

角柱周りの流れのラージエディシミュレーション

—ラージエディシミュレーションにおける風上差分の影響—

Large Eddy Simulation of Flow around a Rectangular Cylinder

—On the effect of upwind schemes in large eddy simulations—

小垣 哲也*・小林 敏雄*・谷口 伸行*

Tetsuya KOGAKI, Toshio KOBAYASHI, Nobuyuki TANIGUCHI

1. はじめに

複雑な形状の流れ場に対してラージエディシミュレーション (large eddy simulation, LES) を適用する場合、計算をいかに安定に進めるかということが問題となる。特に角部を有する形状の場合、速度場に数値振動が生じ、これが計算結果に悪影響を及ぼす場合がある¹⁾。その対策の一つとして対流項スキームの風上化がある。風上スキームは SGS モデルと同様なエネルギー散逸効果を持つため、LES における風上差分の使用は問題視されてきたが、その影響については今のところよくわかっていない。そこで本研究は、2次精度および5次精度風上差分を用いて2次元角柱周りの流れの LES を行い、対流項スキームの風上化に伴う人工的分散・散逸効果の影響を調べる。

2. 基礎方程式

2.1 基礎方程式 代表長さ H 、代表速度 U で無次元化し、フィルタリング操作を施した非圧縮粘性流体の連続の式および Navier-Stokes 方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2)$$

2.2 SGS モデル 本計算で用いられた subgrid scale (SGS) モデルは、最も基本的な Smagorinsky モデルとその改良版の dynamic mixed モデル (DMM) である。

まず、Smagorinsky モデル^{2),3)} は以下の式で与えられる。

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2(C_S \bar{\Delta})^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \quad (3)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad |\bar{S}| = \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}} \quad (4)$$

(3) 式中の Smagorinsky 定数 C_S は、持田ら⁴⁾が C_S を場の関数とする SGS モデルを用いて立方体周りの解析を行った結果から類推した最適値である 0.13 を用いる。また、グリッドフィルター幅 $\bar{\Delta}$ に Van Driest 型壁減衰関数を乗じている。

一方、Germano ら⁵⁾によって提案された dynamic SGS モデル (DSM) は、モデル係数を流れ場に応じて動的に決定する手法である。Zang ら⁶⁾は Bardina ら⁷⁾の mixed モデルを DSM に組み込み、さらに、Vreman ら⁸⁾は Zang らのモデルの数学的不適切性を取り除いた。Vreman らのモデル (dynamic mixed model, DMM) は次のように表される。

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2C\bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} + L_{ij}^m - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk}^m \quad (6)$$

ここで、 L_{ij}^m は修正 Leonard 項であり、

$$L_{ij}^m = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (7)$$

で与えられる。Lilly⁹⁾により提案された最小自乗法によるアプローチを用いて、DMM のモデル係数 C は次式で与えられる。

$$C = -\frac{1}{2} \frac{\langle (L_{ij} - H_{ij}) M_{ij} \rangle}{\langle M_{ij} M_{ij} \rangle} \quad (8)$$

$$L_{ij} = \widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (9)$$

$$H_{ij} = \overline{\widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j}} - \bar{u}_i \bar{u}_j - (\widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j) \quad (10)$$

*東京大学生産技術研究所 第2部

表 1 計算条件

Case	Domain	Resolution	SGS model	Scheme
case A	21.1D×14.0D×4.0D	153,760 (82×63×32)	Smagorinsky	QUICK+2nd order
case B	20.4D×14.0D×4.0D	347,648 (112×104×32)	DMM	5th order + 4th order

$$M_{ij} = \bar{\Delta}^2 (\alpha^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} - |\bar{S}| \bar{S}_{ij}), \quad \alpha = \frac{\bar{\Delta}}{\Delta} \quad (11)$$

ここで、(8) 式中の『』はスパン方向平均を表している。

DMM では陽的なフィルター操作が必要となる。テストフィルター操作および 2 回目のグリッドフィルター操作は、テイラー展開から次式のように評価できる¹⁰⁾。

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f} + \frac{\bar{\Delta}^2}{24} \cdot \nabla^2 \bar{f} + O(\bar{\Delta}^4) \quad (12)$$

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f} + \frac{\bar{\Delta}^2}{24} \cdot \nabla^2 \bar{f} + O(\bar{\Delta}^4) \quad (13)$$

上式の導出において、フィルター関数としてトップハットフィルターまたはガウシアンフィルターを仮定しているが、どちらの場合でも 4 次精度までは同じ式を得る。

3. 数値計算方法

3.1 計算領域、計算格子 各計算における計算領域、計算格子解像度、SGS モデルを表 1 に示す。解析領域はワークショップ¹⁾で指定された条件を満たしている。ただし、出口境界条件の影響を小さくするため、角柱中心から出口までの距離は 20.0D 以上に拡張されている。

3.2 計算方法 圧力と連続の式のカップリング・アルゴリズムは HSMAC 法¹¹⁾に準じている。対流項の離散化は角柱角部でのウイグルの発生を抑えるため、case A では 2 次精度風上差分である QUICK¹²⁾を、case B では 1 階微分の 6 次精度中心差分に人工散逸項として 6 階微分の 2 次精度中心差分形式に格子間隔 Δx の 5 乗の係数をかけた項を加えた形で与えられる Rai ら¹³⁾の 5 次精度風上差分、

$$U \frac{\partial u}{\partial x} = U \frac{-u_{-3} + 9u_{-2} - 45u_{-1} + 45u_1 + 9u_2 - u_3}{60\Delta x} - |U| \frac{\Delta x^5}{60} \frac{u_{-3} - 6u_{-2} + 15u_{-1} - 20u_0 + 15u_1 - 6u_2 + u_3}{\Delta x^4} + O(\Delta x^6) \quad (14)$$

を使用した。拡散項には case A の場合 2 次精度中心差分を、case B の場合 4 次精度風上差分を用いている。時間

進行は、対流項を 2 次精度 Adams-Bashforth 法により陽的に、その他の項を Crank-Nicolson スキームにより陰的に取り扱う半陰的解法とし、無次元時間間隔 dt は全ケースで 0.002 である。

境界条件として、計算領域入口に一樣流 ($\bar{u}=1.0, \bar{v}=0, \bar{w}=0$) を与え、計算領域側面境界に slip wall 条件、角柱壁面に no-slip 条件を課している。出口には次式で与えられる対流境界条件^{14), 15)}を課している。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + U_c \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_1} = 0 \quad (15)$$

ここで、 U_c は対流速度であり、本研究では入口平均流速を与えた。また、スパン方向には周期境界条件を課している。

4. 風上化の影響

対流項の風上化の影響を調べるため、ここでは風上化に伴う人工的数値散逸・分散を考慮した GS のエネルギー式を考える。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i \right) + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} \bar{u}_i) - \frac{2}{Re} \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} + \tau_{ij} \bar{S}_{ij} + E \quad (16)$$

$$T_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + \frac{2}{Re} \bar{S}_{ij} + 2\tau_{ij} \quad (17)$$

ここで、(16) 式中の右辺第 2 項は分子粘性散逸、第 3 項は SGS モデルによる乱流粘性散逸を表している。また、第 4 項 E は風上化により付加される人工的な項であり、QUICK と 5 次精度風上差分の場合、 E は以下の式で与えられる。

$$E = -\bar{u}_i \bar{u}_j \frac{\Delta x_j^2}{24} \frac{\partial^3 \bar{u}_i}{\partial x_j^3} - \bar{u}_i |\bar{u}_j| \frac{\Delta x_j^3}{16} \frac{\partial^4 \bar{u}_i}{\partial x_j^4} \quad (\text{QUICK}) \quad (18)$$

$$E = \bar{u}_i |\bar{u}_j| \frac{\Delta x_j^5}{60} \frac{\partial^6 \bar{u}_i}{\partial x_j^6} \quad (5 \text{ 次精度風上差分}) \quad (19)$$

QUICK の人工付加項は、数値解に対し分散的および散逸

研究速報

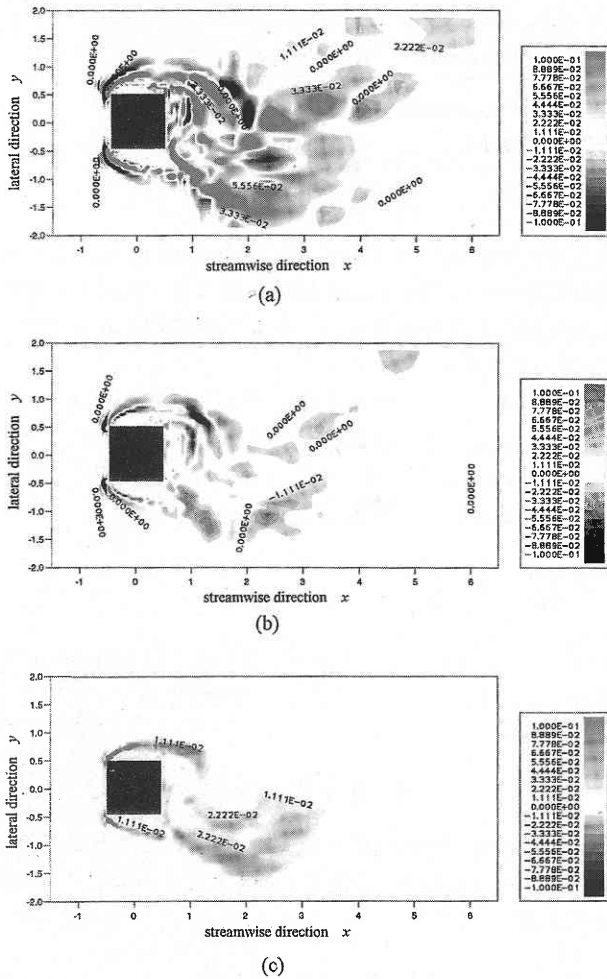


図1 GSエネルギー式中の風上化による人工付加項と全粘性散逸項の分布 (case A).
(a) QUICKによる人工散逸項, (b) QUICKによる人工分散項, (c) 全粘性散逸項

的な効果を持つのに対し, 5次精度風上差分の場合は散逸効果のみある.

5. 計算結果

case Aにおける瞬時の QUICKによる分散値と散逸値 (18) 式中右辺第1項および第2項)の分布を全粘性散逸値 (16) 式中右辺第2項+第3項)の分布と比較したものを図1に示す. 図中, 正値は散逸を表す. 角柱前縁から側方領域にかけて, また角柱に近い後流域において, QUICKによる散逸効果が分子粘性散逸およびSGSモデルによる乱流粘性散逸より大きく働いている.

case Bにおける瞬時の5次精度風上差分による散逸値と全粘性散逸値の分布を図2に示す. 後流域における人工

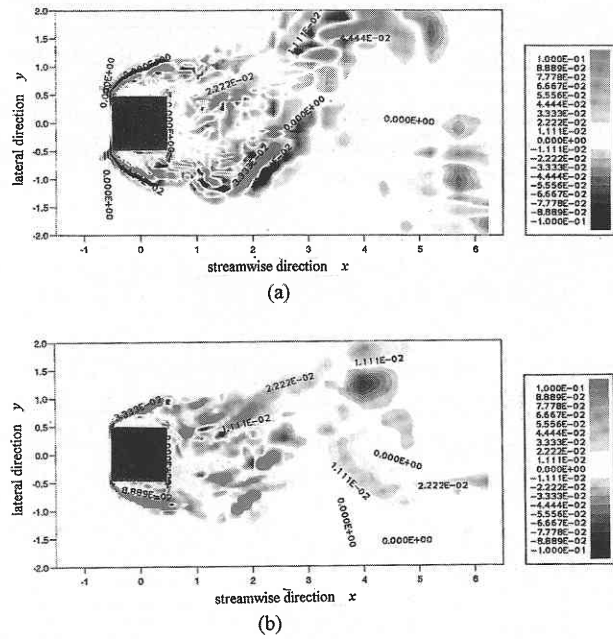


図2 GSエネルギー式中の風上化による人工付加項と全粘性散逸項の分布 (case B).

(a) 5次精度風上差分による人工散逸項, (b) 全粘性散逸項

散逸量の最大値は case A とほぼ同じオーダーであったが ($E_{max} = 4 \times 10^{-1}$), 高い散逸値を示す領域が QUICKの場合よりも狭くなり, 風上化による散逸効果の影響は小さくなっている. しかし, case Bの場合でも人工散逸の影響はSGSモデルによる散逸と比較して無視できない.

6. 結論

異なる格子解像度, 対流項スキーム, SGSモデルを用いて2次元静止角柱周りの流れのLESを行い, 風上化の影響をグリッドスケールエネルギー式で評価した. 粗い計算格子で QUICKを用いた場合, 前縁および後流域において風上化による人工的散逸量がSGSモデルによる散逸量を上回り, 数値解を“汚染”した. 風上化の影響を低減するため, 格子解像度を改善し対流項スキームを5次精度風上差分に変更した場合でも, 風上化による散逸効果はSGSモデルによる散逸効果と比較して無視できない程度であった. しかし一方, 時間平均速度場および乱流統計量は実験とかなりよく一致した結果が得られている¹⁶⁾. これは, 角柱周りの流れが大スケールの渦運動(カルマン渦)により支配されているため, 対流項の風上化の影響が出にくいことが原因としてあげられる. しかし, LESの工学的応用問題への応用において, 少ない格子点数で安定

な計算を行うという観点から、対流項スキームの風上化は無意味であるという結論は時期早尚である。Kawashimaら¹⁶⁾による人工散逸項にかかる係数の調節および朴ら(17)による風上スキームを使用する領域の限定等は有効な手段であろう。

謝 辞

本計算の一部は、東京大学大型計算機センター研究開発プロジェクト「ベクトル処理指向のスーパーコンピュータの利用」および科学研究費一般研究A「LESモデルによる混相流数値解析法の開発と評価」を利用して行われた。

(1996年10月31日受理)

参 考 文 献

- 1) A document of "Workshop on Large Eddy Simulation of Flows past Bluf Bodies", (Tegernsee, Germany, organized by Rodi, W. and Ferziger, J. H., 1995, not published)
- 2) Smagorinsky, J., Mon. Weath. Rev. **91** (1963) 99-164
- 3) Deardorff, J. W., J. Fluid Mech. **41** (1970) 453-480
- 4) 持田・村上・W. Rodi・坂本：日本風工学会誌, **55**(1993), 79-80

研 究 速 報

- 5) Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot W. H., Phys. Fluids **A3** (1991), 1760-1765
- 6) Zang, Y., Street, R. L. and Koseff, J. R., Phys. Fluids **A5** (1993), 3186-3196
- 7) Bardina, J., Ferziger, J. H. and Reynolds, W. C., Ph. D. dissertation, Dept. Mech. Eng. (1983), Stanford University
- 8) Vreman, B., Geurts, B. and Kuerten, H., Phys. Fluids **6** (1994), 4057-4059
- 9) Lilly, D. K., Phys. Fluids **A4** (1992), 663-665
- 10) 谷口：生産研究, **47**(1995), 120-123
- 11) Hirt, C. W. and Cook, J. L., J. Comput. Phys. **10** (1972), 324-340
- 12) Leonard, B. P., Comput. Meth. Applied Mech. & Eng. **19** (1979) 59-98
- 13) Rai, M. M. and Moin, P., J. Comput. Phys. **96** (1991), 15-53
- 14) Pauley, L. L., Moin, P. and Reynolds, W. C., J. Fluid Mech. **220** (1990), 390-411
- 15) 戴・小林：機論, **58-546 B** (1992), 313-320
- 16) Proceedings of "The Second ERCOFTAC Workshop on Direct and Large Eddy Simulation", (Grenoble, France, 1996, not published)
- 17) 朴・小林・谷口：第10回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 投稿中