

# ASI 法を用いた退化型チモシェンコ梁要素による 免震鋼棒ダンパーの弾塑性解析

Elastic-Plastic Analyses of Steel Damper by Using Degenerated Timoshenko Beam Element  
Based on the ASI Technique

宮 村 倫 司\*・都 井 裕\*・土 師 利 昭\*\*  
Tomoshi MIYAMURA, Yutaka TOI and Toshiaki HAZE

## 1. は じ め に

骨組構造の弾塑性解析では塑性ヒンジの位置を正確に評価することが重要である。ところが、有限要素法では要素内で数値積分を行うことが一般的であるため、塑性ヒンジの位置は積分点の位置に限定されるという制約がある。このような制約を取り除くために、著者のひとりである都井は順応型 Shifted Integration法 (以下 ASI 法) を提案した<sup>4)5)7)</sup>。ASI 法によれば梁要素の任意の位置に塑性ヒンジを設定することができる。都井等は曲げモーメント、合応力を用いて定式化した梁要素のみならず、層分割法により断面内の数値積分を行う場合にも ASI 法を適用した<sup>7)</sup>。

本論文では最初に、一般的な連続体退化型線形チモシェンコ梁要素への ASI 法の適用について述べる。退化型梁要素は層分割型要素を三次元に拡張したものであり、梁の断面内においても数値積分を行うため、断面内の各積分点における塑性化を評価できる。この意味では三次元ソリッド要素と同様であるが、変位場は梁の仮定に従っている。退化型要素では曲げモーメント、ねじりモーメントあるいはせん断応力、軸合応力の連成を自動的に考慮できるという利点もある。

本要素は免震鋼棒ダンパーの弾塑性解析を目的として開発した。このダンパーは大型免震構造のためのエネルギー吸収能力の大きいダンパーとして多田等により開発された<sup>3)</sup>。鋼棒をコイル状に曲げたものであり、これを四個を組み合わせて用いる (写真 1 参照)。

## 2. ASI法を用いた退化型線形チモシェンコ梁要素

### 2.1 退化型梁要素の基礎式

本要素は Bathe<sup>1)</sup>あるいは Dvorkin<sup>2)</sup>によるせん断変形を考慮したアイソパラメトリック梁要素を基礎としており、

\*東京大学生産技術研究所 第 2 部

\*\* (株) 巴技研

チモシェンコ梁の変位仮定に従っている (図 1)。すなわち、(1) 変位は厚さ方向に線形分布する。(2) 法線の長さは一定だが、変形後は必ずしも中立軸の法線とはならない。ASI 法を適用するには、この仮定が成立し、更に内挿関数が一次であることが必要である。図 1 の記号に従えば本要素の初期形状と変位場は次式となる。

$$\mathbf{x}(s_1, s_2, s_3) = \sum_{n=1}^2 N^n(s_1) \left( \mathbf{x}^n + \frac{a^n}{2} s_2 \mathbf{V}_2^n + \frac{b^n}{2} s_3 \mathbf{V}_3^n \right) \quad (1)$$

$$\mathbf{u}(s_1, s_2, s_3) = \sum_{n=1}^2 N^n(s_1) \left( \mathbf{U}^n + \frac{a^n}{2} s_2 \boldsymbol{\theta}^n \times \mathbf{V}_2^n + \frac{b^n}{2} s_3 \boldsymbol{\theta}^n \times \mathbf{V}_3^n \right) \quad (2)$$

ここに、

$$N^1(s_1) = \frac{1}{2}(1 - s_1), N^2(s_1) = \frac{1}{2}(1 + s_1) \quad (3)$$

である。一般には  $a^1 \neq a^2, b^1 \neq b^2$  であってもよいが、ASI 法を適用する場合には断面の寸法は要素内で一定である必要がある (文献 4) の証明を参照)。なお、Total Lagrange 法により幾何学的非線形性を考慮した定式化を行っている。Dvorkin<sup>2)</sup> はディレクター  $\mathbf{V}_2^n$  および  $\mathbf{V}_3^n$  の有限回転を考慮しているが、ここでは十分細かい増分幅で解析することとし、とりあえず線形項のみを考慮した。

鋼棒ダンパーは円断面であるため、図 2 のように  $(s_2, s_3)$  を  $(r, \varphi)$  に写像してから  $\varphi$  方向は台形則、 $r$  方向はシンプソン則により積分する。曲げ、ねじり、軸力をそれ

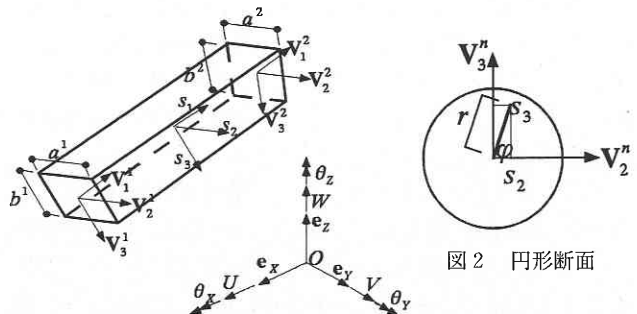


図 1 退化型梁要素

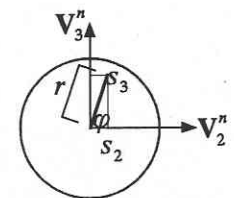


図 2 円形断面

研究速報  
 ぞれ単独で与える時には、 $\varphi$  方向、 $r$  方向共に三点程度の積分点を設ければ、線形弾性の解析結果は断面法法の解析結果に一致することが確認できた。

2.2 弾塑性の構成式

有限回転、微小歪であるとし、共回転系から記述された近似的な構成式を用いる (文献6) の6.3.1節等参照)。以下の応力は第2Piola-Kirchhoff 応力テンソルの成分、歪は Green-Lagrange 歪テンソルの成分である。軸方向の塑性化のみを考慮し、他の方向では弾性のままであると仮定する。 $\sigma_{11}$  と歪  $\epsilon_{11}$  の関係は移動硬化を考慮したバイリニア型を仮定する。時刻  $t$  の応力を  ${}^t\sigma_{11}$  とすれば、時刻  $t + \Delta t$  における応力はこの時刻に塑性化する場合には

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{11} = \frac{H'}{E + H'} {}^t\sigma_{11} + \frac{EH'}{E + H'} \Delta\epsilon_{11} + \frac{E}{E + H'} {}^t\sigma_{Y11} \quad (4)$$

となる。ここに、 $E$ : ヤング率、 $H'$ : 歪硬化係数、 $\Delta\epsilon_{11}$ : Green-Lagrange 歪の増分、 ${}^t\sigma_{Y11}$ : 時刻  $t$  における降伏応力である。上式を以下のように書き直す。

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\sigma_{11} &= \frac{H'}{E + H'} ({}^t\sigma_{11} + E\Delta\epsilon_{11}) + \frac{E}{E + H'} {}^t\sigma_{Y11} \\ &= \frac{H'}{E + H'} {}^{t+\Delta t}\sigma_{11}^T + \frac{E}{E + H'} {}^t\sigma_{Y11} \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、 ${}^{t+\Delta t}\sigma_{11}^T$  は弾性試行応力であり、除荷の判定はこれと  ${}^t\sigma_{Y11}$  とを比較することにより行う。除荷が起きた場合や塑性化していない場合には  ${}^{t+\Delta t}\sigma_{11} = {}^{t+\Delta t}\sigma_{11}^T$  となる。

2.3 ASI 法の概要

都井<sup>4)</sup>は積分点をシフトした線形チモシェンコ梁要素と曲げせん断型の一次元剛体ばねモデル (以下 RBSM) の歪エネルギーが等価であることを示した。すなわち、図3に示すように、せん断ロッキング回避のため通常は中央一点の低減積分とするチモシェンコ梁要素の積分点を、例えば右に  $s_1$  だけシフトしたものは、中央より左に  $s_1$  ずれた位置に曲げせん断ばねを持つ RBSM と力学的に等価である。文献4) の証明は仮想仕事式の形でも表わせるから、積分点位置で塑性化した梁要素は、中央点について積分点と対称な位置に塑性ばねを持つ RBSM であるとみなせる。以上のように、線形チモシェンコ梁要素の積分点をシフトすることにより、任意の位置に塑性ばねを持つ RBSM に置換できることがわかる。つまり、梁要素内の任意の位置に塑性ヒンジを設定することができる。

弾性変形状態にあるチモシェンコ梁要素においては、図3の  $s_1$  が Gauss 積分点 ( $s_1 = 0$ ) にある時、最も精度の良い弾性解が得られる。そこで、都井等は塑性ヒンジが生じるまでは積分点を Gauss 積分点に置き、塑性ヒンジが発生したと判断されてから初めて積分点をシフトする手法

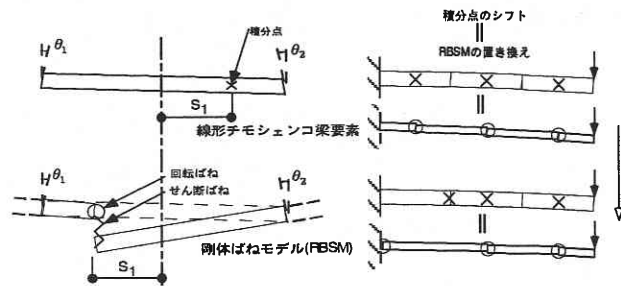


図3 線形チモシェンコ梁と RBSM の等価性

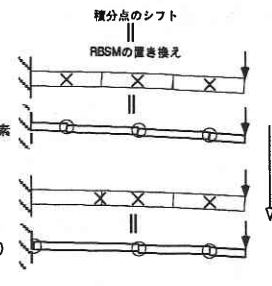


図4 積分点のシフトと RBSM の置き換え

を提案した (順応型 Shifted Integration (ASI) 法<sup>5)</sup>)。この場合は図4に示すように、塑性ヒンジの発生前後で異なる RBSM を用いることになる。

なお、幾何学的非線形性を考慮した時の、チモシェンコ梁要素と RBSM との対応についての理論的な裏付けはないが、とりあえず線形の場合と同様に扱っている。

2.4 退化型要素への ASI 法の適用

ここでは、退化型要素に ASI 法を適用する際に注意すべき点、すなわち (1) 積分点以外での応力の求め方、(2) 積分点をシフトする条件、について述べる。なお、積分点をシフトする時には断面内の全ての積分点を同時にシフトするものとする。また、積分点位置と物理的な応力評価点は中央点について反対側になることに注意する。以下では、積分点における応力とはそれに対応する (反対側にある) 応力評価点における応力を示す。

本要素では次数低減積分を行っているため、積分点以外の点の応力を直接求めることはできない。しかし、最適な塑性ヒンジの位置を決めるには積分点以外の点の応力を適切に評価する必要がある。ここでは、曲げモーメントのせん断合応力による外挿を利用する<sup>5)</sup>。例えばディレクター  $V_3^*$  まわりの曲げモーメントは

$$M_2 = M_{Q2} + Q_{Q13}l \quad (6)$$

となる。ここに、 $M_{Q2}$ : 積分点における曲げモーメント、 $M_2$ : 積分点より  $l$  だけ離れた点の曲げモーメント、 $Q_{Q13}$ : 積分点における  $V_3^*$  に垂直な面のせん断合応力である。 $l$  は積分点よりも右の点では正である。 $V_3^*$  まわりの曲げも考慮すると、弾性であれば断面二次モーメント  $I_2, I_3$ , 断面積  $A$ , 軸方向合応力  $N_{11}$  (一定と仮定) により軸方向応力は、

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{N_{11}}{A} + \frac{M_2}{I_2} s_3 + \frac{M_3}{I_3} s_2 \\ &= \frac{N_{11}}{A} + \frac{M_{Q2}}{I_2} s_3 + \frac{Q_{Q13}l}{I_2} s_3 + \frac{M_{Q3}}{I_3} s_2 + \frac{Q_{Q12}l}{I_3} s_2 \\ &= \sigma_{Q11} + \frac{Q_{Q13}l}{I_2} s_3 + \frac{Q_{Q12}l}{I_3} s_2 \end{aligned}$$

$$= \sigma_{Q11} + \frac{A\tau_{mQ13}l}{I_2} s_3 + \frac{A\tau_{mQ12}l}{I_3} s_2 \quad (7)$$

となる。ここに、 $\sigma_{Q11}$  は梁の断面内の積分点の軸方向応力、 $\sigma_{11}$  は  $\sigma_{Q11}$  に対応するシフト先の軸方向応力である。ねじりに関する成分を分離するために、 $\tau_{mQ12}$ 、 $\tau_{mQ13}$  は中立軸上の積分点におけるせん断応力とする。式 (7) は弾性の時にしか成立しない。本論文の計算例では、積分点のシフトは塑性化する直前と除荷が起こり断面全体が弾性に戻った時のみに行うものとした。

次に、積分点をシフトする条件について考える。退化型要素の場合、塑性ヒンジが生じたことを明確に判定することはできないので、ここでは次のような条件を設定した。

(1) 積分点の位置は左右の節点および Gauss 積分点 (中央点) のいずれかとする。

(2) 断面内の全ての積分点を同時にシフトする

(3) シフトするのは断面全体が弾性である状態から一部塑性の状態へ、あるいは除荷により断面全体が弾性に戻った時のみとする。

(4) 左右および中央点の中で、断面内で塑性化した点の数が最も多い位置に対応する積分点へシフトする。ただし、断面内で塑性化した点の数を数える時には梁の表面に近い点を除外する。これは、表面のみ塑性化している時には弾性変形が支配的であるので、塑性ヒンジを設定しないようにするためである。なお、塑性化の判定は式 (7) により得た応力と降伏応力を比較することにより行う。

(5) 純曲げや軸力により軸方向に均質に降伏する場合には積分点を中央に置いた方がよい。そこで、左右の降伏した点の数の差が小さい時には積分点は中央とする。

(6) シフトの判定は、増分計算を進める前に前ステップで得られた応力に基づいて行う。シフトしたら式 (7) により軸方向応力を外挿し、これを現時点での応力とする。せん断応力は要素内一定とみなす。Newton-Raphson 法による収束計算も行うが、この過程ではシフトしない。

この他に歪硬化が起こる場合に積分点以外の点の降伏応力を更新できないという問題があり、これは今後の課題である。ただし、いつも同じ点に塑性ヒンジができる場合にはあまり問題ではない。現時点では左右および中央の降伏応力は一定としている (ひとつの断面内では異なる)。

最後に、以下の解析例では断面内の積分点の数は、半径方向 7 点、円周方向 16 点の計 112 点としている。

### 3. 片持ち梁の弾塑性解析

ASI 法の効果を確認するため片持ち梁の解析を行う。幾何学的非線形性は考慮しない。解析は変位制御とした。全長 200 cm、直径 7 cm の円断面、ヤング率  $2.1 \times 10^6$

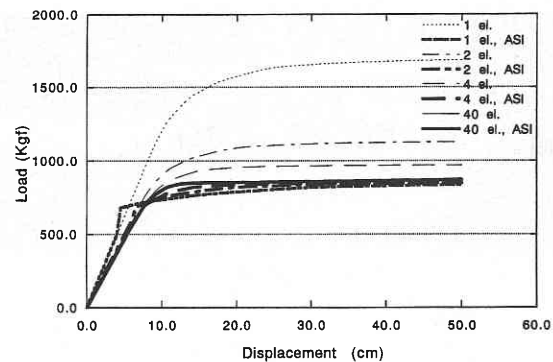


図5 片持ち梁の荷重変位曲線 ( $H' = E/2100$ )

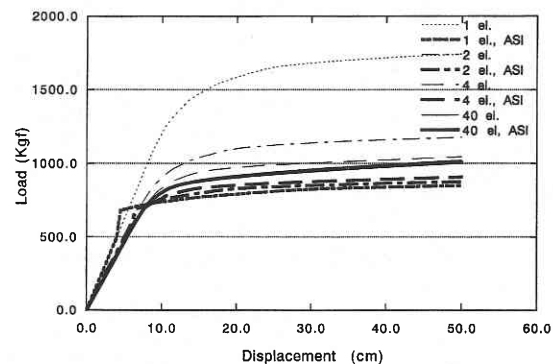


図6 片持ち梁の荷重変位曲線 ( $H' = E/80$ )

$\text{Kgf/cm}^2$ 、初期降伏応力  $3000 \text{ Kgf/cm}^2$  である。図 5 は  $H' = E/2100$  の場合である。断面が徐々に降伏するため、荷重変位曲線は滑らかに折れ曲がる。ただし、一要素の時にはシフトした点で角ができる。しかし、ASI 法によれば一要素であっても最終耐力は正確に得られる。図 6 は  $H' = E/80$  の場合である。硬化係数がやや大きいので、塑性化した後も耐力が上昇する。ただし、ASI 法の場合には式 (5) の中で用いる弾性試行応力の精度が低下するため、要素が少ない場合には歪硬化による降伏応力の上昇が鈍くなっている。歪硬化係数が大きい材料の解析に ASI 法を適用する際には注意が必要である。

### 4. 免震鋼棒ダンパーの弾塑性解析

写真 1 に鋼棒ダンパーの様子を、また、図 7 に平面図と立面図を示す。写真のように実際には四個一組で使用するが、ここではその中の一個について解析する。解析モデルは芯々で半径 26.5 cm、高さ 17 cm、断面は直径 7 cm の円形であり、下端は固定、上端では図 7 の Z 軸まわりがピン、X 方向または Y 方向の強制変位を与えその他の自由度は固定とする。ヤング率  $2.1 \times 10^6 \text{ Kgf/cm}^2$ 、歪硬化係数  $1.0 \times 10^4 \text{ Kgf/cm}^2$ 、初期降伏応力  $3000 \text{ Kgf/cm}^2$  とする。解析の安定化のために小さな歪硬化率を設定している。

研究速報

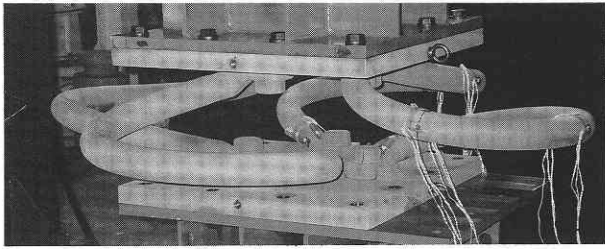


写真1 免震鋼棒ダンパー

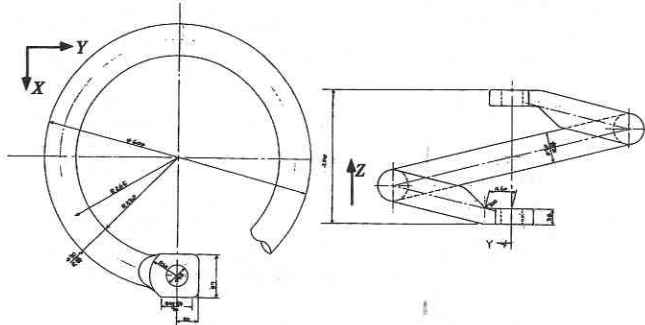


図7 免震鋼棒ダンパーの平面図と立面図

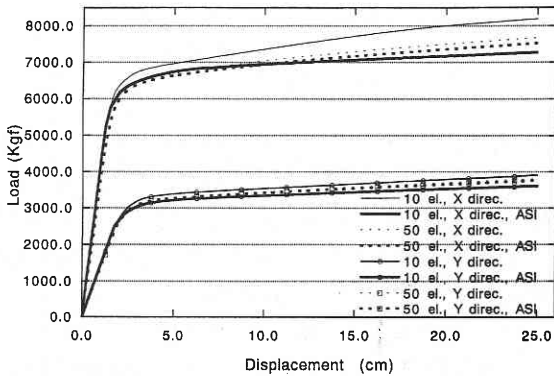


図8 荷重変位曲線 (線形)

最初は幾何学的には線形の場合について検討する。モデルの上端に図7のX、Y方向の正の変位をそれぞれ単調に与える。10要素または50要素に等分割したモデルについて、それぞれASI法と積分点をシフトしない通常法の比較を行う。図8にはX方向およびY方向に載荷した時の荷重変位曲線を示す。Y方向ではどの条件でもあまり差がない。X方向の50要素では通常法とASI法の差がほとんどなく、十分細かい分割であるといえる。X方向の10要素のASI法では変位が15 cm程度までは50要素に近い解が得られている。しかし、変位が大きくなるにつれ歪硬化の影響のためにやや荷重が低めとなる。なお、幾何学的に線形ならば、繰り返し載荷の場合も良好に解析できた。

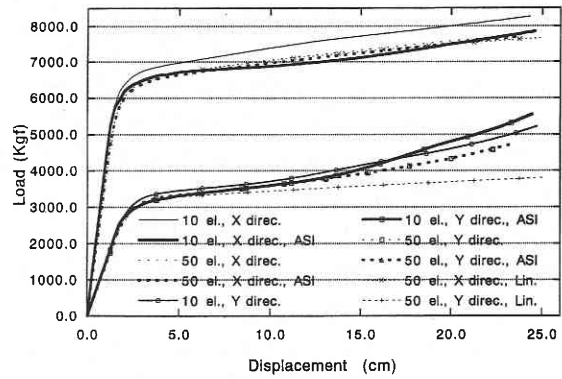


図9 荷重変位曲線 (幾何学的非線形性考慮)

次に幾何学的非線形性を考慮した計算を行う。図9に10要素、50要素のモデルによるASI法と通常法の結果を示す。また、比較のため50要素の通常法による線形解析の結果も重ねて示す。Y方向の10要素モデルでは変位が約15 cm以上になるとASI法の精度の方が悪くなる。

5. 結 論

本論文では順応型 Shifted Integration 法を一般的な連続体退化型梁要素に適用することを試みた。その際注意すべき点と必要な基礎式を示した。次に片持ち梁と免震鋼棒ダンパーの弾塑性解析に適用しその有効性を示した。

(1996年11月29日受理)

参 考 文 献

- 1) Bathe, K.J.: Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, 1982.
- 2) Dvorkin, E, et al.: On a Non-linear Formulation for Curved Timoshenko Beam Elements Considering Large Displacement/Rotation Increments, Int. J. for Num. Meth. in Engin., Vol. 26, pp. 1597-1613, 1988.
- 3) 多田英之他：大容量免震ダンパーの基本性状に関する研究, 日本建築学会学術講演梗概集, pp. 673-674, 1990.
- 4) Toi, Y.: Shifted Integration Technique in One-dimensional Plastic Collapse Analysis Using Linear and Cubic Finite Elements, Int. J. for Num. Meth. in Engin., Vol. 31, pp. 1537-1552, 1991.
- 5) Toi, Y., Isobe, D.: Adaptively Shifted Integration Technique for Finite Element Collapse Analysis of Framed Structures, Int. J. for Num. Meth. in Engin., Vol. 36, pp. 2323-2339, 1993.
- 6) 久田俊明, 野口裕久：非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 1995年.
- 7) 都井裕, 齊藤康史：順応型 Shifted Integration 法による脆性骨組構造体の有限要素崩壊解析, 日本機械学会論文集 (A編), 第62巻, 第604号 (印刷中), 1996年.