

特 集 3
研 究 解 説

LES におけるコロケーショングリッドのエネルギー非保存性の検討

channel 計算によるスタaggerドグリッドとコロケーショングリッドの比較

Study on Conservation Properties of Kinetic Energy of LES with Colocated Grid
Comparison of Numerical Error of Channel Flow Computations
using Staggered and Colocated Grids

大 岡 龍 三*・村 上 周 三*・持 田 灯**

Ryozo OOKA, Shuzo MURAKAMI and Akashi MOCHIDA

近年 LES (Large Eddy Simulation) は、室内気流、建物周辺気流等の複雑乱流場の解析のために利用されるようになってきた。LES の複雑流れ場への適用を考えると、スペクトル法よりは有限差分法を用いた方法が便利である。LES に有限差分法を用いる場合には、数値精度の検討が必要である。本報では有限差分法における代表的な grid システムである staggered grid と collocation grid を比較して collocation grid のエネルギー保存上の問題点を理論的に検討し、比較的高 Re 数の channel 流の LES 解析を通じて collocation grid の問題点を明らかにする。

1. は じ め に

Large Eddy Simulation (LES) は、Deardorff の先駆的研究以来¹⁾、channel 流のような単純形状の流れ場に適用されることが多かったが、近年、室内気流、建物周辺気流などの複雑乱流場の解析のためにも利用されるようになってきた^{2)~4)}。LES の複雑物体周りへの適用を考えると、スペクトル法よりは有限差分法 (或いは有限体積法) を用いた方法が便利である。有限差分法を利用する場合、グリッドシステムとしては、速度と圧力の定義点が同一である non-staggered grid (或いは regular grid) と速度と圧力の定義点異なる staggered grid に大別される。non-staggered grid は、staggered grid に比べ、離散化が容易である反面、圧力振動を起こしやすいことが知られている。これを避けるため過去においては staggered grid が広く用いられてきた。一方 non-staggered grid の利用に伴う圧力振動を回避するため、後述するようにセルの中心速度とは別にセルの界面速度を考え、これが連続の式を満足するように圧力を求める解法^{5)~6)}が提案されている。本稿ではこの方法を用いた non-staggered grid の解析手法を、通常の non-staggered grid と区別して、特に collocation grid と呼ぶ。2 種類のグリッドにおける変数配置を図 1 に示す。collocation grid は一般曲線座標や複合 grid への拡張が staggered grid より容易であることから、主として RANS (Reynolds-averaged Navier-Stokes Equation) モデルを利用した定常計算を対象として急速に普及した。ま

た近年は、同手法を LES や DNS 等の非定常計算に利用する例も見られる^{7)~9)}。しかしながらこれら非定常計算において、staggered grid と collocation grid の数値精度を詳細に比較した例は、比較的低 Re 数でメッシュの細かい (即ちメッシュ Re 数の小さい) チャンネル流の DNS に見られるのみであり⁹⁾、実際の複雑流れ場解析に相当する程度の大きい Re 数での検討は皆無に近い。また collocation grid のエネルギー非保存性の理論的検討に関して Sotiropoulos¹⁰⁾や森西ら¹¹⁾の先駆的研究があるが、エネルギー保存性に関する staggered grid との数値精度の差を詳細に検討した例はない。本研究では、staggered grid と collocation grid の数値精度について解説し、比較的高 Re 数の channel 流の LES 解析において staggered grid と collocation grid の比較を行う。

2. 表記法の規約

本論文では、英小文字 i, j, k 等はテンソルの成分表示のための suffix であり、英大文字 I, J, K は差分化における x_1, x_2, x_3 の空間 3 方向の位置を表す suffix であるとする (図 1)。

河村ら¹²⁾、森西ら¹¹⁾に倣い、差分並びに補間オペレータを次のように定義する。

$$\left[\frac{\Delta \phi}{\Delta x_1} \right]_{I,J} = \frac{[\phi]_{I+1,J} - [\phi]_{I-1,J}}{2h_1} \quad (1)$$

$$\left[\frac{\delta \phi}{\delta x_1} \right]_{I,J} = \frac{[\phi]_{I+1/2,J} - [\phi]_{I-1/2,J}}{h_1} \quad (2)$$

$$\left[\phi^{-x_1} \right]_{I+1/2,J} = \frac{[\phi]_{I+1,J} + [\phi]_{I,J}}{2} \quad (3)$$

* 東京大学生産技術研究所 附属計測技術開発センター

** 東京大学生産技術研究所 第 5 部

$$\left[\frac{\phi^{x1,x2}}{\delta x_1 \delta x_2} \right]_{I+1/2,J+1/2} = \frac{[\phi]_{I,J} + [\phi]_{I+1,J} + [\phi]_{I,J+1} + [\phi]_{I+1,J+1}}{4} \quad (4)$$

$$\left[\frac{\phi^{x1}}{\delta x_1} \right]_{I+1/2,J} = \frac{[\phi]_{I+1,J} \cdot [\phi]_{I,J} + [\phi]_{I,J} \cdot [\phi]_{I+1,J}}{2} \quad (5)$$

3. 保存性に関する検討

本稿では運動量の保存と運動エネルギーの保存について検討を行う。周知のように運動方程式においては拡散項は保存性を満たす。しかしながら、運動エネルギーはその輸送方程式が粘性消散項を含むため、本来保存的でない。この粘性消散項は運動方程式の拡散項に起因しており、拡散項以外の項（移流項、圧力項）はエネルギー方程式に変換した際にも保存性を満たす。本稿では特にエネルギーの保存を満たすべき項に着目して考察するため（1）式に示すように拡散項を除外したオイラー方程式を用いる。

3.1 保存性の定義

差分方程式において空間微分項がすべての $\phi/\phi x_j$ 差分形で表現される場合には、任意のセル内においてその項の体積積分を面積積分に変換することが可能であり、セル内の ϕ の時間変化はセルの界面を通じてセル内に流入する流束で決定されることになる。この場合その差分式は、考察しているセル内で保存性を満たすものと定義される。

3.2 colocation grid の概要

colocation grid では圧力と速度をセルの中心点で定義する。colocation grid ではこの速度を記号 u_i で定義する。この場合、圧力振動の発生がしばしば問題になる。Rhie-Chow⁵⁾や石田⁶⁾の提案した colocation grid ではこの中心速度 u_i に追加して、セルの界面における速度 U_i も定義し、これを用いて移流項等を計算するセミスタガードスキームを採用して圧力振動を回避する（図1（2）参照）。一方 staggered grid では u_i は界面の速度を指す（図1（1）参照）。後述するように colocation grid のセルの中心で定義された速度 u_i は連続の式を高精度では満足しないが、界面における速度 U_i は staggered grid における u_i と同様、連続の式を高精度で満足する。

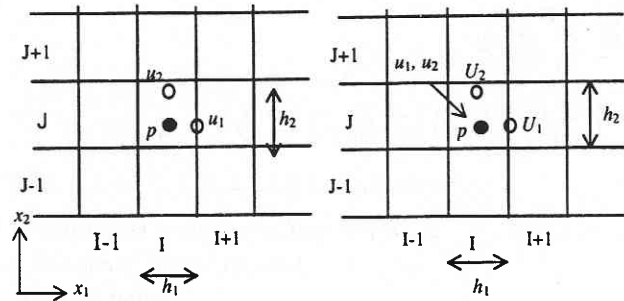
3.3 運動量保存性について

3.3.1 staggered grid 利用の場合

staggered grid における運動方程式は、移流項に2次精度の flux form を用いた場合、上記②、③式を用いると、次のような離散式で表すことができる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\delta u_j^{xi} u_i^{-xj}}{\delta x_j} + \frac{\delta p}{\delta x_i} = 0 \quad (1)$$

（1）式の $i=1$ 成分の左辺第2項を、②、③の約束に従って表示すれば次のような構成となる（2次元）。



（1） staggered grid の場合 （2） colocation grid の場合
図1 grid と変数定義点（2次元の場合）

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\delta u_i^{x1} u_i^{-xj}}{\delta x_j} \right]_{I+1/2,J} \\ &= \left(\frac{([u_1]_{I+1/2,J} + [u_1]_{I+3/2,J})}{2} \cdot \frac{([u_1]_{I+1/2,J} + [u_1]_{I+3/2,J})}{2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{([u_1]_{I-1/2,J} + [u_1]_{I+1/2,J})}{2} \cdot \frac{([u_1]_{I-1/2,J} + [u_1]_{I+1/2,J})}{2} \right) / h_1 \\ & \quad + \left(\frac{([u_2]_{I,J+1/2} + [u_2]_{I+1,J+1/2})}{2} \cdot \frac{([u_1]_{I+1/2,J} + [u_1]_{I+1/2,J+1})}{2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{([u_2]_{I,J-1/2} + [u_2]_{I+1,J-1/2})}{2} \cdot \frac{([u_1]_{I+1/2,J} + [u_1]_{I+1/2,J-1})}{2} \right) / h_2 \end{aligned}$$

また、（1）式の $i=1$ 成分の左辺第3項は

$$\left[\frac{\delta p}{\delta x_1} \right]_{I+1/2,J} = \frac{[p]_{I+1,J} - [p]_{I,J}}{h_1} \text{ である。}$$

staggered grid において flux form（発散型）で表した移流項と圧力項は $\delta/\delta x_j$ の形で表されているので運動量の保存性を満たす。

3.3.2 colocation grid 利用の場合

colocation grid における運動方程式は、移流項に2次精度の flux form を用いた場合、2節②、③式を用いると、次のような離散式で表すことができる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\delta U_j^{xi} u_i^{-xj}}{\delta x_j} + \frac{\delta p}{\delta x_i} = 0 \quad (2)$$

colocation grid においても、flux form で表した移流項と圧力項は運動量 u_i の保存性を満たす。

3.4 エネルギー保存について

3.4.1 staggered grid 利用の場合

従来より staggered grid では、速度3成分の定義点が異なるので、厳密な意味でエネルギー保存を論ずることはできないと言われている¹¹⁾。慣例に従い、セルの中心で運動エネルギーを定義すると、その離散化方程式はエネルギー保存を満たさなくなる。これに対して、本稿ではセルのコーナーで運動エネルギーを定義する。これにより staggered grid を利用した場合でも高精度でエネルギー保存を満たすエネルギーの離散化方程式を導出することができる。詳細は注1参照。（1）式の両辺に、 u_i を乗じ、セ

ルのコーナーで運動エネルギー $K = \frac{1}{2} (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2})$ の輸送方程式の離散化を行うと (3) 式になる. この場合方程式は $(I + 1/2, J + 1/2)$ で定義されている (紙面の都合上, 詳細な式展開の記述は省略).

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\delta u_j}{\delta x_j} \frac{\overline{u_i u_i}}{2} + \frac{\delta p u_i}{\delta x_i} + \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \frac{\delta u_j}{\delta x_j} - p \frac{\delta x_j}{\delta x_j} = 0 \quad (k \neq i) \quad (3)$$

(3) 式において左辺第 4 項, 5 項はそれぞれ運動方程式の移流項, 圧力項起源のものであり, 保存型となっていない. ただし (3) 式第 4 項, 5 項中の $\delta u_j / \delta x_j$ は staggered grid 系の速度で定義される速度の divergence (D_s と略記) であり, staggered grid を用いた計算では $D_s \approx 0$ となると考えてよいので高精度でエネルギー保存されると考えて問題はない.

3.4.2 colocation grid 利用の場合

(2) 式の両辺に, u_i を乗じ運動エネルギー $K (= \frac{1}{2} \overline{u_i^2})$ の輸送方程式を導出する. この場合方程式は (I, J) で定義されている.

表 1

計算 ケース	grid システム	メッシュ分割	h_1^+	h_2^+	h_3^+
case1	staggered	$48(x_1) \times 48(x_2) \times 56(x_3)$	83.2	41.6	3.2~38.4
case2	colocation	$48(x_1) \times 48(x_2) \times 56(x_3)$	83.2	41.6	3.2~38.4

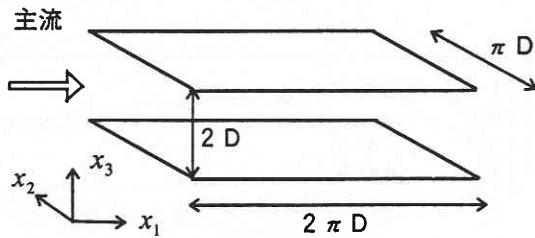


図2 解析対象

表2 基礎方程式

$$\frac{D \bar{u}_i}{D t} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\tau_{ij} + 2\nu S_{ij}) + \delta_{ij} \quad (5)$$

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j = 2\nu_{SGS} S_{ij} \quad (6)$$

$$\nu_{SGS} = (C_s F_{damp} h)^2 S \quad (7)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

$$h = (h_1 h_2 h_3)^{1/3} \quad (9) \quad S = (2 S_{ij} S_{ij})^{1/2} \quad (10)$$

$$f_{damp} = 1 - \exp(-x_3^+ / 25) \quad (11)$$

$$C_s = 0.1$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\delta U_j}{\delta x_j} \frac{\overline{u_i u_i}}{2} + \frac{\delta p u_i}{\delta x_i} + \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \frac{\delta U_j}{\delta x_j} - p \frac{\Delta u_i}{\Delta x_i} = 0 \quad (4)$$

(3) 式の場合と同様に (4) 式の左辺第 4 項, 5 項に保存型とはならない項が現れる. 但し, 左辺第 4 項は staggered grid の場合の (3) 式第 4 項と同様に, 界面速度の divergence $\delta U_j / \delta x_j (= D_s)$ を含み, colocation grid の場合も, staggered grid の場合と同様に $D_s = \delta U_j / \delta x_j \approx 0$ となると考えてよいので問題とはならない. これに対して, 第 5 項中の $\Delta u_i / \Delta x_i$ (2 節①式参照) はセル中心速度から導出される速度の divergence である (D_n と略記). colocation grid を用いた場合界面速度の divergence $D_s (= \delta U_j / \delta x_j)$ は ≈ 0 となることが期待されるが, $D_n (= \Delta u_i / \Delta x_i)$ は通例必ずしも小さな値を取らず, エネルギー保存を損なう要因となる. 詳細を注 2 に示す. この第 5 項の存在がエネルギー保存の観点から見た時の staggered grid と colocation grid の決定的な違いである. 次節ではこの左辺第 5 項の存在が, 数値計算の結果に与える影響について LES による channel 計算を通じて検討する.

4. 計算概要

4.1 解析対象 (図 2) Moin ら¹³⁾ と同じく, 主流方向 x_1 , スパン方向 x_2 , 壁面垂直方向 x_3 の各方向にそれぞれ $2\pi D$, πD , $2D$ の解析領域を取る. レイノルズ数は channel 半幅 D と摩擦速度 u_* で定義すれば $Re_\tau = \frac{u_* D}{\nu} = 640$ (中心速度で定義すれば 13,800). 以下に示す諸量は特に注記のない場合, 全て, D と u_* で無次元化している.

4.2 計算ケース (表 1) staggered grid (case1) と colocation grid (case2) の 2 ケース.

4.3 計算条件 表 2 に基礎方程式を示す. 使用する SGS モデルは標準スマゴリンスキーモデル. $C_s = 0.1$. Van-Driest タイプのダンピング関数 (表 2 (11) 式) 利用. 圧力の解法には HSMAC を使用. 空間差分は 2 次精度中心差分. 時間差分は, 移流項には 2 次精度 Adams-Bashforth スキーム, 拡散項には Crank-Nicolson スキームを使用. 主流方向並びにスパン方向は周期境界条件利用. 壁面境界条件は no-slip. 今回の計算では壁面接線方向速度の first grid point が $x_3^+ 1.6$ の位置にある. 他の計算条件は表 1 参照.

5. 解析結果^{注3)}

5.1 平均速度分布 (図 3)

平均速度分布は case1 (staggered grid 利用) の結果は Hussain らの実験文¹⁴⁾ に比べて対数領域でやや大きめの値を示すが全般にはよく対応している. 今回用いた程度のメッシュでは, 過去の LES に比べ, 十分に良い結果といえる. 一方 case2 (colocation grid 利用) の結果は $x_3^+ =$

30 前後から Hussain らの実験値から大きくはずれ、大きな値を示している。対数則

$$\frac{\langle u \rangle}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln x_3^+ + b \quad (12)$$

において、最も一般的な κ の値は約 0.4 である。また b の値は実験によって多少のばらつきが見られるが約 4.8~5.9 と言われている¹⁵⁾。図 3 中の実直線はこの中で最も一般的といわれる $b = 5.5$ のものである。Hussain らの実験では約 $b = 5.0$ である。case1 では $b = 5.7$ であり、一般的な対数則の範囲内であると考えられる。一方 case2 では $b = 7$ 以上となり、一般的な対数則の範囲内から大きくはずれる。

5.2 変動速度分布 (図 4) 注4)

case1 と case2 とともに実験値に比べて主流方向成分 $\sqrt{\langle u_1'^2 \rangle}$ が壁面近傍で大きい (図 4 (1))。一方壁面鉛直方向成分 $\sqrt{\langle u_3'^2 \rangle}$ は壁面近傍での立ち上がりが遅くなる傾向にある。これはメッシュが十分に細くない場合の LES 計算における共通の傾向である¹⁷⁾。この傾向は case1 (staggered) に比べて case2 (colocation) のほうがより一層顕著であり、実験との対応は非常に悪い。この原因については 5.5, 5.6 節で詳しく述べる。スパン方向成分 $\sqrt{\langle u_2'^2 \rangle}$ については両ケースとも実験とよい一致を示す。

5.3 シアストレス分布 (図 5)

図 5 にシアストレスの GS 成分 $\langle \bar{u}_1' \bar{u}_3' \rangle$ を示す。case1 は channel 中心から壁のかなり近くまで直線上に乗っており (図 5 (1))、既往の詳細な LES¹⁷⁾ と比べ妥当な結果を示しているが、case2 では壁より channel 幅の 1/4 程度の位置からすでに直線よりはずれ、かなり小さな値を示す。case2 の場合、このように $\langle \bar{u}_1' \bar{u}_3' \rangle$ が壁面付近で過小評価されており、このため平均流における乱流拡散が減衰し、これが channel 内部での平均速度の増加 (図 3) を引き起こしていると考えられる。

5.4 乱流エネルギーの収支の比較 (図 6)

図 6 に case1 と case2 の乱流エネルギーの GS 成分 k_{GS} の収支を示す^{注5)6)}。また Mansour ら¹⁸⁾ の $Re_\tau = 180$ の DNS の結果も併せて示す。LES では GS の変動成分のみを表示しているが、DNS では LES における SGS 分を含めた合計の変動を示している。またここでの諸量は u_*^4/ν で無次元化をしている。case1 の結果は、Mansour の DNS の結果に比べて概ね妥当な傾向を示す。一方 case2 では、case1 に比べ、各項の値が格段に小さく、半分程度となっており、DNS との対応は大変悪い。

5.5 圧力歪み相関の比較 (図 7)

case1, case2 の両ケースとも LES の結果は Mansour の DNS の約半分のオーダーである。これは LES が GS 成分のみを表示しているのに対して、DNS では LES における

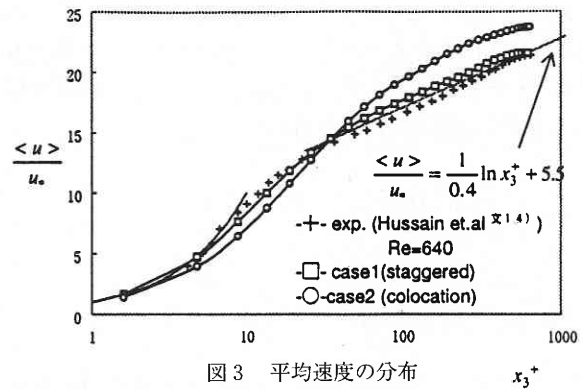
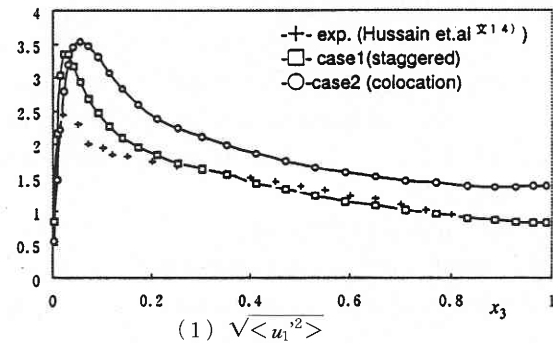
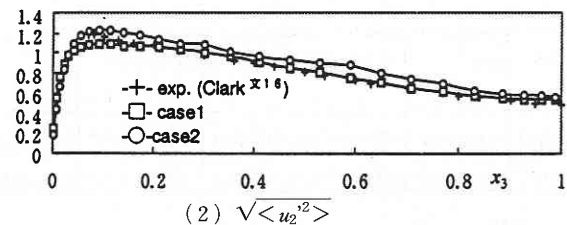


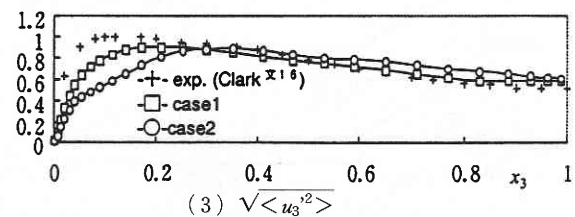
図 3 平均速度の分布



(1) $\sqrt{\langle u_1'^2 \rangle}$



(2) $\sqrt{\langle u_2'^2 \rangle}$



(3) $\sqrt{\langle u_3'^2 \rangle}$

図 4 変動速度 $\sqrt{\langle u_i'^2 \rangle}$ の分布 (GS+SGS)

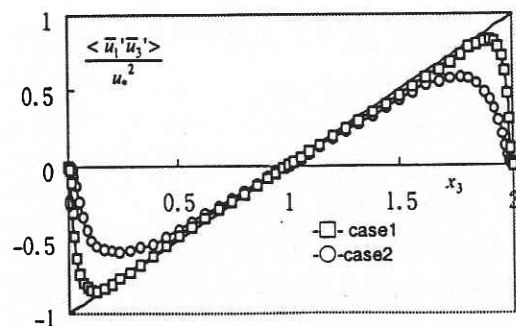
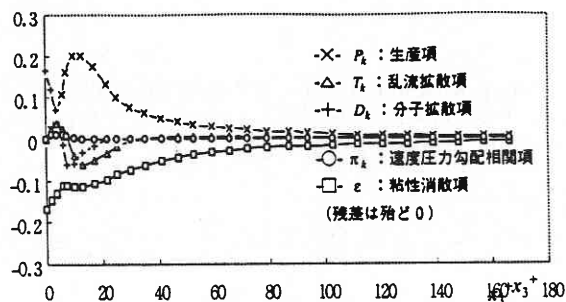
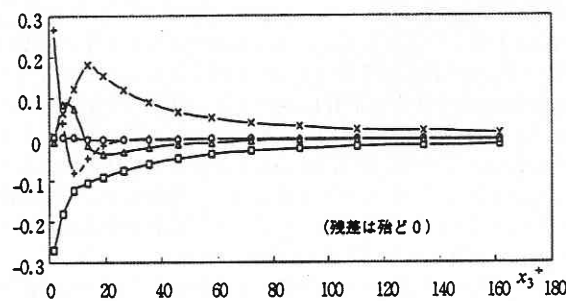


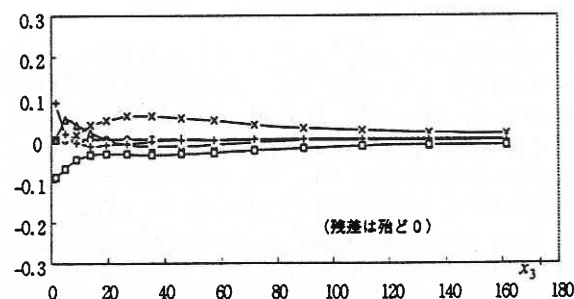
図 5 シアストレス $\langle \bar{u}_1' \bar{u}_3' \rangle$ の分布 (GS 成分)



(1) DNS data
(Mansour et. al¹⁸). $Re = 180$, GS+SGS に相当)

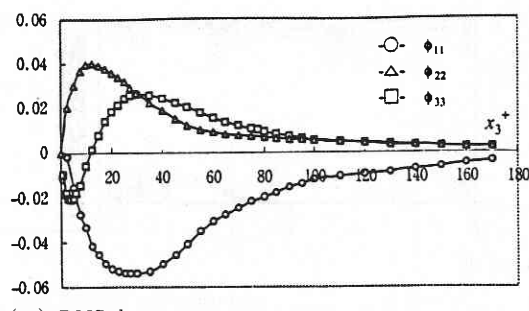


(2) case1 (staggered. $Re = 640$, GS 成分のみ表示)

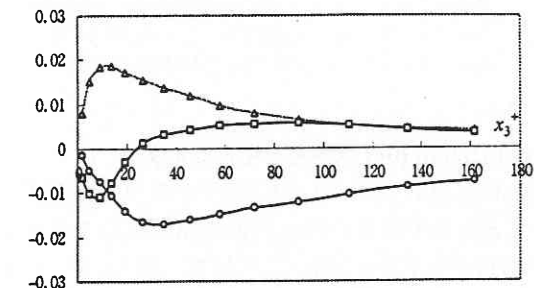


(3) case2 (colocation. $Re = 640$, GS 成分のみ表示)

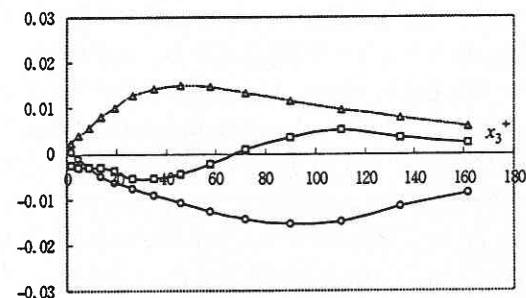
図6 乱流エネルギー k の収支
(LESではGSのみ, DNSではGS+SGS相当を表示)



(1) DNS data
(Mansour et. al¹⁸). $Re = 180$, GS+SGS に相当)



(2) case1 (staggered. $Re = 640$, GS 成分のみ表示)



(3) case2 (colocation. $Re = 640$, GS 成分のみ表示)

図7 圧力歪み相関項 ϕ_{ij} の比較

が過大であり、エネルギー再分配が不十分であるといえる。一方 case1 の場合、この ϕ_{33} は $x_3^+ = 25$ の点で負値と正値が逆転しており、case2 の結果と比較すると格段に改善される。

colocation grid において圧力歪み相関項によるエネルギー再分配が不十分となる原因は、3 節で述べた (4) 式の左辺第 5 項 $-\rho \frac{\Delta u_i}{\Delta x_i}$ ($= -\rho D_n$) に起因するエネルギー非保存性と密接に関連しているものと考えられる。即ち、(4) 式の左辺第 5 項は、本来ゼロになるべき圧力歪み相関項のトレースに対応しており、この第 5 項の中に現れるセル中心速度に基づく divergence の大きさが、colocation grid におけるエネルギー再分配の不十分さの程度を決定付けていると考えられる。case2 の場合の瞬時 divergence (D_n) の絶対値 $|\Delta \bar{u}_i / \Delta x_i|$ 分布を図 8 に示す。瞬時の divergence (D_n) は非常に大きく、最大 1 のオーダーである^{注7)}。

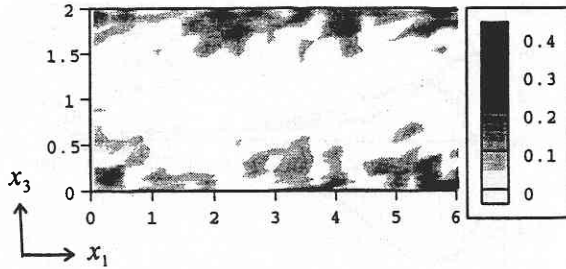


図8 case 2の瞬時 divergence の絶対値分布 (鉛直中心断面)
 ・セル中心速度に基づく $|D_n| = |\Delta \bar{u}_i / \Delta x_i|$ を示す。
 ・この図における Maximum 値は約0.6
 空間平均値は約 10^{-2} のオーダー, 時間平均値は 10^{-3} のオーダー
 ・case 1 では常に D_s のみ計算され $|D_s|$ は全領域で 10^{-5} 以下
 ・case 2 でも $|D_s| = |\delta \bar{U}_i / \delta x_i|$ は全領域で 10^{-5} 以下

5.6 colocation grid が誤差を生み出す構造

colocation grid では $|\Delta \bar{u}_i / \Delta x_i|$ がゼロとならず (図 8), 大きな値を取るため圧力歪み相関項によるエネルギー再分配が不十分となる。この結果, 図7で示したように colocation grid の結果では壁面近傍から $x_3^+ = 70$ までかなり広い領域で ϕ_{33} が負値を取っている。これはノルマルストレスの壁面垂直成分 $\langle \bar{u}_3'^2 \rangle$ から他の成分へエネルギーが再分配されることを意味している。このためノルマルストレスの主流方向から, 壁面垂直成分へのエネルギー再分配は不十分となり, colocation grid を用いた case2 では壁面近傍で $\langle \bar{u}_3'^2 \rangle$ が小さくなる (図3 (3))。この $\langle \bar{u}_3'^2 \rangle$ の壁面近傍での過小評価のために, $\langle \bar{u}_1' \bar{u}_3' \rangle$ の生産項である $P_{13} = -\langle \bar{u}_3'^2 \rangle \partial \langle \bar{u}_1 \rangle / \partial x_3$ が小さくなる。このため $\langle \bar{u}_1' \bar{u}_3' \rangle$ の絶対値が小さくなり (図5)), 前述したように乱流拡散が減衰して channel 中央付近で平均流速が過大評価される (図2)。

6. 結 論

staggered grid と colocation grid の数値精度の差を運動量とエネルギーの保存性の観点から検討した。さらにこの2種類の grid システムを用いた有限差分法による channel 乱流の LES 解析を行い, 両者の差を構造的に調べた。

- (1) colocation grid は運動量の保存性を満たすがエネルギーの保存性は満たさない。
- (2) このため, colocation grid 利用の場合, 壁面近傍でエネルギーの再分配が不十分となり, レイノルズストレスの各成分の分布が実験や staggered grid 利用の場合と大きく異なる。
- (3) これにより, 平均運動エネルギーから乱流エネルギーへのエネルギーカスケードが充分に行われなくなり, colocation grid は staggered grid に比べ平均速度を過大に評価する。

注

注1) staggered grid において, まず最初に速度の定義点 $(I + 1/2, J)$ と同じ場所で, 2 次量 $\frac{u_i u_i}{2}$ の輸送方程式を離散化する。
 (1) 式の $i = 1$ 成分に u_1 を乗ずると

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{u_i u_i}{2} + \frac{\phi_{ij}^{x1} u_i u_j}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\delta p u_i}{\delta x_i} + \frac{1}{2} u_i u_i \frac{\partial}{\partial x_i} - p \frac{\delta u_i}{\delta x_i} = 0 \quad (13)$$

となる。ここで $u_i \frac{\delta u_j}{\delta x_j} = \frac{\delta u_j}{\delta x_j} \frac{u_i}{2} + \frac{1}{2} u_i u_i \frac{\delta u_j}{\delta x_j}$

を利用している (紙面の都合上詳細な式展開の記述は省略)。この場合, (13) 式左辺第4項, 5項の存在のために, 2 次量 $\frac{u_i u_i}{2}$ は保存されない。しかしながら本文3節で述べるように第4項中の $\delta u_j / \delta x_j (= D_s)$ は連続式を満たす場合殆どゼロとなるので, staggered grid を用いた計算においてはこの項の存在は問題にならないと考えられる。第5項は圧力による2次量の再分配を表す項であるが, この項も連続の式が正しく成り立てば, 他のノルマル2成分と併せて合計でゼロとなるので, 運動エネルギーは保存性を満たすことになるが, 次に示すように定義点の選び方によっては正しく成立する場合としない場合が発生する。

以下ではセル中心とセルコーナーで運動エネルギーの保存を検討する。簡単のために2次元で考える。まず (13) 式第5項の参照領域は図9 (1) のようになる。

次にコントロールボリューム法の一般的な考え方に従い, 運動エネルギー K をセルの中心点で定義すると

$(K = \frac{1}{2} (u_1'^2 + u_2'^2))$, $\frac{\partial}{\partial t} \frac{u_1 u_1}{2}$ の参照領域は図9 (2) の横長長方形部分となり, $\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{u_1 u_1}{2}$ の参照領域は縦長長方形部分となる。図9 (2) から明らかなように, K をセルの中心で定義すると, $\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{u_1 u_1}{2}$, $\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{u_1 u_1}{2}$ の二つの項の参照領域が異なるため, $(\delta u_1 / \delta x_1 + \delta u_2 / \delta x_2 = 0)$ の連続の式が成り立たず, 合計でゼロとならない。次に運動エネルギー K をセルのコーナー部で定義する ($K = \frac{1}{2} (u_1'^2 + u_2'^2)$) 場合を考える。方程式を $(I + 1/2, J + 1/2)$ で定義する場合には $\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{u_1 u_1}{2}$ と $\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{u_1 u_1}{2}$ の参照領域は両方とも図9 (3) の網掛け部分となり, この領域内では, 高精度で連続の式が成り立つため $p \cdot (\delta u_1 / \delta x_1 + \delta u_2 / \delta x_2)^{x1x2}$ は高精度でゼロとすることができる。従って, 運動エネルギー K をセルのコーナー部で定義することにより, 運動エネルギーの保存性が満たされると考えることができる。

注2) Sotiropoulos¹⁰⁾, 森西ら¹¹⁾に倣い colocation grid におけるセルの中心速度の divergence $D_n (= \Delta u_i / \Delta x_i)$ の誤差評価を行う。なお簡単のため2次元で考察する。

界面速度成分 $[U_i]_{I+1/2,J}$ の時間差分式は次で示される。

$$[u_i]_{I+1/2,J} = [u_i]_{I+1/2,J} + \Delta t \left[C_i + D_i \right]_{I+1/2,J} - \Delta t \left[\frac{\partial p}{\partial x_i} \right]_{I+1/2,J} \quad (14)$$

また, 中心速度成分 $[u_i]_{I,J}$ の時間差分式は次で示される。

$$[u_i]_{I,J} = [u_i]_{I,J} + \Delta t [C_i + D_i]_{I,J} - \Delta t \left[\frac{\partial p}{\partial x_i} \right]_{I,J} \quad (15)$$

ここで C_i, D_i はそれぞれ u_i の方程式の移流項, 拡散項である。

(15) 式を変形して

$$\left[\frac{\delta p}{\delta x_1} \right]_{i+1/2,j} = \left[\frac{\delta p}{\delta x_1} \right]_{i+1/2,j} - \Delta t \left[\frac{\partial p}{\partial x_1} \right]_{i+1/2,j} + \Delta t \left[\frac{\partial p}{\partial x_1} \right]_{i+1/2,j} \quad (16)$$

(16) 式を (14) 式に代入すると

$$\left[\frac{\delta p}{\delta x_1} \right]_{i+1/2,j} = \left[\frac{\delta p}{\delta x_1} \right]_{i+1/2,j} + \Delta t \left[\frac{\partial p}{\partial x_1} \right]_{i+1/2,j} - \Delta t \left[\frac{\partial p}{\partial x_1} \right]_{i+1/2,j} \quad (17)$$

ここでテーラー展開を利用して、

$$\left[\frac{\delta p}{\delta x_1} \right]_{i+1/2,j} = \frac{[p]_{i+1,j} - [p]_{i,j}}{h_1} = \left[\frac{\partial p}{\partial x_1} \right]_{i+1/2,j} + \frac{1}{24} h_1^2 \left[\frac{\partial^3 p}{\partial x_1^3} \right]_{i+1/2,j} + O(p^{(5)}) \quad (18)$$

また $\left[\frac{\Delta p}{\Delta x_1} \right]_{i,j} = \frac{[p]_{i+1,j} - [p]_{i-1,j}}{2h_1}$ であるので

$$\begin{aligned} \left[\frac{\Delta p}{\Delta x_1} \right]_{i+1/2,j} &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\Delta p}{\Delta x_1} \right]_{i,j} + \left[\frac{\Delta p}{\Delta x_1} \right]_{i+1,j} \right) \\ &= \frac{[p]_{i+2,j} + [p]_{i+1,j} - [p]_{i,j} - [p]_{i-1,j}}{4h_1} \\ &= \left[\frac{\partial p}{\partial x_1} \right]_{i+1/2,j} + \frac{7}{24} h_1^2 \left[\frac{\partial^3 p}{\partial x_1^3} \right]_{i+1/2,j} + O(p^{(5)}) \end{aligned} \quad (19)$$

(18) 式, (19) 式を (17) 式に代入すると

$$\left[\frac{\delta p}{\delta x_1} \right]_{i+1/2,j} = \left[\frac{\delta p}{\delta x_1} \right]_{i+1/2,j} + \frac{1}{4} \Delta t h_1^2 \left[\frac{\partial^3 p}{\partial x_1^3} \right]_{i+1/2,j} + O(p^{(5)}) \quad (20)$$

(20) 式の $\left[\frac{\delta p}{\delta x_1} \right]_{i+1/2,j}$ の x_1 方向の差分を取ると

$$\left[\frac{\delta^2 p}{\delta x_1^2} \right]_{i,j} = \left[\frac{\delta^2 p}{\delta x_1^2} \right]_{i,j} + \frac{1}{4} \Delta t h_1^2 \left[\frac{\partial^4 p}{\partial x_1^4} \right]_{i+1/2,j} + O(p^{(6)}) \quad (21)$$

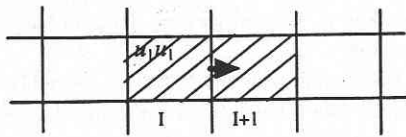
x_2 方向に関しても同様の式を導出し和を取ると

$$\left[\frac{\delta^2 p}{\delta x_1^2} \right]_{i,j} = \left[\frac{\delta^2 p}{\delta x_1^2} \right]_{i,j} + \frac{\Delta t}{4} \left[h_1^2 \frac{\partial^4 p}{\partial x_1^4} + h_2^2 \frac{\partial^4 p}{\partial x_2^4} \right]_{i,j} + O(p^{(6)}) \quad (22)$$

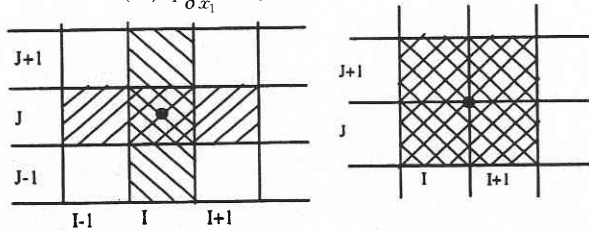
(22) 式の左辺 $[\delta^2 p / \delta x_1^2]_{i,j}$ は高精度でゼロとなる。

従って, colocation grid の利用の場合, セルの中心速度の divergence $[\delta^2 p / \delta x_1^2]_{i,j} = [\Delta^2 p / \Delta x_1^2]_{i,j}$ はセルの界面速度で定義した divergence $[\delta^2 p / \delta x_1^2]_{i,j}$ に比べ $-\frac{\Delta t}{4} [h_1^2 \frac{\partial^4 p}{\partial x_1^4} + h_2^2 \frac{\partial^4 p}{\partial x_2^4}]_{i,j}$ のオーダーの誤差を持つことになる。

注 3) 今回の計算結果は, case1 では無次元時間 3.2, case2 は 3.3



(1) $\frac{\delta u_i}{\delta x_i}$ の参照領域



(2) セルの中心に定義された (3) セルのコーナーに定義された場合の参照領域

図 9 staggered grid における運動エネルギーの定義点と保存性

の統計量を取得している。尚助走時間は両ケースとも無次元時間で 10 以上である。更にこれらの結果を channel の x_1 - x_2 面内で面平均を取って表示している。

注 4) 変動速度は Grid Scale (GS) 成分と Sub-grid Scale (SGS) 成分の合計を表示している。乱流エネルギーの SGS 成分 K_{SGS} は Deardorff¹⁾ 等に従って

$$\langle K_{SGS} \rangle = \langle (v_{SGS} / C_k \Delta)^2 \rangle, C_k = 0.094$$

を用いて求め, 空間 3 方向にそれぞれ等分配して SGS のノルマルストレスを与えている。但し, 本解析では SGS 成分の寄与は小さく, GS+SGS に対する SGS 成分の比率は最大でも 10% 程度である。

注 5) LES の乱流エネルギー k や圧力歪相関項の DNS との比較において, 厳密な比較のためには, LES においても (GS+SGS) の合計を表示すべきである。但し, そのためには SGS における乱流エネルギー k_{SGS} や圧力歪相関項の正確なモデルが必要となるが, 現在の所, そのようなモデルは存在しない。従って今回は, LES の乱流エネルギー k やレイノルズストレスの輸送方程式の収支は GS 成分のみを表示することとする。

LES における乱流エネルギーの GS 成分 k_{GS} の輸送方程式の各項を次に示す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_{GS}}{\partial t} + \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle k_{GS}}{\partial x_j} &= -\langle \bar{u}_i' \bar{u}_j' \rangle \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_j} \\ &\quad \text{① } P_k \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} (-\langle 1/2 \bar{u}_i' \bar{u}_i' \bar{u}_j' \rangle - \langle \bar{u}_i' \tau_{ij}' \rangle) \\ &\quad \text{② } T_k \\ &+ \nu \frac{\partial^2 k_{GS}}{\partial x_j^2} - \langle \bar{u}_i' \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{p}' \rangle - \langle (-\tau_{ij}' + \nu \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_j}) \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_j} \rangle \\ &\quad \text{③ } D_k \quad \text{④ } \Pi_k \quad \text{⑤ } \varepsilon \end{aligned}$$

- ① P_k 生産項 ② T_k 乱流拡散項
③ D_k 分子拡散項 ④ Π_k 速度圧力勾配相関項
⑤ ε 粘性消散項

注 6) 今回の乱流エネルギー k , 圧力歪相関項の GS 成分の収支の算定に当たっては鈴木・河村⁶⁾の consistent scheme の考え方を参考として, 移流項を flux form で表した運動方程式と整合性のある収支離散式を用いている。

注 7) 図 8 に示すように, case2 (colocation grid 利用) の場合の瞬時 divergence の絶対値 $|\Delta \bar{u}_i / \Delta x_i|$ 分布は, 最大 1 のオーダーである。一方ここには示さぬがその時間平均値 $|\Delta \langle \bar{u}_i \rangle / \Delta x_i|$ は最大でも 10^{-3} のオーダーである。従って RANS モデルのように時間平均化されたモデルの場合には, LES のような非定常計算に比べ, colocation grid 利用による誤差は大きくなりにくいものと推察される。

記 号

- x_i : 空間方向の 3 成分
($i=1$ 主流方向, $i=2$ スパン方向, $i=3$ 鉛直方向)
 u_i : x_i 方向の速度成分 (colocation grid ではセル中心で定義, staggered grid では界面で定義する)
 U_i : colocation grid 利用の場合の i 方向界面速度成分 (定義点については図 1 参照)
 p : 流体の密度で基準化された圧力

\bar{f} : f のフィルタリング平均
 $\langle f \rangle$: f のアンサンブル平均
 \bar{f} : f のアンサンブル平均からのずれ
 \bar{f} : f の GS 成分 ($\bar{f} = \bar{f} - \langle \bar{f} \rangle$)
 ν : 動粘性係数
 ν_{SGS} : subgrid scale 渦動粘性係数
 D : channel 半幅
 $\langle u_i' u_j' \rangle$: レイノルズストレス R_{ij} の合計 (GS+SGS)
 $(= \langle \bar{u}_i' \bar{u}_j' \rangle + \langle \tau_{ij} \rangle)$
 $\langle \bar{u}_i' \bar{u}_j' \rangle$: R_{ij} の GS 成分
 τ_{ij} : R_{ij} の SGS 成分 ($= \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$)
 k : 乱流エネルギーの合計
 $(1/2 \langle u_i' u_i' \rangle = k_{GS} + \langle k_{SGS} \rangle)$
 k_{GS} : 乱流エネルギーの GS 成分 ($1/2 \langle \bar{u}_i' \bar{u}_i' \rangle$)
 k_{SGS} : SGS の乱流エネルギー ($1/2 \tau_{ii}$)
 ε : k の粘性消散項
 ϕ_{ij} : R_{ij} の圧力歪み相関項 ($= \langle p' (\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}) \rangle$)
 u_* : 壁面摩擦速度
 x_i^+ : 壁座標 ($x_i^+ = \frac{u_* x_i}{\nu}$)
 h_i : x_i 方向のメッシュ幅
 h_i^+ : 壁座標で表した方向のメッシュ幅
 Re_τ : レイノルズ数 $Re_\tau = \frac{u_* D}{\nu} = 640$
 I, J, K : 各々空間の x_1, x_2, x_3 方向の位置を表す suffix
(1996年10月24日受理)

参 考 文 献

- 1) J. W. Deardorff : A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers : J. Fluid Mech. vol. 41, pp. 453-480, 1970.
- 2) 村上周三, 日比一喜, 持田灯 : Large Eddy Simulation による街区周辺乱流場の 3 次元解析 (その 1) : 日本建築学会計画系論文報告集 第412号, pp. 1-10, 1990年6月.
- 3) 持田灯, 村上周三, 坂本成弘 : LES による 2 次元角柱に作用する変動圧力と流れの 3 次元構造の解析 : 日本建築学会構造系論文報告集 第453号, pp. 47-55, 1993年11月.
- 4) 持田灯, 村上周三, 富永禎秀, 小林光 : Dynamic LES における 2 次元角柱まわりの乱流渦放出流れの解析 (第 1 報) : 日本建築学会計画系論文報告集 第479号, pp. 41-47, 1996年1月.
- 5) C.M. Rhie and W.L. Chow : Numerical Study on the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation : AIAA JOURNAL vol. 21, No. 11 pp. 1525-1532, 1983.
- 6) 石田義洋, 村上周三, 加藤信介, 持田灯 : 解強制置換法を用いた複合 grid システムによる建物内外の気流解析法に関する研究 : 日本建築学会計画系論文報告集 第451号, pp. 55-66, 1993年9月.
- 7) 馬場洋昭, 里深信行, 徳永宏 : Non-Staggered grid を用いた平行平板乱流に対する LES : 第 5 回数値流体シンポジウム講演論文集, pp. 257-260, 1991年12月.
- 8) M. Breuer and W. Rodi : Large-Eddy Simulation of Turbulent Flow through a Straight Square Duct and a 180 Bend : P.R. Voke et al. (eds.), Direct and Large-Eddy Simulation 1 pp. 273-285, 1994.
- 9) 佐竹信一, 笠木伸英 : コロケーション grid を用いたチャンネル乱流のダイレクトシミュレーション : 第 8 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp. 321-324, 1994年12月.
- 10) F. Sotiropoulos and S. Abdallah : The Discrete Continuity Equation in Primitive Variable Solutions of Incompressible Flow : J. Comp. Physics, vol. 95, pp. 212-227, 1991.
- 11) 森西洋平, 中林功一, 田畑正和 : 非圧縮性流体の差分解析におけるエネルギー保存性について : 第 9 回生研 NST シンポジウム講演論文集, pp. 131-138, 1994年3月.
- 12) 鈴木哲也, 河村洋 : 乱流の直接シミュレーションにおける差分式の整合性 : 日本機械学会論文集 (B編) 60巻578号, 1994年10月.
- 13) P. Moin and J. Kim : Numerical investigation of turbulent channel flow : J. Fluid Mech. vol. 118, pp. 341-377, 1982.
- 14) A. K. M. F. Hussain and W. C. Reynolds : Measurements in Fully Development Turbulent Channel Flow : Transaction of ASME, Journal of Fluid Engineering, pp. 568-580, December, 1975.
- 15) 堀内潔 : Large Eddy Simulation における移流項の近似法について : 生産研究38巻12号, pp. 576-579, 1986年12月.
- 16) J. A. Clark : A study of incompressible turbulent boundary layers in channel flow : Trans. A.S.M.E. D, J. Basic Engng 90, 450, 1968.
- 17) U. Piomelli, J.H. Ferziger and Parviz Moin : Models for Large Eddy Simulations of Turbulent Channel Flows including Transpiration : Report TF-32 Thermoscience Division Dept. of Mechanical Eng. Stanford University, December 1987.
- 18) N.N. Mansour, J. Kim and P. Moin : Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow.: J. Fluid Mech. vol. 194, pp. 15-44, 1988