

差分法および要素法 LES におけるダイナミック SGS モデルの評価

谷 口 伸 行*, 大 島 ま り*, 坪 倉 誠*

Nobuyuki TANIGUCHI, Marie OSHIMA and Makoto TSUBOKURA

乱流 LES の工学的応用には差分法や要素法による実用的な計算法の開発が必要となる。本論では特に、最近注目されているダイナミック SGS モデルを取り上げて、差分法や要素法による計算法について検討し、モデル定数の影響などについて一様等方乱流とチャンネル乱流の LES において数値検証した。ダイナミック SGS モデルに現れる空間フィルターについて、差分法や要素法における数種類の定式化を比較評価した。

1. 研究の背景

乱流の数値解析において、ラーゼ・エディ・シミュレーション (LES) は N-S 方程式の近似解を直接計算法と比較して少ない計算負荷で得ることができる手法として考えられている。LES では乱流の解として速度分布のうち計算格子より大きな成分 (GS: Grid Scale と呼ぶ) は直接数値解析され、計算格子で直接解像できない小スケール成分 (SGS: Subgrid Scale と呼ぶ) がモデル化の対象となる。計算格子で解像可能な GS 成分についての基礎方程式において、SGS 成分の影響は応力 (以下 SGS 応力と呼ぶ) として現れ、SGS モデルは具体的には SGS 応力として定式化される。

しかし、LES の SGS モデルとして広く適用されてきた Smagorinski モデルにはいくつかの欠点が指摘される¹⁾。よって、Smagorinski モデルの実際の応用に際してはモデル定数を対象ごとに最適化し、また、壁近傍では修正式を用いる必要があった。これらは、Smagorinski モデルが乱流エネルギー散逸率を統計的にも正しく予測していないことを意味しており、その理由としては、

- SGS 応力の近似精度が低いため GS 成分の予測精度に影響を与えること、
- 壁近傍などで乱流構造に非等方性が現れる場合に乱流の代表的スケールを表す量が適切でないこと、
- 低レイノルズ数流れや壁面近傍では慣性小領域が明確に現れないこと、
- 時間的、空間的に流れ場が変化する場合のエネルギースペクトルの変化を反映しないこと、

などが挙げられる。

このうち a) については、DNS データを用いた評価によって Smagorinski モデルは SGS 応力の近似として必ずしも精度が高くないことが指摘されている。ここには、乱流の瞬時変動に伴う高波数から低波数へのエネルギー逆輸送 (バックスキャッター) の予測も含まれる。ただし、局所等方性の考え方に従えば、乱流エネルギーカスケードが GS 成分によって十分広いスペクトルに亘ってシミュレートされていれば SGS 応力の詳細は統計平均量の予測には重要な影響を及ぼさないと期待することができる。また、SGS 応力のより良い近似として Bardina モデルや乱流の間欠性を考慮したモデルなどが提案されているが、これらを用いることは少ない計算格子点で乱流エネルギーカスケードを表現するのに効果があると考えられる。

一方、b) は渦粘性仮定に、c), d) については慣性小領域での普遍スペクトル分布を仮定することに主な問題があると考えられるが、これは、Smagorinski モデルの定式上はモデル定数 (Smagorinski 定数) の最適化の問題としても見ることができる。たとえば、波数スペクトルの勾配が急に下がる粘性スケールでは SGS 応力がより早く減少すべきであり、モデル定数を一定値としては乱流直接計算へ正しく漸近しない。よって、壁面近傍の低レイノルズ効果や遷移 (逆遷移) を扱うためには、モデル定数を解に依存して修正することが必要である。Germano ら²⁾の提案したダイナミックモデルはこれらの問題を解決するものとして注目される。

Smagorinski モデルは、定式が簡潔で計算安定性にも優れていることから現在のところ応用的研究では広く適用されている。しかし、複雑な境界条件や連成現象を伴う工学

*東京大学生産技術研究所 第2部

的な流れ問題では上に指摘した Smagorinski モデルの欠点が増えアップされることも多い。一方、ダイナミックモデルについて指摘されてきた応用上の問題、たとえば、空間フィルターの定式化とその計算精度の影響や、モデル定数がダイナミックに計算されることに伴う計算不安定、などに対して改良が試みられ、また、比較的複雑な問題への応用も進められてきた³⁾。

そこで本論では、Smagorinski モデルに替わりうる実用的な SGS モデルという観点からダイナミックモデルを取り上げる。以下では、差分法 (FDM) や有限要素法 (FEM) により解析する際の計算手法を概説し、その問題点などに対する最近の研究成果について述べた後、基本的な対象におけるいくつかの数値検証事例を示して解析精度やその定数依存性などを評価する。

2. ダイナミック SGS モデルとその改良

2.1 ダイナミックモデルの定式

Germano ら²⁾の提案したダイナミック SGS モデルでは、LES の計算格子で解像される GS 成分 u に対して粗さの異なる空間フィルターの解 (Test Scale (TS) 成分と呼ぶ) を考える。適当な空間フィルター操作により $\bar{u} = \bar{G}(u)$, $\bar{\bar{u}} = \bar{G}(\bar{u})$ と評価できるすれば、それぞれの SGS 応力 τ_{ij} , T_{ij} の関係から

$$C\Delta^2 = -\frac{1}{2} \frac{l_{ij}^* m_{ij}}{m_{ij} m_{ij}}$$

$$l_{ij} = T_{ij} - \bar{\tau}_{ij} = \bar{\bar{u}}_j \bar{\bar{u}}_i - \bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_j - l_{ij}^* = l_{ij} - \delta_{ij} l_{kk}/3$$

$$m_{ij} = \alpha^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} - |\bar{S}| \bar{S}_{ij}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

$$|\bar{S}| = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}$$

$$\alpha^2 = (C_T \Delta_T^2) / (C \Delta^2) \quad (1)$$

が導かれ、Smagorinski モデルのモデル定数 C ($=Cs^2$, Cs : Smagorinski 定数) とフィルター幅 Δ が与えられる⁴⁾。ここで、SGS 応力の関係式 l_{ij} が GS 成分から計算可能である点に注意されたい。TS 成分に対する C_T , Δ_T は GS 成分と同様に定義されると考える。

式 (1) を元の Smagorinski モデルの式に代入するとモデル定数 C とフィルター幅 Δ が消去できる。一方、ダイナミックモデルで定めるべき定数は、式 (1) 中の α , および、GS, TS 成分に関する有効フィルター幅 Δ , Δ_T である (ただし、GS 成分のフィルター $\bar{G}(u)$ を陽に計算する必要はない)。ダイナミックモデルにおいても Smagorinski 定数がダイナミックに定められることを除いて

GS 成分の基礎式は Smagorinski モデルと同じであるので、GS 成分のフィルター幅は従来の LES と同様に $h < \Delta < 2h$ (h : 格子間隔) の範囲で定義するのが適当であろう。また、Smagorinski 定数が緩やかに変化する (慣性小領域では一定値をとる) ことを仮定すると、GS, TS 成分に関するフィルターが相似で、かつ、解像される全波数に対して $\beta = (\Delta_T/\Delta)$ が小さければ $C_T = C$ が期待でき、パラメータが一つ減じられる。Germano らはスペクトル法を用い波数カットオフ・フィルターを適用したチャンネル乱流 LES において $\Delta_T = 2\Delta = 4h$ を推奨値とし、 $C_T = C$ を仮定して $\alpha = \beta = 2$ により良好な結果を得ている。その後の多くの研究はこの結果に従っているが、空間フィルターが異なる場合のパラメータの最適化には議論の余地がある。特に、差分法および有限要素法で定式化した場合については次節で検討する。

なお、ダイナミックモデルの考え方は Smagorinski モデル以外の SGS モデルに適用することもできる。たとえば、式 (1) で SGS モデルとしてスケール相似モデルとの Mix モデル (Bardina ら⁵⁾) を採用すると、式 (1) に換えて、

$$C\Delta^2 = -\frac{1}{2} \frac{(l_{ij}^* - b_{ij}^*) m_{ij}}{m_{ij} m_{ij}}$$

$$b_{ij} = (\bar{\bar{u}}_j \bar{\bar{u}}_i - \bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_j) - (\bar{\bar{u}}_j \bar{\bar{u}}_i - \bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_j) \quad (2)$$

が導出される (Vreman ら⁶⁾)。

2.2 負粘性による計算不安定化の処理

ところで、実際のチャンネル流 LES などにおいて式 (1) をそのまま各計算点に適用すると約半分に近い計算点で定数 C (直接には $(C\Delta^2)$) に負値、すなわち、負の渦粘性を与えて計算不安定を生じる。これは、ダイナミックモデルの応用上の問題点である。この負粘性を SGS 応力によるエネルギーのバックスキャッター効果に対応させた議論もなされているが、DNS データからのア priori 評価⁷⁾では式 (1) は係数 C の確率密度分布を過大に予測する様であり、計算不安定をもたらす局所負粘性は基礎となる Smagorinski モデルの瞬時的 SGS 応力に対する近似の低さに起因すると考えるのが適切であろう。この場合、適当な平均量が意味を持つと考えられる。

従来の研究では、負粘性による計算不安定を緩和するために Germano ら³⁾は式 (1) の分子、分母について一様な領域 (一様乱流では全領域、平行チャンネル流では壁面に平行な平面) での平均 $\langle \rangle$ を課し

$$C\Delta^2 = -\frac{1}{2} \frac{\langle l_{ij}^* m_{ij} \rangle}{\langle m_{ij} m_{ij} \rangle} \quad (1')$$

と修正して用いている。同様に、やや複雑な流れでは

Zang ら⁷⁾が近傍点の平均を, Piomelli ら⁹⁾が時間平均を用いているが, いずれにしても C の負値を除くにはある程度多くのサンプルを要するため, 空間的にも時間的にも変化する乱流場には応用しがたい。

これに対して, Goshal ら¹⁰⁾は式 (1) に代えて定数 C の空間分布を考慮した定式を与えており, 上記の ad hoc な平均操作に比べて数学的により正確な表現と考えられる。Goshal らの基礎的な検証例では C の過大な空間変動を緩和することが示されているが, 他の流れ場へ応用した際にも数値不安定を十分抑制できるかは明らかでない。また, 積分方程式となるため複雑系への直接応用は困難である (簡便な式を時間発展的に解く計算法が Piomelli ら⁹⁾により提案されている)。

一方, Meneveau ら¹¹⁾は Taylor の凍結乱流の仮定に準じ Lagrangian 微分 (物理的には流跡線) に沿って乱流特性が輸送されつつ時間緩和すると考えることで次式を導いた。

$$C\Delta^2 = I_{LM}/I_{MM}$$

$$\frac{\partial I_{LM}}{\partial t} + u_j \frac{\partial I_{LM}}{\partial x_j} = \frac{1}{T} (l_{ij}^* m_{ij} - I_{LM})$$

$$\frac{\partial I_{MM}}{\partial t} + u_j \frac{\partial I_{MM}}{\partial x_j} = \frac{1}{T} (m_{ij} m_{im} - I_{MM})$$

$$\text{ただし, } T = Ct\Delta I_{LM}^{-1/4} \quad (3)$$

式 (3) は計算格子やフィルター式の定義と独立に定式化される点では応用が容易といえる。また, 式 (3) は形式的には輸送方程式を解くように定式化されており, 時間的空間的に変化する流れ場に適用しても適当な初期条件とモデル定数のもとでは C の負値に伴う計算不安定を抑制できると考えられる。ただし, 実際の応用では数値誤差の影響を除くための数値的な修正 (局所的な負粘性や特異データの除去) が併用されている。なお, Meneveau はスペクトル法による一様等方乱流 LES において緩和時間の最適化係数を $Ct \sim 2.0$ としているが, 小林ら¹²⁾が差分法による複雑な流れ場へ適用した事例では 0.2 を用いて比較的良好な結果を得ており, この最適値は流れ場や計算法によって変わる可能性がある。

2.3 空間フィルターの計算法

ここまで, 空間フィルターの具体的な定義については明示していなかった。ダイナミックモデルを適用した LES の数値検証を示す前に, 差分法 (または, 有限要素法) における空間フィルターの計算式の導出とそれに関わる問題点を明らかにしておく。

スペクトル空間での計算ではスペクトル波数のカットオ

フ・フィルターが正確に定義できるが, 差分空間でこれを用いるのは適切ではない。従来の LES では差分空間で評価できる空間フィルターとして体積フィルターか Gaussian フィルターを仮定しているが, フィルター幅 Δ による Taylor 級数展開で評価すると, いずれも,

$$\bar{u} = \bar{G}(\bar{u}) = \bar{u} + \frac{\Delta^2}{24} \nabla^2 \bar{u} + O(\Delta^4) \quad (4)$$

と近似される¹³⁾。LES における空間フィルターをこの精度で評価する限り体積フィルターと Gaussian フィルターとは区別されない。式 (4) をダイナミックモデルにおいて用いる際の TS 成分の有効フィルター幅については, $\Delta_T^2 = \bar{\Delta}^2 + \Delta^2$ と算定できる (Gaussian フィルターに対しては厳密に成り立つ)。

等間隔格子において式 (4) を満たす簡単な差分式としては,

$$\bar{u} = \bar{u}_i + \frac{\gamma^2}{24} (\bar{u}_{i-1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i+1}) ; \gamma = \Delta/h \quad (5)$$

が得られる⁴⁾。

スタガード格子配置に対しても同様に

$$\bar{u}_{i+1/2} = \frac{1}{2} (\bar{u}_i + \bar{u}_{i+1}) + \frac{\gamma^2 - 3}{48} (\bar{u}_{i-1} - \bar{u}_i - \bar{u}_{i+1} + \bar{u}_{i+2}) \quad (6)$$

を得る。3次元の差分格子では式 (5) または式 (6) を各格子座標方向に順次適用すればよい。この場合, ダイナミックモデルの差分式は, $\alpha^2 = (C_T \Delta_T^2 / C \Delta^2)$ と $\gamma = (\Delta_T/h)$ の2つのパラメータで定義される。

ところで, LES を差分法で計算する場合に高波数において打ち切り誤差の影響が大きくなることに注意が必要である。ダイナミックモデルでは GS 成分のうちの比較的高波数の変動成分を抽出していることを考慮すると誤差の影響が当然無視できない。よって, 本来のモデル式にこれらの解析誤差を加えたものが実質的な SGS モデルとして機能しているとみなすべきである。ここで, モデル項が仮定したフィルター幅 Δ で定義されているのに対して, 誤差は差分スキームを定義する計算格子幅 h に依存するので, フィルター幅と格子幅の比が異なれば実効 SGS モデルは異なりモデル定数も必ずしも同じとは言えない。しかし, 統計平均的な C の評価に影響を与えるのは主に S_{ij} に伴う (正または負の) 誤差と考えられ, ここに誤差の小さい高次精度スキームを導入すると計算負荷がかなり大きくなってしまふ。この場合, $C_T \neq C$, すなわち, $\alpha^2 (= (C_T \Delta_T^2) / (C \Delta^2))$ と $\beta^2 (= (\Delta_T / \Delta)^2)$ を異なる値として最適化するのが実際的な方法 (手法1) と考えられる。

あるいは, モデル項と同様に解析誤差もフィルター比 β に関して相似に変化する様に定式化するならば, GS 成分

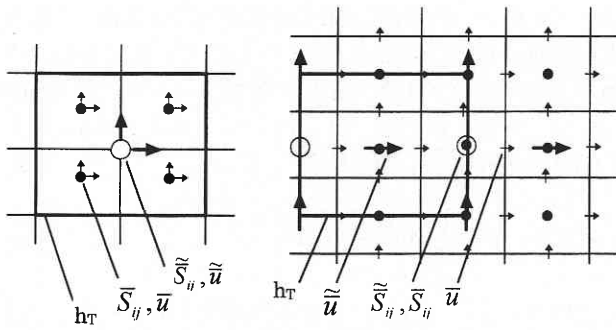


図1 ダイナミックモデル計算(手法2)における粗格子の定義
(右:コロケーション格子, 左:スタガード格子)

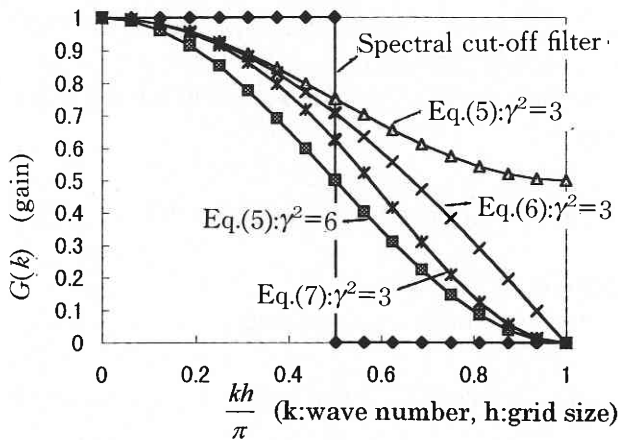


図2 差分空間フィルターの波数特性

と TS 成分の間で $C_T = C$ を期待することができる。この条件は、 $(\Delta_T/h_T) = (\Delta/h)$ となるような粗い格子 h_T 上で TS 成分のモデル式 (2b) を評価することにより近似的に満たされるものと考えられ、フィルター比が整数ならばこのような TS 成分のための粗格子 (図1) が定義できる (手法2)。

この場合の空間フィルターはマルチグリッド法¹⁵⁾の用語に従えば計算格子 h から TS 成分のための粗格子 h_T への制限補間 (restriction: $h \rightarrow h_T$) であり、粗格子 h_T 上でのアライアス誤差を抑えるために計算格子上の最大波数 $k = \pi/h$ のモードが十分除去されていることが望ましい。波数特性 (図2) を調べてみると式 (5) でフィルター幅が小さい ($\Delta_T < 2h$) とときに $k = \pi/h$ のモードの除去が十分でない¹⁶⁾。乱流 LES による速度分布のサンプル解で検証してもこの誤差が無視できないことがわかる。この問題は、偶数、奇数ノードの重み和を等しくした、

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i + \frac{6}{24}(\bar{u}_{i-1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i+1}) + \frac{\gamma^2 - 6}{96}(\bar{u}_{i-2} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i+2}) \quad (7)$$

を式 (5) にかえて適用することで改善が得られる¹⁷⁾ (スタガード配置に対する式 (6) ではこの問題は生じない

(図2))。

つぎに、壁乱流の解析の際に生じるアスペクト比の大きな計算格子に対するフィルター定義について考察する。

多次元フィルタを式 (5) (または式 (7)) や式 (6) で計算する際、次の2つの Type が考えられる。

- A. Δ を座標方向ごとに定義 ($\Delta_x = \gamma h_x$) し、 γ は方向によらず定数。
- B. $\Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3}$ とし、 $\gamma_x (= \Delta/h_x)$ は方向による。

あるいは、TS 成分の計算 (S_{ij} など) を GS 成分と同じ格子 h で行う手法1の場合は、式 (4) を直接差分した式も座標方向に依存しない Type B のフィルターとして適用できる。有限要素法などで非構造型格子を導入する場合にはこれに準じた定式が有効といえる。

3. 差分法、有限要素法 LES における検証

3.1 差分法における検証

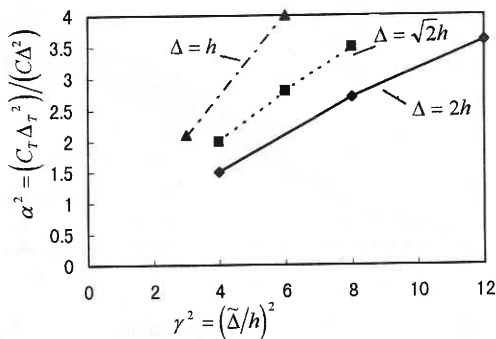
ここでは、上述の様に差分格子で定式化したダイナミックモデルによる LES 計算結果を示し、空間フィルターの定式や係数による依存性などを検討する。計算コードはスタガード格子 SMAC 法によるもので、空間時間スキームには2次精度中心差分および2次精度 Adams-Bashforth 法を用いた。

まず、一様等方減衰乱流の解析結果¹⁷⁾を示す。計算対象は Comte-Bellot ら¹⁹⁾の格子乱流 (格子間隔 $M = 5.08$ cm, $Re = 71.6$) で、等間隔差分格子 (格子数 $N = 32^3$, 領域サイズ $L = 7M$) により解析した。初期条件を得るために、Smagorinski モデルによる計算を行い、その際、中間位置で3次元エネルギースペクトルが実験データと一致するように Smagorinski 定数を最適化し、その後の区間はダイナミックモデルにより計算を継続した。まず、手法2 (TS 成分は粗格子 h_T (図1) を用いて計算) でダイナミックモデルの定数を $\alpha = \beta = 2$ とした場合について、格子幅と TS フィルター幅の比を $\gamma (= \Delta/h) = \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{12}$ ($\Delta = h, \sqrt{2}h, 2h$ に対応) と変えて解析した。表1にまとめたように、前半部での Smagorinski 定数 C_s の最適値は γ によって異なるが、後半部でのダイナミックモデルで算定された値はこれとほぼ一致した。また、乱れエネルギーの減衰、3次元エネルギースペクトルの分布とも実験データと良い一致を与えている。

前節の考察に従えば、手法1 (TS 成分を格子 h で計算する場合) では、表1の C_s 値の変化から、たとえば、 $\Delta_T = 2\Delta = 2h$ ($\gamma^2 = (\Delta/h)^2 = 6$) に対して $\alpha^2 = (C_T \Delta_T^2) / (C \Delta^2) = 4$ が推奨される。実際に上記の一様等方乱流 LES において Smagorinski モデルの最適値 C_s と一致する様に定数 α, γ を調整すると図3の関係が得られ、上記の

表1 一様等方乱流 LES におけるフィルター定数とモデル定数

Model	$(\Delta/h)^2$	$\alpha^2 = (C_T \Delta_T^2)/(C \Delta^2)$	$\beta^2 = (\Delta_T/\Delta)^2$	$\gamma^2 = (\Delta_T/h)^2$	$C_s = C$
Smagorinski	1	—	—	—	0.19
Model	2	—	—	—	0.17
	4	—	—	—	0.16
Dynamic	1	4	4	3	0.19
Model	2	4	4	6	0.17
	4	4	4	12	0.16
(TS grid: h_T)					

図3 フィルター幅を設定したときの定数 α , β の関係 (一様等方乱流における検証計算結果からの算定)

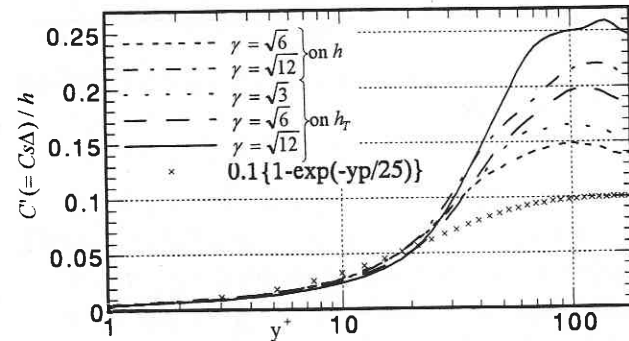
推定は妥当なものといえる。

次に、チャンネル乱流での検証結果²⁸⁾を示す。計算条件は Moin らの DNS と²¹⁾同じレイノルズ数 $R_\tau (=u_\tau H/\nu) = 180$ について、流れ方向 $2\pi H$ 、高さ方向 $2H$ 、スパン方向 πD を $32 \times 64 \times 32$ 格子分割した計算を基準ケースとした。ここではフィルター定義を表2の様に変わて検証計算を行った。図4にモデル定数の空間変化を $C' = (C\Delta)/h$ により示した。ここで、 $(C'h)^2 = (C_s \Delta)^2 = (C\Delta^2)$ と表すと C' は格子幅を基準としたモデル定数である。ダイナミックモデルが与えるチャンネル中央部でのモデル定数 (表2にまとめた) を一様等方乱流の場合と比較すると、絶対値はやや小さいが、フィルター幅に対応してほぼ同じ割合で変化している。また、従来のチャンネル流での推奨値 $C_s = 0.1$ より大きい値となる。

さらに注目すべきはダイナミックモデルで与えられるモデル定数 C' が $y^+ < 10$ ではフィルター幅や Type の違いに関わらずほぼ同じ分布を示し、かつ、Smagorinski モデルの壁近傍修正式として常用されてきた Van Driest の減衰関数とも良く一致する点である。すなわち、ダイナミックモデルで算出される SGS モデルの長さスケールは、壁近傍では空間フィルター幅とは独立に、格子幅に直接依存し

表2 チャンネル乱流 LES 検証計算の計算モデル、フィルター定義、モデル定

Case	SGS Model	Meth	Grid No.	Domain size (x)	TS grid	Filter Type	α^2	γ^2	C'	$C_s (=C)$
0	SM	FDM	32*64*32	2 π H	—	—	—	—	0.10	0.10
1	DS	FDM	32*64*32	2 π H	h_T	A	2	3	0.16	0.16
2	"	"	"	"	h_T	"	2	6	0.20	0.14
3	"	"	"	"	h_T	"	2	12	0.25	0.13
4	"	"	"	"	\underline{h}	"	2	6	0.15	—
5	"	"	"	"	\underline{h}	"	2	12	0.22	—
6	DS	FDM	64*64*64	2 π H	h_T	A	2	3	0.18	0.18
7	"	"	32*64*32	4 π H	"	"	2	3	0.19	0.19
8	"	"	64*64*64	4 π H	"	"	2	3	0.17	0.17
9	DMS	FDM	32*64*32	2 π H	h_T	A	2	6	0.20	0.14
10	LDS	"	"	"	"	"	2	6	0.17	0.12
11	DS	FDM	32*64*32	2 π H	h_T	\underline{B}	2	3	0.17	0.17
12	"	FDM	"	"	\underline{h}	\underline{B}	2	6	0.17	—
13	"	FEM	(*)	"	(h)	(B)	2	6	0.16	—

図4 チャンネル乱流 LES においてダイナミックモデルで算出されるモデル定数 ($C' = \sqrt{C\Delta}/h$) 分布 (フィルター定義による違い)

ており、その分布は壁からの距離 y^+ に対して定まることを示している。壁面近傍では数値的に最も不安定な変動成分が乱流モデルではなく格子解像度により定まるためと考えられる。壁近傍での漸近性については Germano らも指摘している。壁面ごく近傍の粘性低層内でのエネルギー散逸は分子粘性が支配的であることから SGS モデル定数の正確な分布は解析結果に対して必ずしも重要ではないといえるが、少なくとも実用的な観点からは、壁面近傍効果がダイナミックモデルで適切に予測でき、しかも、モデル定数の依存性が小さいことはこのモデルの重要な特長と言える。

この結果は Van Driest の減衰関数が経験的に良い結果を与えてきたことの裏付けともなっている。ただし、中央

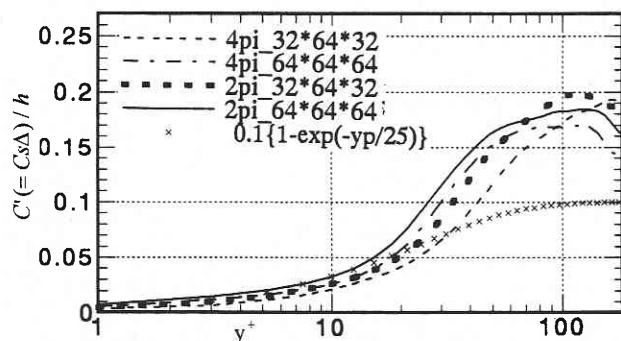


図5 チャンネル乱流 LES においてダイナミックモデルで算出されるモデル定数 ($C^* = \sqrt{C_s \Delta} / h$) 分布 (格子解像度と計算領域による違い)

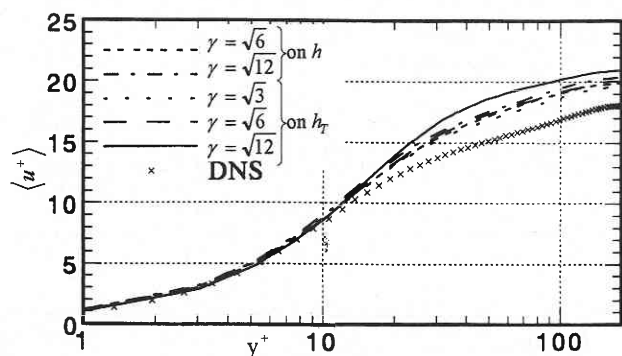


図6 ダイナミックモデルによるチャンネル乱流の主流平均速度分布の予測

部での C_s の違いが速度分布予測などに与える影響が小さいと見られることなどから、従来の推奨値 $C_s = 0.1$ は減衰関数の定数 $A = 25$ を固定した場合の最適値であって、それぞれの値単独では意味を持たないものと考察できる。

図5は流れ方向とスパン方向に対する格子解像度と計算領域の違いによる影響をダイナミックモデルのモデル定数の評価に着目して示している。チャンネル中央部をのぞいて、モデル定数は格子解像度のみに依存し ($4\pi_64$ と $2\pi_32$ は同じ格子間隔)、解像度が低いとモデル定数をやや小さく評価する傾向が見られる。なお、中央部でのモデル定数の差異が速度場の予測結果に与える影響は比較的小さい (図6, 7を参照) ので、ここでのモデル定数の計算精度はあまり重要ではないと考えられる。

図6に壁座標で表した平均速度分布、図7に流れ方向の乱れ強度を示した。これらのLES計算結果を観ると、手法2 (TS成分計算に粗格子を用いる場合) の $\gamma = \sqrt{12}$ ($\Delta_T = 4h$, $8 \times 16 \times 8$ 格子に相当) を除いてはダイナミックモデルの結果同士の差異は小さい。しかし、同様の計算法を用いた Smagorinski モデルによる結果と比較して速度分布が中央部で対数速度分布からのずれがやや大きく (図8を参照)、壁方向の乱流強度の過小評価と対応している。

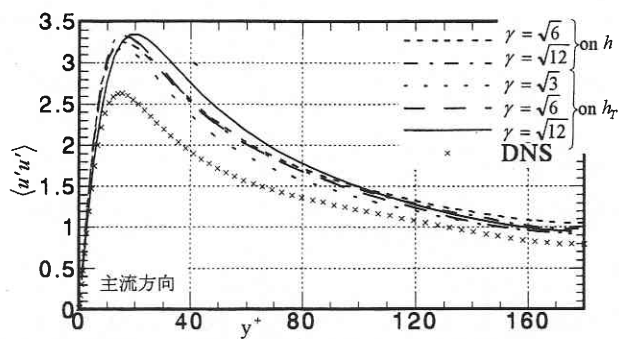


図7 ダイナミックモデルによるチャンネル乱流の乱れ強度分布の予測

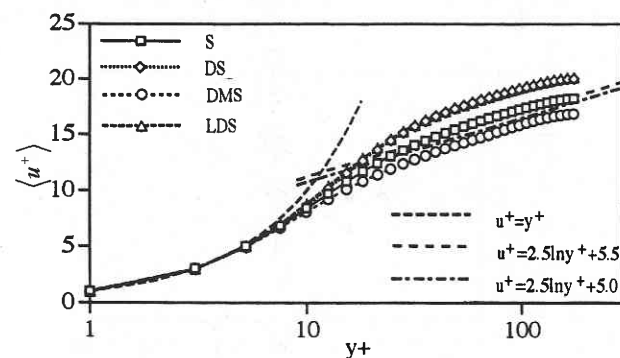


図8 各種SGSモデルによるチャンネル乱流の主流平均速度分布の比較

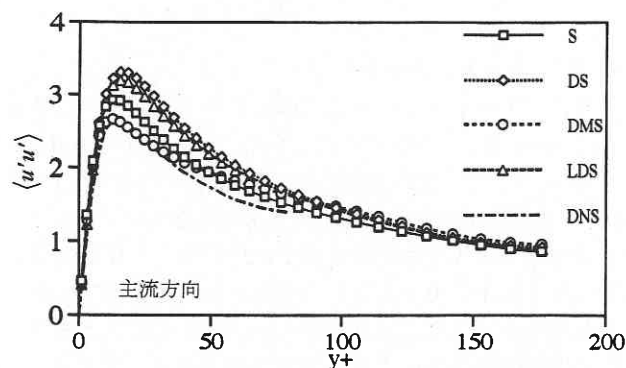


図9 各種SGSモデルによるチャンネル乱流の乱れ強度分布の比較

これは、Smagorinski モデルで格子解像度が低い場合に観られる傾向²³⁾と類似している。算出されるモデル定数 C_s が大きい (GS成分のフィルター幅 D が大きいことに対応する) ほどその差が大きくなることから、ここで用いたフィルター定義によるダイナミックモデルは Smagorinski モデルの格子解像度の依存性を強調している様に思われる。

図8, 9にはSGSモデルによる違いを、平均速度分布と乱れ強度の予測結果について示した²⁴⁾。ここでは、上に述べた SM: Smagorinski モデル, DS: ダイナミックモ

デル (式 (1')), DMS: ダイナミック Mix モデル (式 (2)), LDS: Lagrangean ダイナミックモデル (式 (3)) の4つのモデルを DSN の結果とともに比較している。フィルターは TS 成分を粗格子 h_T にとり $\alpha=2$, $\beta=2$, $\gamma=\sqrt{6}$ ($\Delta=\sqrt{8}h$, $\Delta=\sqrt{2}h$ に相当) と定義した。LDS の緩和係数 C_t は小林らの0.2では C_s 負値を抑制するのに十分でなく、一様減衰乱流での Meneveau らの推奨値2.0を差分法による本計算でも採用した。この場合、壁面に平行な平面で平均をとる DS と Lagrangean (流跡線) で平均を評価する LDS とで平均速度および乱れ強度についてはほぼ同じ予測結果を与える。しかし、Smagorinski モデルと比較して乱れ強度の非等方性を過大に与え、平均速度分布も中央で大きく予測する傾向にあることも同様である。

一方、スケール相似モデルを導入した DMS では乱流強度の予測に DNS データとほぼ一致するほどの改善がみられる。ただし、平均速度分布はやや過小評価されており、また、本計算では差分精度が低くスケール相似項の効果が必ずしも正確に表現されていないことも指摘すべきであろう。しかし、定量的な評価を与えるには十分ではないものの、ダイナミックモデルを適用した場合でもスケール相似項が効果を持つことは確認できる。

3.2 有限要素法における検証

有限要素法を用いた場合でも LES の基本的な考え方に違いが現れるわけではない。しかし、一般に用いられる離散化スキームの違いから解析誤差の影響には違いがあろう。しかし、実際に有限要素法を LES に適用する場合にモデル定数や空間フィルターの定式をどのように定めるかなど基本的な疑問に対しての適切な回答が必ずしも得られていない。これには、従来より有限要素法による LES の計算事例が少ないことが最大の理由といえる。そこで以下では、差分法による従来の LES と直接の比較が容易なチャンネル乱流での検証例²⁵⁾を示して、有限要素法における計算手法の評価とする。

ここでは、速度場を六面体双一次要素でガラーキン法により離散化し SMAC 法を採用した解析コードによる LES 計算事例を示す。Tsubokura ら²⁶⁾、坪倉²⁷⁾は、この計算法で Smagorinski モデルのフィルター幅を $\Delta = V^{1/3}$ と定義し、Smagorinski 定数を差分法と同じ $C_s=0.1$ としてチャンネル乱流で良好な結果を得ている。

ダイナミックモデルを適用する時の空間フィルターについて考えると、手法2や Type A に対応する格子形状に依存した空間フィルターは非構造型格子を許す有限要素法では汎用的で適切な定義が難しい。そこで、粗格子を用いない手法1に Type B の定義を採用する。空間フィルターの計算式は差分法と同様に式 (4) から導くことができる²⁵⁾。ここで、式 (4) は拡散方程式と同じ形式であるので同様

に弱形式化して

$$\int_{\Omega} N_A N_B \overline{u_{iB} d} \Omega = \int_{\Omega} N_A N_B \overline{u_{iB} d} \Omega - \int_{\Omega} \frac{\gamma^2 V^{2/3}}{24} \frac{\partial N_A}{\partial x_j} \frac{\partial N_B}{\partial x_j} \overline{u_{iB} d} \Omega + \int_{\Gamma} N_A \frac{\partial N_B}{\partial x_j} \overline{u_{iB} d} \Gamma. \quad (8)$$

を得る。ここで N_A , N_B は速度場を定義する基底関数である。式(8)を与えられた速度分布について数値積分すればフィルター値が計算される。この計算手順もまた拡散方程式の時間進行計算に準じて与え、質量マトリックスを集中化することで計算の簡略化も可能である。

このようなフィルター計算を適用する場合、係数 α はフィルター幅比 β から定めることができないので最適化が必要である。ただし、坪倉²⁷⁾による Smagorinski 定数の最適化では差分法と差が認められなかったことから、少なくとも差分法と同じ構造的な格子を用いた場合にはダイナミックモデルも差分と同様に算定しうると考えられる。前節に示した差分法のケースと同様のチャンネル流の検証計算では、モデル定数の計算値に関しては図10の様に同じ手法2と Type B による差分法の結果ときわめて良く一致することが示される²⁵⁾。また、手法1で相当する定数を用いれば Type A, B のいずれの場合とも差は小さい。このことは、適切にモデル定数を選定すれば空間フィルターの定義が C_s 値の算定に及ぼす影響は小さく、差分式、有限要素法の式などがダイナミックモデルの定式として同等の効果をもつことを示している。

ところで、速度分布 (図11) や乱れ強度分布 (図12) には差分法で従来指摘されていたものと異なる傾向が指摘される。本計算の様に粗い格子を用いた場合²³⁾に差分法では壁垂直方向やスパン方向の乱れ強度を過小評価し主流速度を中央で高く予測する傾向があるのに対して、有限要素法を用いた本計算ではむしろ逆の傾向を示している。この差は、Tsubokura らの Smagorinski モデルを用いた計算²⁷⁾にも観られる点で、空間フィルターやダイナミックモデルの定式ではなく、対流項などの離散化スキームの数

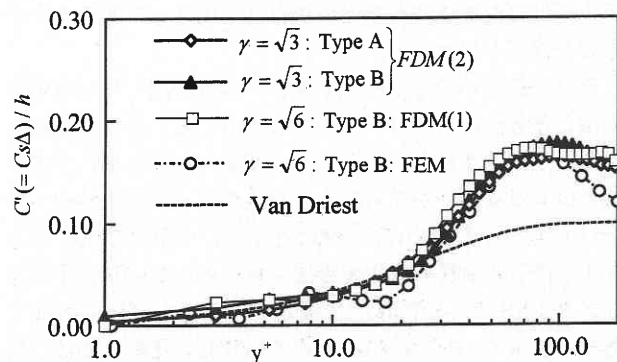


図10 有限要素法と差分法で定式化されたダイナミックモデルによるモデル定数 ($C'=\sqrt{C\Delta}/h$) 分布の比較

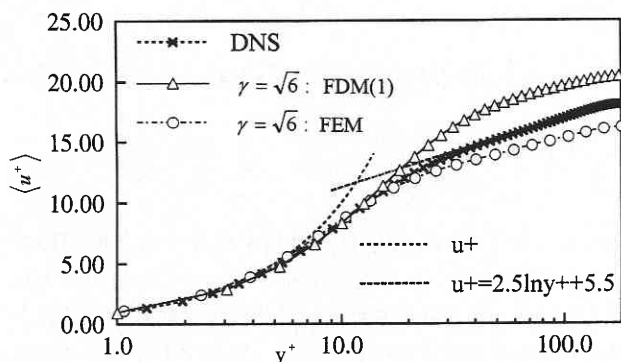


図11 有限要素法 LES によるチャンネル乱流の主流平均速度分布の予測

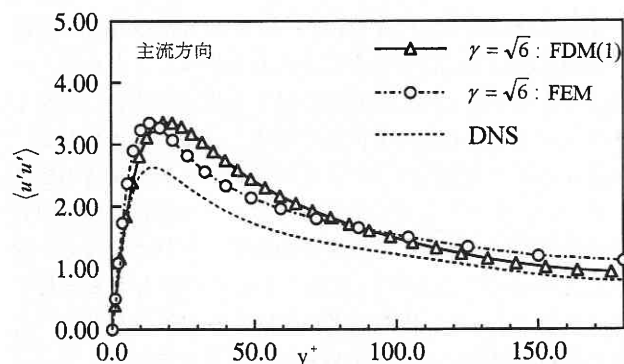


図12 有限要素法 LES によるチャンネル乱流の乱れ強度分布の予測

値誤差の影響によるものと考えられる。

4. 今後の研究の方向

本論で述べてきたように、差分法などを用いた応用計算におけるダイナミックモデルの具体的な計算方法とその課題に関しては、基本的な部分は明らかになってきたと思われる。ダイナミックモデルは Smagorinsky モデルに変わらうる SGS モデルとしていくつかの長所を備えている。これを、応用計算に実際に役立てるためには格子解像度やモデル定数に関する解析結果の依存性を明らかにすることが重要な課題と思われる。

その一例といえる空間フィルター計算に関しては有限要素法と差分法のいずれの定式でも矛盾しない結果を得られることが確認された。しかし、速度場の計算結果には差分法とは異なる傾向が見られる。有限要素法の結果が粗い格子にも関わらず DNS データに近く、この計算結果から判断する限り本計算の有限要素法スキームは 2 次精度中心差分より LES での予測精度に優れているとの評価も可能である。よって、両手法の解析誤差の詳しい比較評価は、新しい計算法開発にもつながりうる興味深い課題と考えている。

謝 辞

本研究は文部省科学研究費 (08650188) の助成を受けて行われたことを記す。 (1996年10月31日受理)

参 考 文 献

- 1) 小林ほか (1995) 「乱流解析 (数値流体力学シリーズ 3)」, 東京大学出版会, 79-84
- 2) M. Germano, U. Piomelli, P. Moin and W. H. Cabot (1991), Phys. Fluids A3, 1760
- 3) W. Rodi and J. H. Ferziger eds. (1995), Workshop on LES of Flows past Bluff Bodies (Tegernsee, Germany)
- 4) D. K. Lilly (1992), Phys. Fluids A3 (7), 1760
- 5) J. Bardina, J. H. Ferziger and W. C. Reynolds (1983), Report TF-19, Dept. Mechanical Eng., Stanford Univ.
- 6) B. Vreman and B. Geurts and Kuerten (1994), Phys. Fluids 6, 4057
- 7) T. S. Lund (1991), Annual Research Briefs-1991, Center for Turbulence Research, Stanford Univ.-NASA Ames, 177-190
- 8) Y. Zang, R. L. Street and J. R. Koseff (1993), Phys. Fluids A5, 633
- 9) U. Piomelli and J. Liu (1995), Phys. Fluids 7, 839
- 10) S. Goshal, T. S. Lund, P. Moin and K. Aksellvol (1995), J. Fluid Mech. 286, 229
- 11) C. Meneveau, T. S. Lund and W. Cabot (1994), Proc. of the summer program, Center for Turbulence Research, Stanford Univ.-NASA Ames, 271-299
- 12) 小林, 村上ほか (1995), 第 7 回乱流シンポジウム, 37-40
- 13) R. A. Clark, J. H. Ferziger and W. C. Reynolds (1977), Report TF-9, Dept. Mechanical Eng., Stanford Univ.
- 14) K. Horiuti (1989), Proc. Int. Sympo. on Computational Fluid Dynamics (Nagoya), 233
- 15) 荒川 (1994), 数値流体力学, 東京大学出版会, 171-185
- 16) F. M. Najjar and D. K. Tafti (1995), Phys. Fluids 8, 1076
- 17) 谷口, 戴, 小林 (1994), 第 9 回生研 NST シンポジウム, 49-52
- 18) 谷口 (1995), 生産研究 47-2, 120-123
- 19) Comte-Bellot and Corssin (1971), J. Fluid Mech. 48, 273
- 20) 田中, 坪倉, 小林, 谷口 (1996), 第 10 回数値流体力学シンポジウム
- 21) P. Moin and J. Kim (1982), J. Fluid Mech. 118, 341
- 22) A. Yoshizawa, M. Tsubokura, T. Kobayashi and N. Taniguchi (1996), Phys. of Fluids 8, 254-256
- 23) 森西 (1990), 東京大学機械工学科博士論文
- 24) 坪倉, 小林, 谷口 (1995), 機械学会論文集 B62-600, 3015-3022
- 25) M. Oshima, M. Tsubokura, T. Kobayashi and N. Taniguchi (1995), Workshop on Large eddy and direct simulation of turbulent flows (Grenoble, France), ERCOFTAC
- 26) M. Tsubokura, M. Oshima, N. Taniguchi and T. Kobayashi (1995), ASME FED-215 (ASME-JSME Conf. Fluid Mechanics (USA)), 81-87
- 27) 坪倉 (1993), 東京大学機械工学科修士論文