frac{\partial_n \Phi}{\partial_n \xi_1} \right|_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \equiv \frac{\Phi\left(\xi_1 + \frac{\dots}{2}, \xi_2, \xi_3\right) - \Phi\left(\xi_1 - \frac{\dots}{2}, \xi_2, \xi_3\right)}{nh} \\ = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} + \frac{n^2}{24} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi_1^3} h_1^2 + \frac{n^4}{1920} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi_1^5} h_1^4 + \frac{n^6}{322560} \frac{\partial^7 \Phi}{\partial \xi_1^7} h_1^6 + \dots \quad (1)$$

$$\left. \overline{\Phi}^{n \xi_1} \right|_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \equiv \frac{\Phi\left(\xi_1 + \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) + \Phi\left(\xi_1 - \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right)}{2} \\ = \Phi + \frac{n^2}{8} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_1^2} h_1^2 + \frac{n^4}{384} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi_1^4} h_1^4 + \frac{n^6}{46080} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi_1^6} h_1^6 \quad (2)$$

$$\left. \widetilde{\Phi \Psi}^{n \xi_1} \right|_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \equiv \frac{1}{2} \Phi\left(\xi_1 + \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) \Psi\left(\xi_1 - \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) \\ + \frac{1}{2} \Psi\left(\xi_1 + \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) \Phi\left(\xi_1 - \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) \quad (3)$$

式(1)と式(2)は、それぞれ2次精度の差分近似および補間である。離散式の表記において、補間を表す上付き添字は、Einsteinの和の規約の適用外とする。

4次精度の差分近似として、異なる間隔の差分の組み合わせにより、次のような3つの差分近似を示す¹⁾。

$$\frac{4}{3} \frac{\delta_1 \Phi}{\delta_1 \xi_1} - \frac{1}{3} \frac{\delta_2 \Phi}{\delta_2 \xi_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} - \frac{1}{480} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi_1^5} h_1^4 + \dots \quad (4)$$

$$\frac{9}{8} \frac{\delta_1 \Phi}{\delta_1 \xi_1} - \frac{1}{8} \frac{\delta_3 \Phi}{\delta_3 \xi_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} - \frac{1}{640} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi_1^5} h_1^4 + \dots \quad (5)$$

$$\frac{4}{3} \frac{\delta_2 \Phi}{\delta_2 \xi_1} - \frac{1}{3} \frac{\delta_4 \Phi}{\delta_4 \xi_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} - \frac{1}{30} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi_1^5} h_1^4 + \dots \quad (6)$$

4次精度の補間も同様にして次のように構成される¹⁾。

$$\frac{4}{3} \overline{\Phi}^{1 \xi_1} - \frac{1}{3} \overline{\Phi}^{2 \xi_1} = \Phi - \frac{1}{96} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi_1^4} h_1^4 + \dots \quad (7)$$

$$\frac{9}{8} \overline{\Phi}^{1 \xi_1} - \frac{1}{8} \overline{\Phi}^{3 \xi_1} = \Phi - \frac{3}{128} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi_1^4} h_1^4 + \dots \quad (8)$$

4. Staggered格子系における差分スキーム

ここでは、Staggered格子として、図1(d)に示されるMaliskaにより提案された格子系を考える。図1(c)の本来のStaggered格子系との違いは、各セル界面において、全ての直交速度成分 u_i が定義されていることである。これにより、各セル界面の中心での体積フラックス U_m

$$U_m = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} u_j \quad (9)$$

が補間を用いず得られる。

まず、連続の式と圧力項の2次精度の離散化は、次のようになる。

$$(\text{Cont.}-M2) \equiv \frac{\delta_1 U_m}{\delta_1 \xi_m} \quad (10)$$

$$(\text{Pres.}-M2)_i \equiv \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) \equiv \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\delta_1 p}{\delta_1 \xi_m} \quad (11)$$

上式のカッコ内、-M2はMaliskaの格子配列系における2次精度差分近似であることを示している。本報での議論は、全て座標変換後の項に対するものであるため、第1報において使用した、座標変換された項であることを示す右上付き添字^{CT}は全て省略する。

ここで、2次元における実際の離散化を図2で考えてみる。体積フラックス U_1 は式(9)を展開して次式から計算される。

$$U_1 = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} u_1 + \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} u_2 \quad (12)$$

ここで、セル界面に沿った直交速度成分 u_2 の離散化式中の圧力項は、式(11)を展開して次式のようになる。

$$(\text{Pres.}-M2)_2 \equiv \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_1} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} p \right) + \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_2} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} p \right) \quad (13)$$

式(13)右辺第2項の計算には、圧力が定義されていないノード点N,Pにおける圧力が必要となり、任意の補間を用いる必要がある。しかし、図2の場合、式(12)右辺第2項中の座標変換メトリック $\partial \xi_1 / \partial x_2$ が小さいので、体積フラックス U_1 の計算に占める直交速度成分 u_2 を含ん

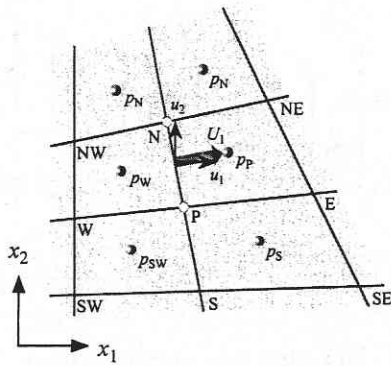


図2 体積フラックスの計算

だ式 (12) 右辺第 2 項の割合は小さい。つまり、直交速度成分の中で最もセル界面の垂直方向（体積フラックスの方向）に近い成分は、ほぼ精度を落とさずに計算されるが、それ以外の成分は、圧力項の計算において補間を導入した項の寄与が大きくなり計算精度および速度と圧力のカップリングに問題が残るが、体積フラックスの計算に占めるその項の寄与が相対的に小さいため、解の精度および安定性の面で、全体の計算には問題ないと考えられる。

運動エネルギーの輸送方程式中の圧力項の保存特性は、森西¹⁾に従い、大域的に取り扱い、

$$\sum_{x_1} \sum_{x_2} \sum_{x_3} u_i (\text{Pres.} - \text{M2})_i = \sum_{x_1} \sum_{x_2} \sum_{x_3} U_m \frac{\delta_1 p}{\delta_1 \xi_m} \quad (14)$$

$$U_m \frac{\delta_1 p}{\delta_1 \xi_m} = \frac{\delta_1 p}{\delta_1 \xi_m} U_m - p (\text{Cont.} - \text{M2}) \quad (15)$$

となる。従って、連続の式の離散式 (27) が満足される場合、圧力項の離散式 (11) は、運動エネルギーの輸送方程式中で大域的保存形となる。ここで、式 (11) 中の離散化には、式 (11) 中の第 2 番目の保存形式を用いるが、式 (14)、(15) の導出には、式 (11) 中の 3 番目の非保存形式を用いている。式 (11) 中の保存形式と非保存形式は、離散的に厳密には等しくないが、その保存特性に対する影響は小さいと考える。

森西¹⁾に従い、圧力と連続の式のカップリングアルゴリズムとして、Fractional Step 法を考える。

$$u_i^{n+1} = u_i^* - J \Delta t (\text{Pres.} - \text{M2})_i \quad (16)$$

$$(\text{Cont.} - \text{M2})^{n+1} = 0 \quad (17)$$

ここで、 Δt は時間間隔、上付き添字 n は時間ステップ数、上付き添字 $*$ は時間ステップ n と $n+1$ との間の中間的な時間ステップを示している。式 (17) に式 (16) を代入して、次の 2 次精度の圧力 Poisson 方程式が得られる。

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(G^{mn} \frac{\delta_1 p}{\delta_1 \xi_n} \right) = \frac{1}{\Delta t} (\text{Cont.} - \text{M2})^* \quad (18)$$

2 次精度の対流項差分スキームは、森西¹⁾のスキームを拡張し、次のように定義する。

$$(\text{Div.} - \text{M2})_i \equiv \frac{\delta_1 \overline{U_m^{1\xi_c} u_i^{1\xi_m}}}{\delta_1 \xi_m} \quad (19)$$

$$(\text{Adv.} - \text{M2})_i \equiv \overline{U_m^{1\xi_c}} \frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_m} \quad (20)$$

$$(\text{Skew.} - \text{M2})_i \equiv \frac{1}{2} (\text{Div.} - \text{M2})_i + \frac{1}{2} (\text{Adv.} - \text{M2})_i \quad (21)$$

ここで、対流項中の体積フラックスの補間の方向を表す上付き添字 ξ_c 中の下付き添字 C は、コントロールボリューム（以降、C.V. と略記）の番号を示している。C.V. の番号は、セル界面中心に一つの直交速度成分しか定義されない本来の Staggered 格子系の場合の、 u_1 の C.V. が 1 番、 u_2 の C.V. が 2 番、 u_3 の C.V. を 3 番と定義する。2 次元における C.V. の番号付けを図 3 に示す。

次に、体積フラックスの補間をなぜこのように取り扱うのかを説明する。ここで、簡単のため 2 次元を想定し、C.V.1 における直交速度成分 u_1 を計算する時の対流項を式 (19) の発散型で離散化することを図 4 (a) で考える。式 (19) を $i=1, C=1$ で展開すると、

$$(\text{Div.} - \text{M2})_1 \equiv \frac{\delta_1 \overline{U_1^{1\xi_1} u_1^{1\xi_1}}}{\delta_1 \xi_1} + \frac{\delta_1 \overline{U_2^{1\xi_1} u_1^{1\xi_2}}}{\delta_1 \xi_2} \quad (22)$$

となる。式 (22) の実際の離散化を図 4 (a) で考えると、右辺第 1 項中の体積フラックス U_1 は、C.V. 界面を横切る方向で、体積フラックス U_2 は C.V. 界面に沿った方向で補間される。次に、格子が反時計方向に 90 度回転した場合を図 4 (b) で考える。C.V.1 における直交速度成分 u_1 と同じ位置関係にある、C.V.2 における直交速度成分 u_1 を離散化することを考え、式 (19) を $i=1, C=2$ で展開すると、

$$(\text{Div.} - \text{M2})_1 \equiv \frac{\delta_1 \overline{U_1^{1\xi_2} u_1^{1\xi_1}}}{\delta_1 \xi_1} + \frac{\delta_1 \overline{U_2^{1\xi_2} u_1^{1\xi_2}}}{\delta_1 \xi_2} \quad (23)$$

式 (22) の実際の離散化を図 4 (b) で考えると、右辺第 1 項中の体積フラックス U_1 は、C.V. 界面に沿った方向で、体積フラックス U_2 は C.V. 界面を横切る方向で補間される。ここで、格子が回転すると、直交速度成分の方向は変わらないのに対して、体積フラックスの方向は回転するという事に注意して、図 4 (a) と図 4 (b) を比較すると、補間の方向に対応がとれていることがわかる。つまり、体積フラックスの補間の方向を式 (19)~(21) のように取り扱うことにより、計算格子が 90 度回転した場合でも、補間に用いられる体積フラックスの位置関係に普遍性が保

研究速報

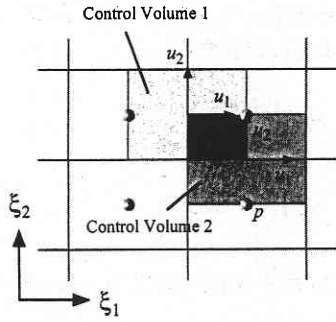


図3 コントロールボリュームの番号付け

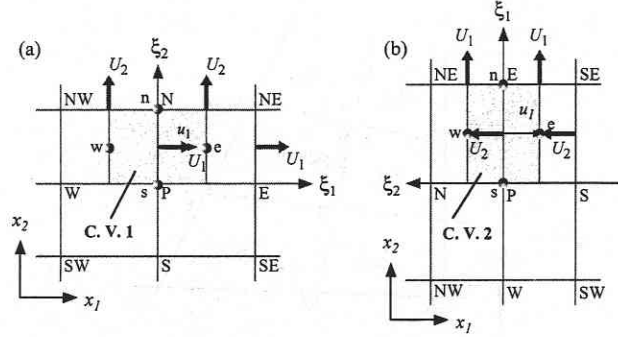


図4 体積フラックスの補間の方向

たれる。

式 (19)~(21) の対流項スキームは、離散的に次式を満足する。

$$(Adv.-M2)_i = (Div.-M2)_i - u_i (Cont.-M2)^{1\xi_c} \quad (24)$$

$$u_i (Skew.-M2)_1 \equiv \frac{\delta_1}{\delta_1 x_j} \left(U_m^{-1\xi_c} \frac{\widetilde{u_1 u_1}^{1\xi_m}}{2} \right) \quad (25)$$

式 (24) は第1報中の式 (25) を、式 (25) は第1報中の式 (26) を適切に近似している。従って、これらの対流項スキームは、運動量、速度の2乗量および運動エネルギーの保存特性に関して適切な離散式となっている。

4次精度も同様に拡張できる。結果のみを示すと、以下のようなになる。

連続の式

$$(Cont.-M4) \equiv \frac{9}{8} \frac{\delta_1 U_m}{\delta_1 \xi_m} - \frac{1}{8} \frac{\delta_3 U_m}{\delta_3 \xi_m} = 0 \quad (26)$$

Navier-Stokes 方程式中の圧力項

$$(Pres.-M4)_i \equiv \frac{9}{8} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) - \frac{1}{8} \frac{\delta_3}{\delta_3 \xi_m} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) \quad (27)$$

Navier-Stokes 方程式中の対流項

$$(Div.-M4)_i \equiv \frac{9}{8} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left[\left(\frac{9}{8} U_m^{-1\xi_c} - \frac{1}{8} U_m^{-3\xi_c} \right) u_i^{-1\xi_m} \right] - \frac{1}{8} \frac{\delta_3}{\delta_3 \xi_m} \left[\left(\frac{9}{8} U_m^{-1\xi_c} - \frac{1}{8} U_m^{-3\xi_c} \right) u_i^{-3\xi_m} \right] \quad (28)$$

$$(Adv.-M4)_i \equiv \frac{9}{8} \left(\frac{9}{8} U_m^{-1\xi_c} - \frac{1}{8} U_m^{-3\xi_c} \right) \frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_m} - \frac{1}{8} \left(\frac{9}{8} U_m^{-1\xi_c} - \frac{1}{8} U_m^{-3\xi_c} \right) \frac{\delta_3 u_i}{\delta_3 \xi_m} \quad (29)$$

$$(Skew.-M4)_i \equiv \frac{1}{2} (Div.-M4)_i + \frac{1}{2} (Adv.-M4)_i \quad (30)$$

圧力 Poisson 方程式

$$\frac{9}{8} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left[\left(G^{mn} \left(\frac{9}{8} \frac{\delta_1 p}{\delta_1 \xi_n} - \frac{1}{8} \frac{\delta_3 p}{\delta_3 \xi_n} \right) \right) - \frac{1}{8} \frac{\delta_3}{\delta_3 \xi_m} \left[\left(G^{mn} \left(\frac{9}{8} \frac{\delta_1 p}{\delta_1 \xi_n} - \frac{1}{8} \frac{\delta_3 p}{\delta_3 \xi_n} \right) \right) \right] \right] = \frac{1}{\Delta t} (Cont.-M4)^* \quad (31)$$

最後に、第4章における離散式の保存特性の議論において、3次元の場合、メトリックの計算を含めて考えると、厳密には離散的に保存されないことを付記する。

5. 結 論

第2報では、全ての直交速度成分 u_i が各セル界面の中心に定義される、Maliska⁴⁾ の Staggered 格子配列における適切な差分スキームを構成した。これらは、森西¹⁾ により示された等間隔正規直交座標系における適切な差分スキームを拡張して、比較的容易に構成される。特に、対流項スキームは、計算格子が物理空間上で90度回転した場合でも、補間に用いられる体積フラックスの位置が等しくなるように構成されている。また、Maliska の Staggered 格子配列における体積フラックスの計算について考察し、セル界面に沿った直交速度成分の計算は、計算精度および速度と圧力のカップリングに問題があるが、それらが実際の計算精度および計算の安定性に対する影響が小さいことを示した。(1997年4月22日受理)

参 考 文 献

- 1) 森西洋平, 非圧縮性流体解析における差分スキームの保存特性, 日本機械学会論文集, 62-604, B (1996), 4090-4112
- 2) Maliska, C. R. and Raithby, G. D., A Method for computing three dimensional flows using non-orthogonal boundary-fitted co-ordinates, Int. J. Numerical Methods in Fluids, 4, 519-537 (1984)
- 3) 石川正昭, 反変成分を用いた一般座標系による流れの数値解析, 東京大学修士論文
- 4) Rhile, C. M. and Chow, R. L., Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation, AIAA J., 21, 1525 (1983)