研 究 速 報

一般曲線座標系における非圧縮性乱流数値解析に適した差分スキーム

—第3報，Regular, Collocation 格子系における差分スキーム—

Proper Finite Difference Schemes for Simulations of Incompressible Turbulent Flow in Generalized Curvilinear Coordinates

(3rd Report, Finite Difference Schemes for Regular and Collocation Grid Systems)

小 垣 哲 也*・小 林 敏 雄*・谷 口 伸 行*

Tetsuya KOGAKI, Toshio KOBAYASHI and Nobuyuki TANIGUCHI

1. 緒　　　言

第2報では，等間隔正規直交座標系における適切な差分スキーム[1)]を一般座標系に拡張して，Maliska の Staggered 格子系における適切な2次および4次精度差分スキームを構成した．本報では，一般座標系における Regular および Collocation 格子系について考え，それぞれの計算格子系において，解析的保存特性を適切に近似する2次および4次精度差分スキームを構成する．

2. Regular 格子系における差分スキーム

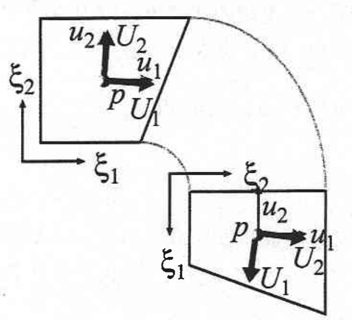

図1　Regular 格子系

図1に示される Regular 格子系において，基礎方程式系を離散化する際，必要となる差分スキームは，等間隔正規直交格子の差分スキーム[1)]を拡張することにより容易に得ることができる．まず，連続の式と圧力項の2次精度の離散化は，次のようになる．

$$(\text{Cont.-R2}) \equiv \frac{\delta_2 U_m}{\delta_2 \xi_m} = 0 \tag{9}$$

$$(\text{Pres.-R2})_i \equiv \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p\right) \cong \frac{1}{J}\frac{\partial \xi_m}{\partial x_i}\frac{\delta_2 p}{\delta_2 \xi_m} \tag{10}$$

上式のカッコ内，-R2は Regular 格子系における2次精度差分近似であることを示している．本報での議論は，全て座標変換後の項に対するものであるため，第1報において使用した，座標変換された項であることを示す右上付き添字^{CT}は全て省略する．運動エネルギーの輸送方程式中の圧力項の保存特性は，

$$u_i\,(\text{Pres.-R2})_i = \frac{\delta_1 \widetilde{pU_m}^{1\xi_m}}{\delta_1 x_i} - p\,(\text{Cont.-R2}) \tag{11}$$

となり，連続の式（Cont.-R2）が満足されるとき保存形となる．式(10)は第1報中の式(20)，式(11)は第1報中の式(34)を適切に近似している．

第2報と同様に，圧力と連続の式のカップリングアルゴリズムとして，Fractional Step 法を考える．

$$u_i^{n+1} = u_i^* - J\Delta t\,(\text{Pres.-R2})_i \tag{12}$$

$$(\text{Cont.-R})^{n+1} = 0 \tag{13}$$

ここで，Δtは時間間隔，上付き添字nは時間ステップ数，上付き添字*は時間ステップnと$n+1$との間の中間的な時間ステップを示している．式(13)に式(12)を代入して，次の2次精度の圧力 Poisson 方程式が得られる．

$$\frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m}\left(G^{mn}\frac{\delta_2 p}{\delta_2 \xi_n}\right) = \frac{1}{\Delta t}\,(\text{Cont.-R2})^* \tag{14}$$

対流項差分スキームは次のように拡張される．

*東京大学生産技術研究所　第2部

$$(\text{Div.-R2})_i \equiv \frac{\delta_1 \overline{U_m}^{1\xi_m}\,\overline{u_i}^{1\xi_m}}{\delta_1 \xi_m} \tag{15}$$

$$(\text{Adv.-R2})_i \equiv \overline{\overline{U_m}^{1\xi_m}\frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_m}}^{1\xi_m} \tag{16}$$

$$(\text{Skew.-R2})_i \equiv \frac{1}{2}(\text{Div.-R2})_i + \frac{1}{2}(\text{Adv.-R2})_i \tag{17}$$

これらの対流項スキームは，離散的に次式を満足する．

$$(\text{Adv.-R2})_i = (\text{Div.-R2})_i - u_i\,(\text{Cont.-R2}) \tag{18}$$

$$u_i\,(\text{Skew.-R2})_1 \equiv \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m}\left(\overline{U_m}^{1\xi_m}\,\frac{\overline{\widetilde{u_1 u_1}}^{1\xi_m}}{2}\right) \tag{19}$$

式(18)は第 1 報中の式(25)を，式(19)は第 1 報中の式(30)を適切に近似している．従って，これらの対流項スキームは，運動量，速度の 2 乗量および運動エネルギーの保存特性に関して適切な離散式となることがわかる．

4 次精度も同様に拡張できる．結果のみを示すと，以下のようになる．

連続の式

$$(\text{Cont.-R4}) \equiv \frac{4}{3}\frac{\delta_2 U_m}{\delta_2 \xi_m} - \frac{1}{3}\frac{\delta_4 U_m}{\delta_4 \xi_m} = 0 \tag{20}$$

Navier-Stokes 方程式中の圧力項

$$(\text{Pres.-R4}) \equiv \frac{4}{3}\frac{\delta_2 U_m}{\delta_2 \xi_m} - \frac{1}{3}\frac{\delta_4 U_m}{\delta_4 \xi_m} \tag{21}$$

Navier-Stokes 方程式中の対流項

$$(\text{Div.-R4})_i \equiv \frac{4}{3}\frac{\delta_1 \overline{U_m}^{1\xi_m}\,\overline{u_i}^{1\xi_m}}{\delta_1 \xi_m} - \frac{1}{3}\frac{\delta_2 \overline{U_m}^{2\xi_m}\,\overline{u_i}^{2\xi_m}}{\delta_2 \xi_m} \tag{22}$$

$$(\text{Adv.-R4})_i \equiv \frac{4}{3}\overline{\overline{U_m}^{1\xi_m}\frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_m}}^{1\xi_m} - \frac{1}{3}\overline{\overline{U_m}^{2\xi_m}\frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_m}}^{2\xi_m} \tag{23}$$

$$(\text{Skew.-R4})_{i)} \equiv \frac{1}{2}(\text{Div.-R4})_i + \frac{1}{2}(\text{Adv.-R4})_i \tag{24}$$

圧力 Poisson 方程式

$$\frac{4}{3}\frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m}\left[G^{mn}\left(\frac{4}{3}\frac{\delta_2 p}{\delta_2 \xi_n} - \frac{1}{3}\frac{\delta_4 p}{\delta_4 \xi_n}\right)\right] - \frac{1}{3}\frac{\delta_4}{\delta_4 \xi_m}\left[G^{mn}\left(\frac{4}{3}\frac{\delta_2 p}{\delta_2 \xi_n} - \frac{1}{3}\frac{\delta_4 p}{\delta_4 \xi_n}\right)\right] = \frac{1}{\Delta t}(\text{Cont.-R4})^* \tag{25}$$

3. Collocation 格子系における差分スキーム

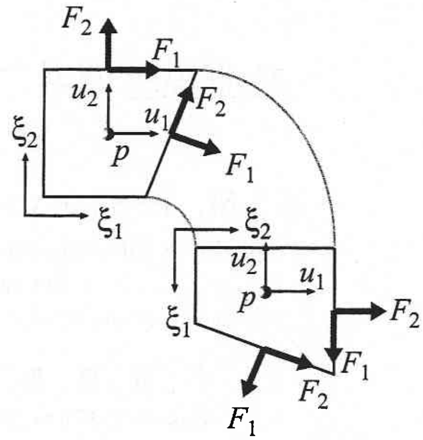

図 2　Collocation 格子系

Collocation 格子系は，直交速度成分 u_iと圧力 p がセル中心に，また体積フラックス F_mがセル界面中心に定義される．まず，Collocation 格子系における 2 次精度の差分スキームについて検討する．連続の式と圧力項の 2 次精度の離散化は，次のようになる．

$$(\text{Cont.-C2}) \equiv \frac{\delta_1 F_m}{\delta_1 \xi_m} = 0 \tag{26}$$

上式のカッコ内，-C2は Collocation 格子系における 2 次精度差分近似であることを示している．Navier-Stokes 方程式中の圧力項は，Regular 格子系で定義された $(\text{Pres.-R2})_i$ を用いる．圧力と連続の式のカップリングアルゴリズムとして，Fractional Step 法を用いる．

$$u_i^{n+1} = u_i^* - J\Delta t\,(\text{Pres.-R2})_i \tag{27}$$

$$(\text{Cont.-C2})^{n+1} = 0 \tag{28}$$

ここで，直交速度成分が定義されていないセル界面中心における体積フラックス F_mは，次式で表される補間を用いて計算される．

$$F_m^{n+1} = \overline{U_m^*}^{1\xi_m} - \Delta t\, G^{mn}\frac{\delta_1 p}{\delta_1 \xi_n} \tag{29}$$

圧力の Poisson 方程式は，式(28)に式(29)を代入して得られる．

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m}\left(G^{mn}\frac{\delta_1 p}{\delta_1 \xi_n}\right) = \frac{1}{\Delta t}\frac{\delta_1 \overline{U_m^*}}{\delta_1 \xi_m} \tag{30}$$

Navier-Stokes 方程式中の 2 次精度対流項差分スキームは以下のように構成される．

$$(\text{Div.-C2})_i \equiv \frac{\delta_1 F_m \overline{u_i}^{1\xi_m}}{\delta_1 \xi_m} \tag{31}$$

$$(\text{Adv.-C2})_i \equiv \overline{F_m \frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_m}}^{1\xi_m} \tag{32}$$

$$(\text{Skew.-C2})_i \equiv \frac{1}{2}(\text{Div.-C2})_i + \frac{1}{2}(\text{Adv.-C2})_i \tag{33}$$

これらの対流項スキームは，離散的に次式を満足する．

$$(\text{Adv.-C2})_i = (\text{Div.-C2})_i - u_i(\text{Cont.-C2}) \tag{34}$$

$$u_i(\text{Skew.-R2})_1 \equiv \frac{\delta_1}{\delta_1 x_j}\left(F_m \frac{\widetilde{u_1 u_1}^{1\xi_m}}{2}\right) \tag{35}$$

式(34)は第1報中の式(25)を，式(35)は第1報中の式(30)を適切に近似している．従って，これらの対流項スキームは，運動量，速度の2乗量および運動エネルギーの保存特性に関して適切な離散式となっている．

しかしここで，森西[1]が指摘するように，Collocation 格子系における圧力項の運動エネルギーの保存特性には注意を要する．Collacation 格子系における圧力項の離散化は，Regular 格子系と同じ式(10)を用いて離散化される．これは式(11)からわかるように(Cont.-R2) = 0の条件の下で運動エネルギーの輸送方程式中で保存形になる．しかし，Collocation 格子系では，(Cont.-R2) = 0ではなく(Cont.-C2) = 0によって連続の式が評価される．テイラー展開から，両者間の差異は(Cont.-R2) − (Cont.-C2) = $O(\Delta t \cdot h^2)$ と評価される[1]．従って，(Cont.-C2) が満足されても，Collocation 格子系における圧力項の運動エネルギーの保存特性には，$O(\Delta t \cdot h^2)$ の誤差が含まれている．

4次精度も同様に拡張できる．結果のみを示すと，以下のようになる．

連続の式

$$(\text{Cont.-C4}) \equiv \frac{9}{8}\frac{\delta_1 F_m}{\delta_1 \xi_m} - \frac{1}{8}\frac{\delta_1 F_n}{\delta_1 \xi_m} = 0 \tag{36}$$

Navier-Stokes 方程式中の圧力項

$$(\text{Pres.-R4})_i \equiv \frac{4}{3}\frac{\delta_2 U_m}{\delta_2 \xi_m} - \frac{1}{3}\frac{\delta_4 U_m}{\delta_4 \xi_m} \tag{37}$$

Navier-Stokes 方程式中の対流項

$$(\text{Div.-C4})_i \equiv \frac{9}{8}\frac{\delta_1 F_m \overline{u_i}^{1\xi_m}}{\delta_1 \xi_m} - \frac{1}{8}\frac{\delta_3 F_m \overline{u_i}^{3\xi_m}}{\delta_3 \xi_m} \tag{38}$$

$$(\text{Adv.-C4})_i \equiv \frac{9}{8}\overline{F_m \frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_m}}^{1\xi_m} - \frac{1}{8}\overline{F_m \frac{\delta_3 u_i}{\delta_3 \xi_m}}^{3\xi_m} \tag{39}$$

$$(\text{Skew.-C4})_i \equiv \frac{1}{2}(\text{Div.-C4})_i + \frac{1}{2}(\text{Adv.-C4})_i \tag{40}$$

体積フラックス F_mの補間

$$\begin{aligned} F_m{}^{n+1} &= \frac{9}{8}\overline{U_m{}^*}^{1\xi_m} - \frac{1}{8}\overline{U_m{}^*}^{3\xi_m} \\ &\quad - \Delta t\, G^{mn}\left(\frac{9}{8}\frac{\delta_1 p}{\delta_1 \xi_n} - \frac{1}{8}\frac{\delta_3 p}{\delta_3 \xi_n}\right) \end{aligned} \tag{41}$$

圧力 Poisson 方程式

$$\begin{aligned} &\frac{9}{8}\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m}\left[G^{mn}\left(\frac{9}{8}\frac{\delta_1 p}{\delta_1 \xi_n} - \frac{1}{8}\frac{\delta_3 p}{\delta_3 \xi_n}\right)\right] \\ &\quad - \frac{1}{8}\frac{\delta_3}{\delta_3 \xi_m}\left[G^{mn}\left(\frac{9}{8}\frac{\delta_1 p}{\delta_1 \xi_n} - \frac{1}{8}\frac{\delta_3 p}{\delta_3 \xi_n}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{9}{8}\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m}\left(\frac{9}{8}\overline{U_m{}^*}^{1\xi_m} - \frac{1}{8}\overline{U_m{}^*}^{3\xi_m}\right)\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8}\frac{\delta_3}{\delta_3 \xi_m}\left(\frac{9}{8}\overline{U_m{}^*}^{1\xi_m} - \frac{1}{8}\overline{U_m{}^*}^{3\xi_m}\right)\right] \end{aligned} \tag{42}$$

4次精度の場合も2次精度の場合と同様に，Collocation 格子系における圧力項の運動エネルギーの保存特性には，$O(\Delta t \cdot h^4)$ の誤差が含まれている．

4. 結　　論

第3報では，森西[1]により示された解析的保存特性を適切に近似する差分スキームを一般座標系に拡張して，Regular 格子系および Collocation 格子系における適切な2次精度および4次精度差分スキームを構成した．

(1997年4月22日受理)

参 考 文 献

1) 森西洋平，非圧縮性流体解析における差分スキームの保存特性，日本機械学会論文集，62-604, B (1996), 4090-4112.
2) 石川正昭，反変成分を用いた一般座標系による流れの数値解析，東京大学修士論文.
3) Rhie, C. M. and Chow, R. L., AIAA J., 21, 1525 (1983).
4) Maliska, C. R. and Raithby, G. D., A Method for computing three dimensional flows using non-orthogonal boundary-fitted co-ordinates, Int. J. Numerical Methods in Fluids, 4, 519-537 (1984)