

一方程式型 Subgrid モデルに関する研究

Investigation of One-equation Subgrid Model

岡 本 正 芳*

Masayoshi OKAMOTO

乱流統計理論の一つである2スケール直接相関近似理論 (TSDIA) を利用して, サブグリッド (SGS) エネルギーの輸送方程式をモデル化し一方程式型 SGS モデルを導出した. チャンネル流でのラージエディシュミレーション (LES) の際の壁近傍での SGS 諸量の挙動を改善するため, SGS 散逸率の補正項を導入した. また, 高次等項を渦粘性表現に導入して SGS モデルのモデル定数の流れ場依存性を解消した新たな一方程式型モデルを提案した. さらに, 壁からの周期的吹き出し吸い込みを伴うチャンネル流にそのモデルを適用し検証を行った.

1. 序 論

近年の計算機の発達に伴い, 乱流の数値解析手法の一つである LES は盛んに研究されてきた. 特に, SGS レイノルズ応力 $R_{ij}^s = -\overline{u_i u_j}$ (u_i は SGS 速度であり, 上線はグリッドフィルターをかけた量を意味する.) のモデル表現としてアンサンブル平均型モデルにおける渦粘性近似のアナロジーから, グリッドスケール (GS) の物理量のみで解析を行う Smagorinsky モデル

$$R_{ij}^s = -\frac{2}{3} K^s \delta_{ij} + \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (1)$$

$$\nu_T = (C_s \Delta)^2 \bar{S}, \quad (2)$$

(K^s は SGS エネルギー, \bar{u}_i は GS 速度, C_s は Smagorinsky モデルのモデル定数, Δ はフィルター代表幅, \bar{S} は GS ストレインである.) は簡便であるため, 頻りに利用されてきた. このモデルにおけるモデル定数 C_s は一様減衰流で 0.22 程度¹⁾, 混合層流で 0.15 程度²⁾, チャンネル流で 0.10³⁾ が推奨されていて, モデル定数が個々の流れ場に依存することが広く知られてきた. このことは Smagorinsky モデルの一般的な流れ場への適用の際の障害となってきた. この問題点の解消を目的として, 著者は非定常性の効果を取り込んだ非平衡 0 方程式型 SGS モデル^{4)~6)} の研究を行ってきたが, 大きな改善は見られなかった.

そこで今回の研究では, モデル表現の自由度を拡張して改善を模索するため, K^s の輸送方程式をモデル化して解

析を行う一方程式型 SGS モデルに着目する. 一方程式型 SGS モデルは Smagorinsky モデルに比べて次のような点で有効であると考えられる.

●時間発展を解くので非定常性の効果を考慮できる.

●外力下で, その影響を取り込むことが容易である.

これらの点からも一方程式型 SGS モデルの研究は将来重要になる可能性があると考えられる. 本研究では, まず統計理論である TSDIA 理論解析により導出された一方程式型 SGS モデルを用いて, 一様減衰流, 混合層流, チャンネル流の 3 つの流れ場での最適化を行った. 次に, 理論から導出された一方程式型 SGS モデルの問題点の改良を行い, 高次等項渦粘性近似を導入した新しい一方程式型 SGS モデルを提案する. さらに, そのモデルを周期的吹き出し吸い込みを伴うチャンネル流に適用して, その有効性を議論する.

2. 基礎方程式

本研究で取り扱う非圧縮性の Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (4)$$

で表現される. ここで, u_i は速度ベクトル, p は圧力, ν は分子粘性を意味し, 同記号のテンソルの足の間では縮約を取るものとする. LES の基礎方程式を導出するための GS 成分と SGS 成分を分離するフィルター G は

*東京大学生産技術研究所 第 1 部

$$\bar{u}_i(x) = \iiint d^3x' G(x-x') u_i(x'), \quad (5)$$

で定義される。(本研究では以後一貫して Gaussian フィルター

$$G(x) = \sqrt{\frac{6}{\pi \Delta^2}} \exp\left(-\frac{6x^2}{\Delta^2}\right), \quad (6)$$

を仮定して研究を進めている。) 式 (3) と (4) にフィルター操作を実行すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} &= \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (8)$$

となり、これが LES の基礎方程式にあたる。式 (7) の最後尾項は通常 3 つの項に分離され

$$\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j = L_{ij} + C_{ij} - R_{ij}, \quad (9)$$

$$L_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j, \quad (10)$$

$$C_{ij} = \overline{\bar{u}_i u_j^s} + \overline{u_i^s \bar{u}_j}, \quad (11)$$

$$R_{ij} = -\overline{u_i^s u_j^s}, \quad (12)$$

L_{ij} は Leonard 項, C_{ij} は Cross 項, R_{ij} は SGS レイノルズ応力項と呼ばれている。本研究ではこの中でフィルターの干渉による効果を意味する Leonard 項と Cross 項は無視し, SGS レイノルズ応力項のみを取り扱う。

また, フィルターの干渉項を無視した近似下で SGS エネルギー ($K^s = \overline{u_j^s u_j^s} / 2$) の輸送方程式は

$$\frac{DK^s}{Dt} = R_{ij} \bar{S}_{ij} - \varepsilon^s + \nabla \cdot T^s, \quad (13)$$

のように書け, ε^s , $\nabla \cdot T^s$ はそれぞれ SGS エネルギーの散逸項, 拡散項と呼ばれ, 次のように定義される:

$$\varepsilon^s = \nu \overline{\frac{\partial u_i^s}{\partial x_j} \frac{\partial u_i^s}{\partial x_j}}, \quad (14)$$

$$T_j^s = -\frac{1}{2} \overline{u_j^s u_m^s u_m^s} - \overline{u_j^s p^s} + \nu \frac{\partial K^s}{\partial x_j}. \quad (15)$$

結果として, K^s の輸送方程式を解く一方程式型 SGS モデルでは R_{ij} , ε^s , T_j^s の 3 つの量を GS 量と K^s を用いてモデル化する必要がある。

3. 統計理論からのモデル表現と最適化

慣性領域でのエネルギースペクトルとして一様等方性乱流のコルモゴロフスペクトルを仮定した低次の TSDIA 解析⁷⁾により, 式 (12), (14), (15) は

$$R_{ij} = -\frac{2}{3} K^s \delta_{ij} + \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (16)$$

$$\nu_T = C_\nu \Delta K^s{}^{1/2}, \quad (17)$$

$$\varepsilon^s = C_\varepsilon \frac{K^s{}^{3/2}}{\Delta}, \quad (18)$$

$$T_j^s = (C_d \Delta K^s{}^{1/2} + \nu) \frac{\partial K^s}{\partial x_j}, \quad (19)$$

(C_x は全てモデル定数) とモデル化される。このモデルを用いて, 一様減衰流 ($64 \times 64 \times 64$, $\nu = 0$), 混合層流 ($64 \times 64 \times 64$, $\nu = 0$), チャンネル流 ($128 \times 64 \times 64$, レイノルズ数 640, Van Driest 型の壁関数を使用) の数値解析した結果 (計算手法は 2 次精度中心差分, 時間発展は 2 次の Adams-Bashforth 法, 計算格子はスタガード格子.), モデル定数の最適値は Table. 1 のようになった。

この結果は, C_ε の値に関して一様減衰流の値を使用して, 他の 2 つの流れ場で最適化を行ったものである。ただし, C_d はどの流れ場においても GS 諸量にあまり影響を与えないことを確認した上で, Shimomura による理論値⁸⁾の近傍値を採用している。(理論値は TSDIA のカットオフの長さをフィルター代表値の 2 倍に選んだときの結果である。) 混合層流やチャンネル流に関してはほぼ Hamba⁹⁾ や Horii¹⁰⁾ の先の研究と一致している。また, 理論値は一様減衰流の最適値に近いことが確認された。モデル定数の流れ場依存性は Smagorinsky モデルと同様に, この一方程式型 SGS モデルにおいても再現されている。

4. SGS 散逸率のモデル化

先にあげた一方程式型 SGS モデルの GS 諸量に関する結果は Smagorinsky モデルでの解析結果と比べ, ほとんど変化がなかった。しかし, このモデル (16)-(19) ではチャンネル流での壁近傍における K^s の挙動に関して 1 つの問題点が確認できる。解析条件である非圧縮条件 (8) と壁での Non-slip 条件 ($u_i(y^+ = 0) = 0$) から, 壁近傍での速度の壁座標に関する依存性は

$$u_{wall} = Ay^+ \dots, \quad (20)$$

$$v_{wall} = By^{+2} + \dots, \quad (21)$$

$$w_{wall} = Cy^+ + \dots, \quad (22)$$

となり、速度の2体量であるGSエネルギーやSGSエネルギーは y^+ の2乗以上で減少する必然性がある。にもかかわらず、Fig. 1(a) が示すように式(16)-(19)のモデルではSGSエネルギーが y^+ の1乗で減少している。この問題点の原因はSGS散逸率 ϵ^s のモデル化(18)にあると考えられる。 ϵ^s の定義である

$$\epsilon^s = \nu \frac{\partial u_i^s}{\partial x_j} \frac{\partial u_i^s}{\partial x_j}, \quad (23)$$

は式(20)-(22)の制約の下では、壁上で本来有限な値を取るはずであるが、モデル表現である式(18)は壁での K^s のNon-slip条件から0となってしまう。この矛盾を解消するため、JonesとLaunderにより提案されたアンサンブル平均型モデルでの漸近挙動補正項¹¹⁾を3次元化して導入した

$$\epsilon^s = C_\epsilon \frac{K^{s3/2}}{\Delta} + 2\nu \frac{\partial \sqrt{K^s}}{\partial x_j} \frac{\partial \sqrt{K^s}}{\partial x_j}, \quad (24)$$

をSGS散逸率のモデル表現として提案する。このモデルを導入して解析を行った結果がFig. 1(b)であり、 K^s の壁挙動に関して大きな改善が見られた。しかし、この補正項はチャンネル流において減衰関数がSGS渦粘性率を消去している領域で主に働くため、モデル(18)と(24)の違いはGS諸量の結果にはほとんど影響していない。

5. 高次等方項の導入

次にモデル定数の流れ場依存性に関して考える。本研究の解析対象とした一様減衰流、混合層流、チャンネル流では定常・非定常性という性質のほかに、平均剪断の強弱に関してそれぞれ違いが存在している。後者の観点からみると、一様減衰流(0)、混合層流(0~0.1程度)、チャンネル流(0~640)の順に平均剪断の強度が変化し、Table. 1との対応から強い剪断の場所でSGS粘性率を抑制する効果がモデル定数の固定化を行うためには必要であることがわかる。そこで、高次TSDIA理論解析の結果⁸⁾から渦粘性を抑制する項を取り出すと、 ν_T は

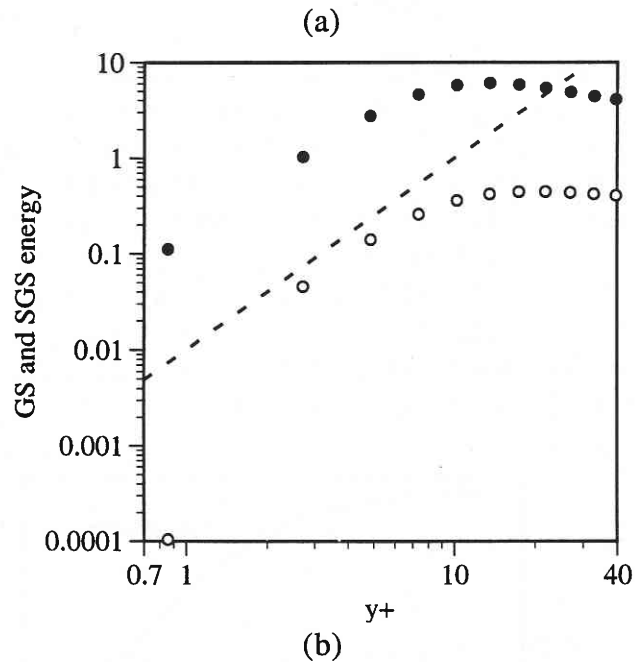
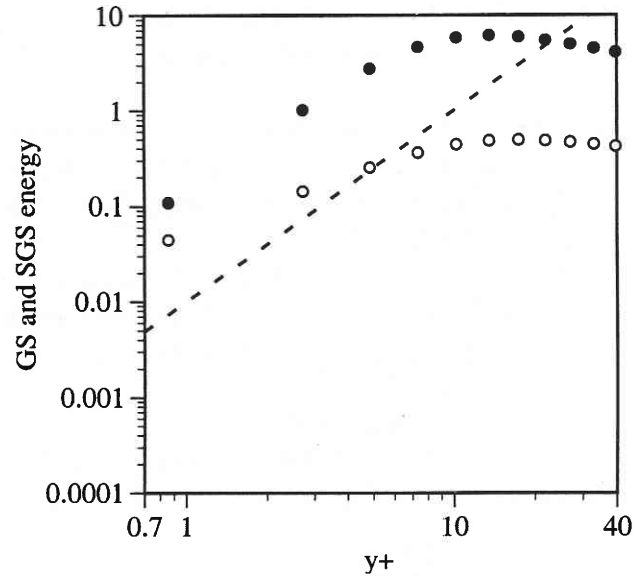


Fig. 1 GS及びSGSエネルギーの壁挙動。(a)一方程式型SGSモデルの結果、(b)SGS散逸率のモデル化に補正項を加えた一方程式型SGSモデルの結果。●はGSエネルギー、○はSGSエネルギー。破線は y^{+2} の線。

Table 1 最適化されたモデル定数の結果。 C_{SK} は $K^s = C_{SK} \Delta^2 S^2$ の関係から求めた値。

モデル定数	一方程式型モデル			Smagorinskyモデル	
	C_ν	C_ϵ	C_d	C_S	C_{SK}
一様減衰流	0.112	0.835	0.1	0.22	0.183
混合層流	0.0694	0.835	0.1	0.13	0~0.1(0.079)
チャンネル流	0.05	0.835	0.1	0.10	0.055~0.04
理論値	0.133	0.92	0.928	0.224	0.144

$$\nu_T = 0.133K^s \Delta - 0.0105K^s \Delta^{-1/2} \Delta^3 \bar{S}^2 - 0.00110K^s \Delta^3 \bar{W}_{mn} \bar{W}_{mm} \quad (25)$$

(\bar{W}_{mn} は GS 渦度テンソルである。) のように表現される。(この高次項は既に Horiuti により研究されてきたが、彼の提案の Bardina タイプのモデル¹²⁾では直接 SGS エネルギーを扱わない点が本研究と異なっている。) ここではモデル表現を簡単化するため非平衡性や非等方性に関する項は全て無視した。式 (25) の右辺第 3 項は回転する流れ場等で重要になることが予想されるが、本研究の検証対象とした流れ場では第 2 項と同様の効果があると考え、モデル定数が小さいことを理由に無視する。

式 (25) の形式では負の SGS 粘性率が生じて、計算が不安定になるため、パデ近似を用いて

$$\nu_T = \frac{C_v K^s \Delta}{1 + C_K \Delta^2 \bar{S}^2 / K^s}, \quad (26)$$

(理論では、 $C_v = 0.133$, $C_K = 0.0784$ となる。) として正の SGS 渦粘性率を確定させたモデルを提案する。式 (26) のモデルにおいても上述の剪断が強い場所で ν_T を抑制する効果があることはその形状から明らかである。このモデルを用いて先の 3 つの流れ場を解析した結果、 $C_v = 0.185$, $C_K = 0.10$ (C_e , C_d は先の一方程式型 SGS モデルと同一) という定数系でモデル定数を固定して解析を行えることが確認できた。(ただし、チャンネル流の解析では Van Driest 型の壁関数が必要である。) 結果は Fig. 2-4 で与えている。また、チャンネル流の壁近傍で、この

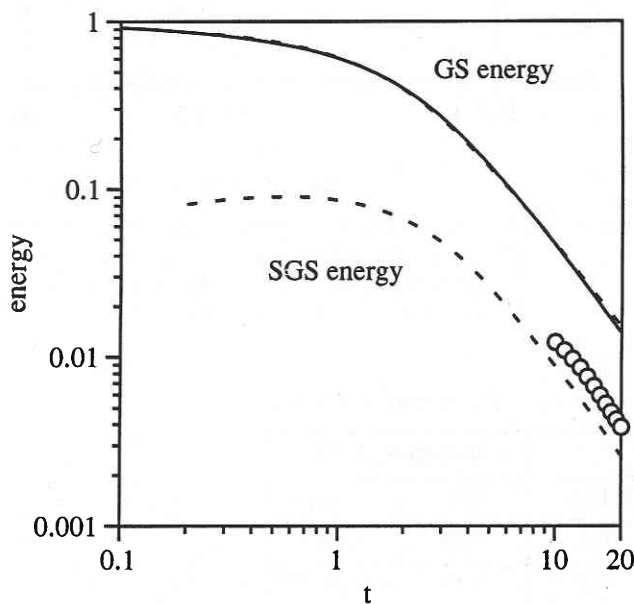


Fig. 2 一様減衰流でのエネルギーの時間変化。実線は Smagorinsky モデル，破線は本モデル，○はスペクトルを補外して得られた値。

モデルは減衰関数に加え剪断による抑制の効果も強く働くため、 K^s やその取支に関する量が高次等項を含まない一方程式型 SGS モデルに比べ小さくなることが確認された。(Fig. 5, 6) しかし、平均的な乱れの大部分を担う GS 諸量は適確に再現しているため、本モデルは有効なモデルであると考えられる。

次に、以上の結果を踏まえて Smagorinsky モデルや標準的な一方程式型 SGS モデル (16)-(19) でのモデル定数の流れ場依存性の原因から、本モデルを考える。Sma-

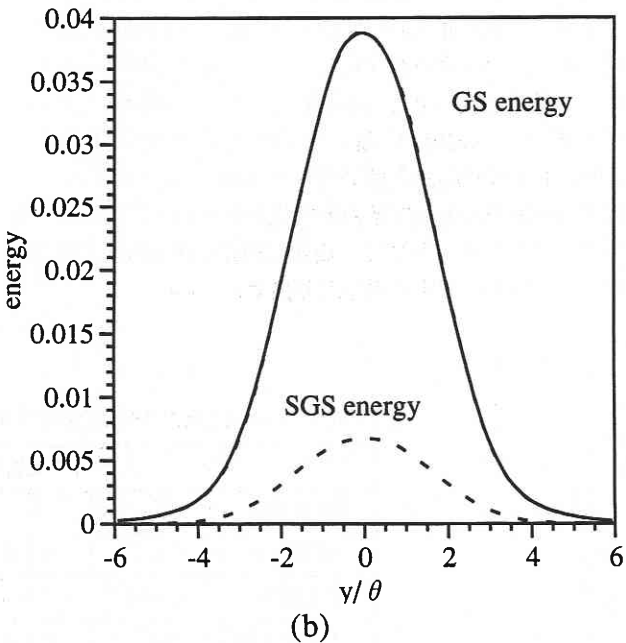
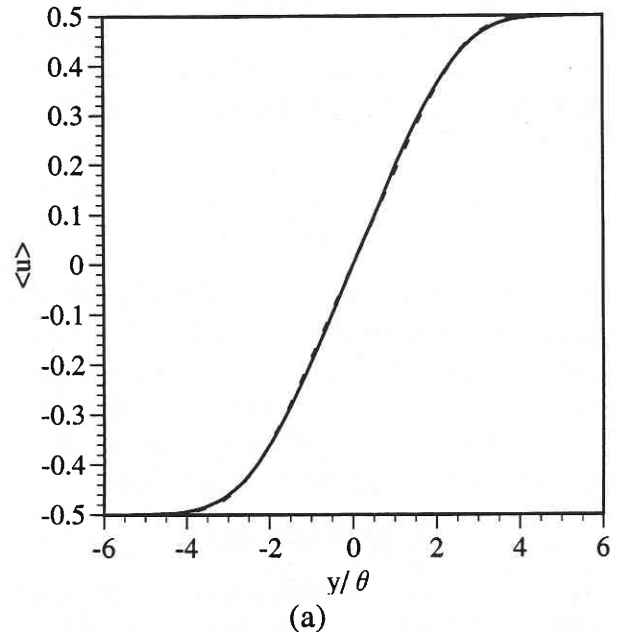


Fig. 3 混合層流の平均量。(a) 平均速度，(b) GS と SGS エネルギー。実線は Smagorinsky モデル，破線は本モデル。

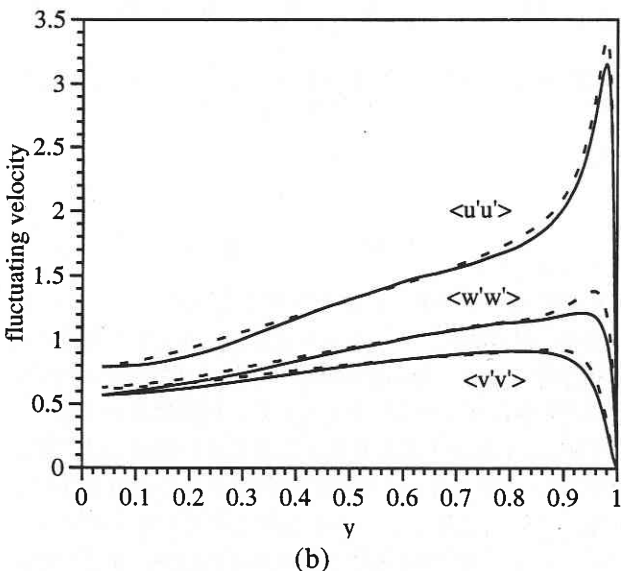
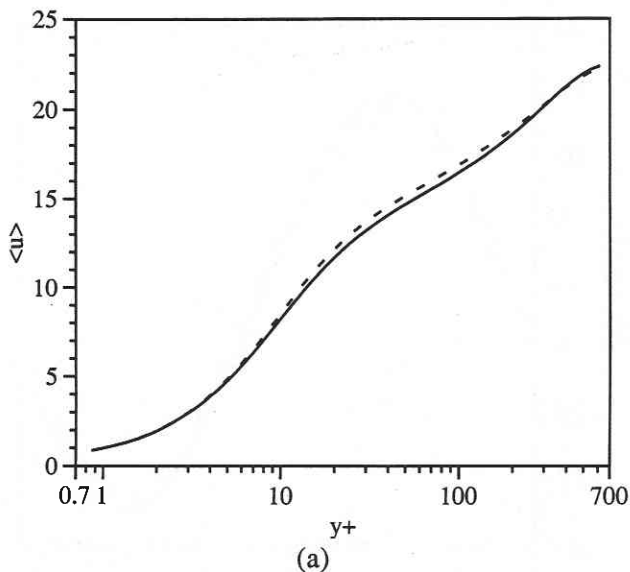


Fig. 4 チャンネル流の平均量. (a) 平均主流速度, (b) 揺らぎ速度. 実線は Smagorinsky モデル, 破線は一方程式型モデル.

gorinsky モデルの導出の際,

○ K^s の輸送方程式中での生成項と散逸項の釣り合い

○ K^s を GS ストレインとフィルターの代表長さで表現という 2 つの仮定が用いられる. 非平衡モデルや標準的一方程式型 SGS モデルでは前者のずれを考慮することにより流れ場依存性を解消しようと試みてきたが, 良い結果を引き出すことはできなかった. そのため, モデル定数の流れ場依存性の原因は後者にあると考えられる. 今回の提案のモデルは, 式 (26) の分母第 2 項で輸送方程式から得られる K^s と Smagorinsky モデルでの K^s のモデル表現 $\Delta^2 \bar{S}^2$ との比を導入して, 後者から生じる寄与を考慮している

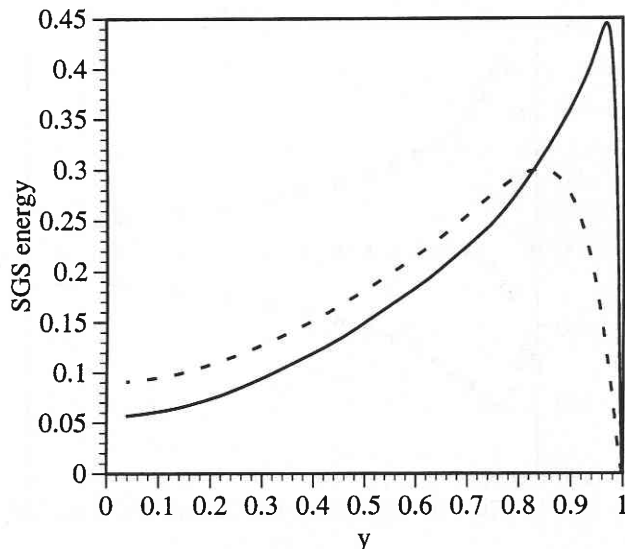
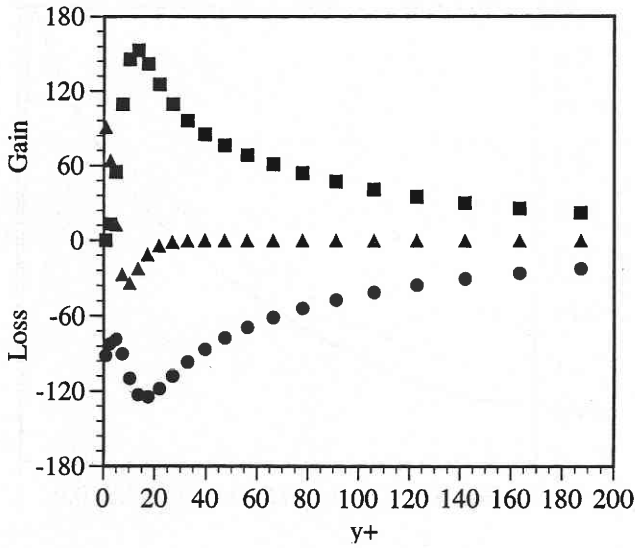


Fig. 5 SGS エネルギー. 実線は一方程式型モデル, 破線は高次等方項を渦粘性に導入した一方程式型モデル.

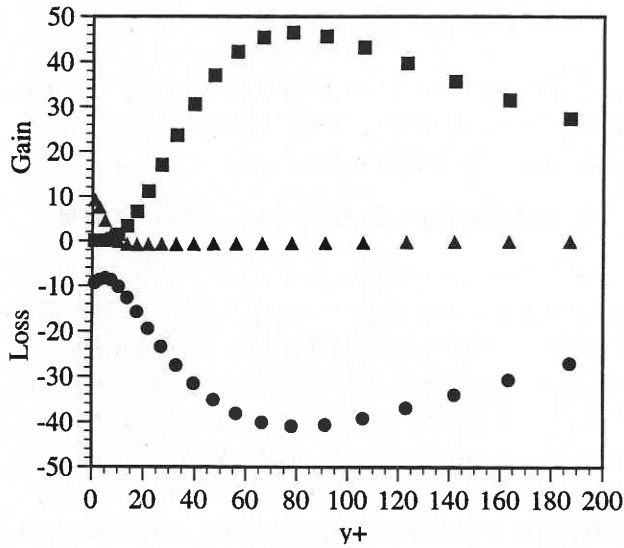
点が改善につながったと考えられる. また, K^s の輸送方程式を解いている点から, 本モデルは前者のずれに対しても改善を見ることが期待できる.

6. 周期的吹き出し吸い込みチャンネル流への適用

先のモデル (26) の検証として, 三宅, 辻本による周期的吹き出し吸い込みを伴うチャンネル流 (Fig. 7) の直接数値解析 (DNS)¹³⁾ との比較を行った. この流れ場では, Sumitani と Kasagi¹⁴⁾ による一様な吹き出し吸い込みを伴うチャンネル流の吹き出し速度に比べ最大 10 倍程度の壁垂直方向の速度が存在するため, 移流の効果を再現することが重要になると考えられる. 計算手法は 2 次精度中心差分, 時間発展は 2 次の Adams-Bashforth 法, 計算格子はスタガード格子, 格子数は $128 \times 64 \times 64$, 壁間の半値幅定義のレイノルズ数 150 である. 以後示す結果は全て平板側壁面上での統計量である. 摩擦速度の結果である Fig. 8 では, 本モデルは Smagorinsky モデル ($C_s = 0.1$) に比べてよく DNS を再現している. また, Fig. 9 での平均主流速度, 乱流エネルギー, レイノルズ応力に関しては Smagorinsky モデル, 本モデルとも大差は見られなかった. しかし, Fig. 10-12 での乱流エネルギー収支の等高線図では, 本モデルは Smagorinsky モデルの結果に比べ, 以下の 2 点で改善が見られた. 一つは生成項のピークの領域が再現されている点であり, もう一つは移流項の構造がより DNS の結果に近づいている点である. これらの結果は移流効果が強い場合での本モデルの有効性の示していると考えられる.



(a)



(b)

Fig. 6 SGS エネルギーの収支. (a) 一方程式型モデル, (b) 高次項を含む一方程式型モデル. ■は SGS 生成項, ●は SGS 散逸項, ▲は SGS 拡散項.

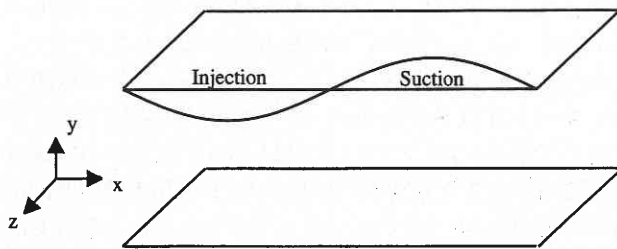


Fig. 7 周期的吹き出し吸い込みを伴うチャンネル流の概略図.

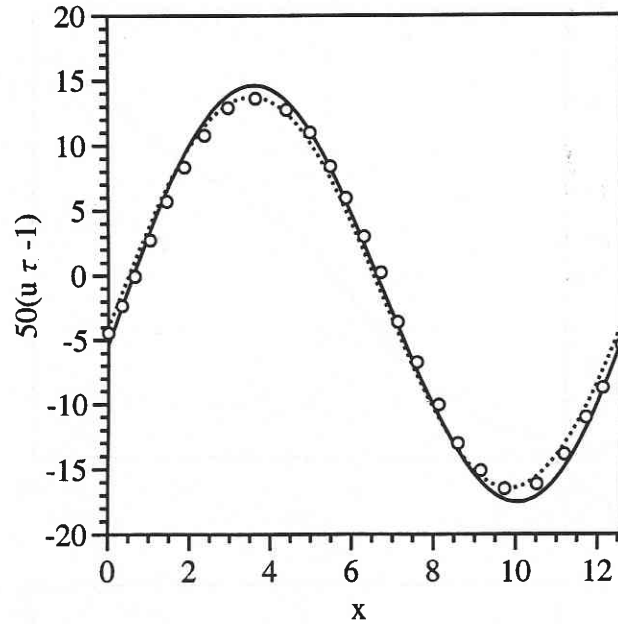
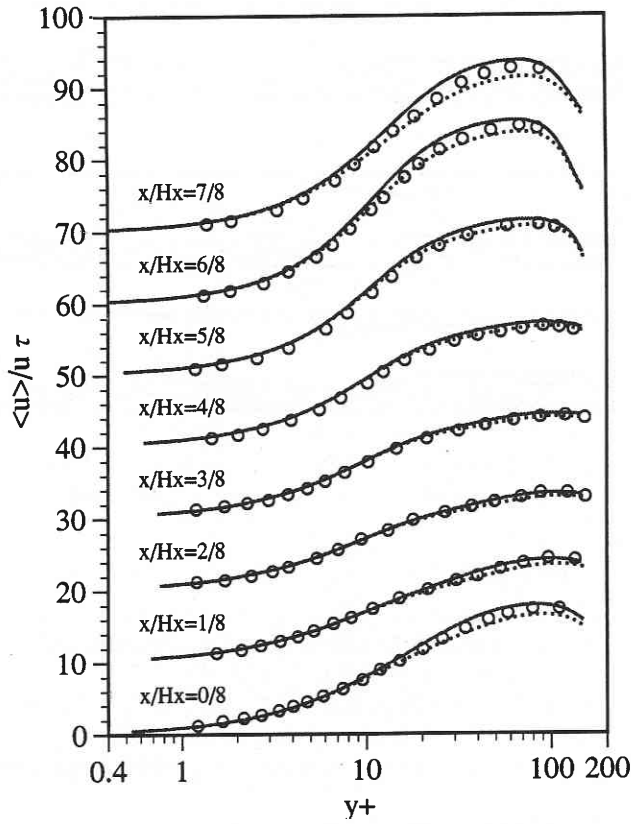


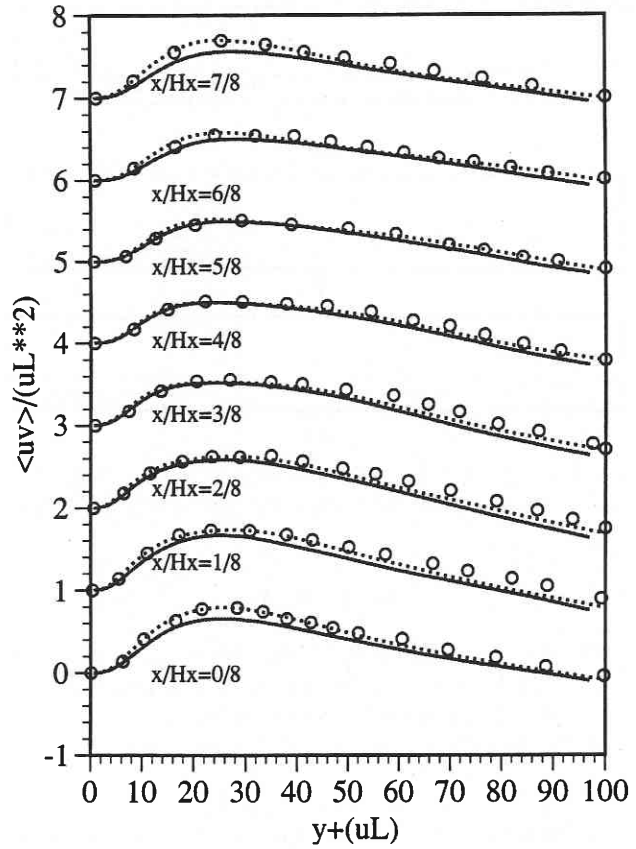
Fig. 8 平板側壁面上の局所壁面摩擦速度. ○は DNS, 実線は Smagorinsky モデル, 点線は本モデル.

7. 結 言

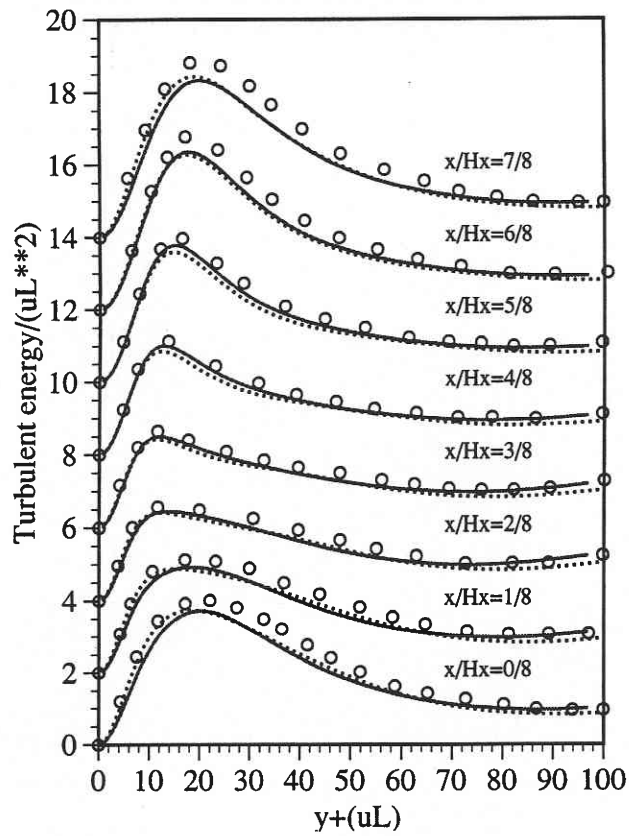
統計理論から導出された一方程式型 SGS モデルを一様減衰流, 混合層流, チャンネル流に適用しモデル定数の最適化を行ったが, Smagorinsky モデルと同様にモデル定数は流れ場に依存する結果となった. 統計理論からの一方程式型 SGS モデルによるチャンネル流の解析では, 壁近傍で SGS エネルギーの挙動に解析条件との不整合性が生じる. この点に関して, SGS 散逸率のモデルに壁で 0 にならない補正項を加えることで改善を行った. また, 理論解析から導出される高次の GS ストレインによる抑制項を SGS 渦粘性率に加えることで, 先の 3 つの流れ場を同一のモデル定数で解析を行うことを可能にした. しかし, このモデルでは壁付近で SGS 関連の諸量が, 先の一方程式モデルの結果に比べかなり小さく見積られる傾向にあることが確認された. 複雑な流れ場での検証例として, 提案のモデルを用いて比較的強い移流効果を有する周期的吹き出し吸い込みを伴うチャンネル流の LES を実行した. その結果, Smagorinsky モデルに比べて本モデルはいくつかの改善が確認された. (1996年10月11日受理)



(a)



(c)



(b)

Fig. 9 平板側での平均量分布. (a) 平均主流速度, (b) 乱流エネルギー, (c) レイノルズ応力. ○は DNS, 実線は Smagorinsky モデル, 点線は本モデル.

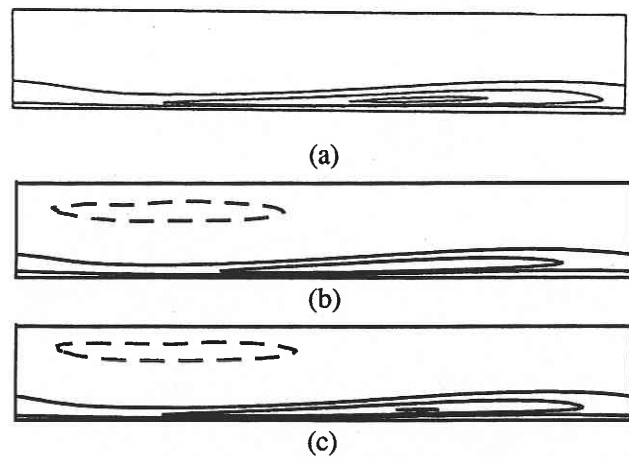


Fig. 10 乱流エネルギーの生成項 P_K の等高線図. (a) DNS, (b) Smagorinsky モデル, (c) 本モデル. 破線は $P_K = 0$ の領域.

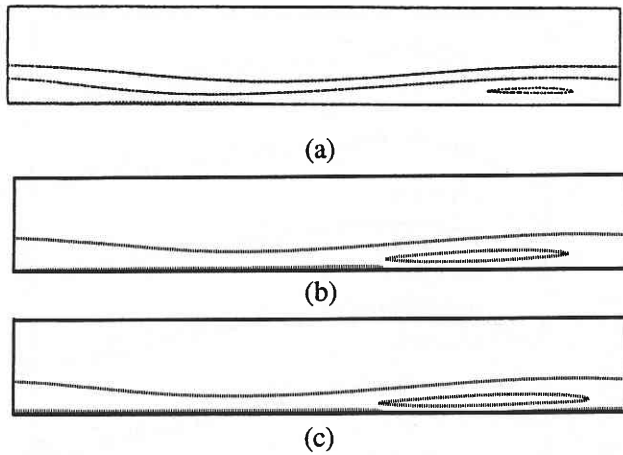


Fig. 11 乱流エネルギーの散逸項 ε の等高線図. (a) DNS, (b) Smagorinsky モデル, (c) 本モデル. 点線は負の領域.

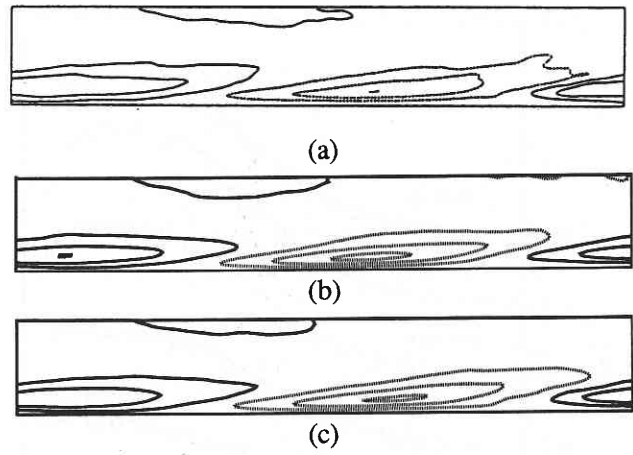


Fig. 12 乱流エネルギーの移流項 C_K の等高線図. (a) DNS, (b) Smagorinsky モデル, (c) 本モデル. 点線は負の領域.

参 考 文 献

- 1) M. Antonopoulos-Domis: J. Fluid Mech. 104 (1981) 55.
- 2) N.N. Mansour, J.H. Ferziger & W.C. Reynolds: Report No. TF-11 Stanford University (1978).
- 3) U. Piomelli, P. Moin & J.H. Ferziger: Phys. Fluids 31 (1988) 1884.
- 4) A. Yoshizawa: Phys. Fluids A3 (1991) 2007.
- 5) 森西洋平: "LES による乱流解析の実用化のための基礎研究" 東京大学博士論文 (1989).
- 6) 岡本正芳: 第 9 回数値流体力学シンポジウム講演論文集 (1995) 211.
- 7) M. Okamoto: J. Phys. Soc. Jpn. 63 (1994) 2102.
- 8) Y. Shimomura: Hiyoshi Review of Natural Science Keio University 16 (1994) 12.
- 9) K. Horiuti: J. Phys. Soc. Jpn. 54 (1985) 2855.
- 10) F. Hamba: J. Phys. Soc. Jpn. 56 (1987) 2721.
- 11) W.P. Jones and B.E. Launder: Int. J. Heat Transfer 15 (1972) 301.
- 12) K. Horiuti: Phys. Fluids A5 (1993) 157.
- 13) 三宅, 辻本: 日本機械学会論文集 B61 (1995) 2401.
- 14) Y. Sumitani and N. Kasagi: AIAA J. 33 (1995) 1220.