

## 乱流モデルを用いたプラズマ回転効果の研究

Analysis of Effects of Plasma Rotation Using a Turbulent Dynamo Model

横 井 喜 充

Nobumitsu YOKOI

プラズマの回転によって乱流が抑えられる現象を乱流ダイナモ・モデルの観点から調べる。プラズマの回転効果を捉えるために、乱れの強さを表す乱流 MHD エネルギーとその散逸率に加えて、乱流場の速度/磁場相関である乱流クロス・ヘリシティを考慮に入れたモデル ( $K-\varepsilon-W$ モデル) が構成される。そのモデルを簡単な円筒形状プラズマに適用する。プラズマのポロイダル回転がポロイダル磁場の配位と結びつくことによって乱流クロス・ヘリシティが供給される。その量は回転の強さ  $\Omega$  に比例する。生成されたクロス・ヘリシティの効果で乱流エネルギーが抑えられること、その抑制率が  $\Omega^2$  に比例することが確かめられる。トロイダル回転など一般の回転についても考察される。

## 1. はじめに

一般に乱れは系の輸送を促進する。乱流による渦粘性、および乱流磁気拡散はこの乱れによる異常輸送の例である。しかし回転のように系の対称性を破る因子があるとき、乱れが回転の効果と結びついて異常輸送の効果を弱める場合がある。乱流中で渦や磁場などの大規模構造が準定常的に存続する際に流体の回転が重要な役割を果たしていることが知られている。天体回転は天体磁場の乱流中での生成・維持に不可欠である<sup>1)</sup>。また、トカマクなどの核融合装置でプラズマ閉じ込めの改善にプラズマのグローバルな回転が関与していることも指摘されている<sup>2), 3)</sup>。同様の現象は電気伝導性を持たない中性乱流においても知られている。一般に強い回転のもとでは流れが2次元化し、大きいスケールから小さいスケールへのエネルギーのカスケードという乱流本来の特徴が弱められる傾向にある。また、系の回転によって乱れ場のねじれ度を表す乱流力学ヘリシティが供給されるとそれが渦度とカップリングすることで乱流中でも渦構造が維持されていくことが示されている<sup>4), 5)</sup>。この機構は中性乱流中での力学ヘリシティの効果として、工学的には旋回乱流の研究、理学的には回転天体上での準定常的な渦構造、たとえば土星の白斑や台風の研究、また竜巻の研究など幅広い分野への応用が考えられる。

電気伝導性を持つ、あるいは略して電導性、流体の乱流中で大きなスケールの磁場を生成・維持する機構として古くから乱流ダイナモが研究されてきた<sup>1), 6), 7)</sup>。通常の乱流

ダイナモであるアルファ・ダイナモでは乱流場のねじれ構造を表す乱流ヘリシティを通して磁場に平行な電流配位が誘起される<sup>7)</sup>。一方、クロス・ヘリシティ・ダイナモでは乱流場の速度/磁場相関である乱流クロス・ヘリシティを通して平均渦度に平行な電流配位が誘起される<sup>8)</sup>。前者と比較して後者は平均渦度すなわち大規模な回転運動から直接に大規模磁場が誘導される点に大きな特徴がある。クロス・ヘリシティ・ダイナモの考え方は降着円盤<sup>9)</sup>、太陽・地球磁場<sup>8), 10)</sup>、銀河磁場<sup>11)</sup>などに適用されて一定の成果を収めてきた。しかし、数値実験を含めたダイナモ機構の定量的検証はまだ少ない<sup>12), 13)</sup>。そこで、上述クロス・ヘリシティ効果を何らかの形で取り入れた乱流モデルを構成し、それを具体的な幾何形状のプラズマに適用してクロス・ヘリシティ・ダイナモの有効性を検証することは大きな意味を持つ。

乱流モデリングは非線型性の強い実際の流れを研究する有効な手段を提供してきた。特に比較的計算量の少なく済む  $k-\varepsilon$  型モデルは、その簡便さから、理工学の広い分野で最もよく使われるもののひとつである。ここでは平均場のダイナミクスは、乱流場を特徴づける量である乱流エネルギー  $k$  とその散逸率  $\varepsilon$  のダイナミクスと同時に解かれ、決定される。この  $k-\varepsilon$  モデルはさまざまな形状の流れにおいて一定の成果を挙げているが、一方でその簡便さの裏返しに単純さのために、回転を伴う流れなどいくつかの流れ場においてはうまく機能しないことが知られている<sup>14)</sup>。

回転の効果をもどのように取り入れるかは MHD 乱流の  $k-\varepsilon$  型モデルを考える際の重要な課題となる。そもそも通

\*東京大学生産技術研究所 第1部

常の  $k$ - $\varepsilon$  モデルで採用されている乱流エネルギー  $k$  とその散逸率  $\varepsilon$  は 1 点の乱れの強さを表すだけの純スカラー量であった。回転は系の鏡映対称性 (mirrorsymmetry) を破る主要な因子である。座標系を反転させたとき符号が反転するスカラーである擬スカラーは、鏡映対称性の破れの存在、典型的には回転の存在によってはじめてゼロでない統計値を示す量となる。つまり乱流場の擬スカラー量は乱流場に対する回転の効果を表すのに適した統計量となりうる。前述乱流場のねじれ度を表すヘリシティはそのような擬スカラー量のひとつであり、中性流体乱流においては  $k$  および  $\varepsilon$  に加えて乱流ヘリシティ  $\langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle$  の方程式を考えることが回転効果の解析に有効であった<sup>4), 5)</sup>。

電導性流体であるプラズマの乱流場にもいくつかの擬スカラー量を考えることができるが、そのうち乱流の速度/磁場相関である乱流クロス・ヘリシティ  $W = \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle$  は、前述したクロス・ヘリシティ・ダイナモにあって平均渦度あるいは回転運動の効果を直接に平均磁場の生成機構になく役割を担うと期待されている。そこで本研究では乱流統計量として、乱流 MHD エネルギー  $K$  とその散逸率  $\varepsilon$  に加えて、この乱流クロス・ヘリシティ  $W$  を採用し、モデルを構成する。この  $K$ - $\varepsilon$ - $W$  モデルでは、 $W$  の発展方程式を通して回転によるクロス・ヘリシティ効果が取り込まれることになる<sup>10)</sup>。このモデルを簡単な形状のプラズマ乱流に適用し、実際にプラズマの回転運動がクロス・ヘリシティ効果を通して乱れを抑える様子を調べていく。

以下では次のように論を進める。まず第 2 節で乱流クロス・ヘリシティを取り入れた乱流モデルである  $K$ - $\varepsilon$ - $W$  モデルが構成される。続いて第 3 節でクロス・ヘリシティ・ダイナモについて簡単に触れた後、第 4 節で計算対象とするプラズマの形状・境界条件、第 5 節で計算手続きが示される。第 6 節で最も簡単なポロイダル回転についての結果が吟味される。まとめと今後の展望は第 7 節に記される。

## 2. MHD 乱流モデル

### 2.1 モデル方程式

#### 平均場

いま、大きなスケールの速度場  $\mathbf{U}$  および磁場  $\mathbf{B}$  に興味があるとして、非圧縮性プラズマを支配する方程式は、平均速度場

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P_M + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot \mathbf{R} + \nu \Delta \mathbf{U}, \quad (1)$$

#### 平均磁場

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (2)$$

およびソレノイダル条件

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

で与えられる ( $P_M$ : MHD 圧力の平均部分,  $\nu$ : 分子粘性)。

平均電流密度  $\mathbf{J}$  についての Ohm の法則

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda} (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_M) \quad (4)$$

を用いて (2) 式中の電場  $\mathbf{E}$  を消去すると平均磁場の誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_M) + \lambda \Delta \mathbf{B} \quad (5)$$

が得られる ( $\lambda$ : 分子磁気拡散率)。小さなスケールあるいは乱れの効果はレイノルズ応力  $\mathbf{R} = -\langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' - \mathbf{b}' \mathbf{b}' \rangle$  と乱流起電力  $\mathbf{E}_M = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle$  を通して平均場の方程式中に入ってくる ( $\mathbf{u}'$ : 速度ゆらぎ,  $\mathbf{b}'$ : 磁場ゆらぎ)。それらは統計理論から

$$\begin{aligned} R^{\alpha\beta} = & -\frac{2}{3} K_R \delta^{\alpha\beta} + \nu_K \left( \frac{\partial U^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \\ & - \nu_M \left( \frac{\partial B^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial B^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathbf{E}_M = \alpha \mathbf{B} - \beta \mathbf{J} + \gamma \boldsymbol{\Omega} \quad (7)$$

のように書けることがわかっている<sup>15)</sup> [ $K_R (= \langle \mathbf{u}'^2 - \mathbf{b}'^2 \rangle / 2)$ : 乱流残留エネルギー,  $\boldsymbol{\Omega} (= \nabla \times \mathbf{U})$ : 平均渦度]。これらの表式中の比例係数  $\nu_K, \nu_M$  [式 (6)],  $\alpha, \beta, \gamma$  [式 (7)] は乱流場の統計的性質によって決まる量である。

#### 乱流統計量

乱流場を特徴づける 1 点統計量として、乱れの強さを表す乱流 MHD エネルギー  $K$  とその散逸率  $\varepsilon$  のほかに、乱れのねじれといった構造的性質を表す擬スカラー量を用いる。ここでは乱流残留ヘリシティ  $H$  および乱流クロス・ヘリシティ  $W$  を採用する。これらはそれぞれ

$$K = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}'^2 + \mathbf{b}'^2 \rangle, \quad (8)$$

$$\varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial u'^b}{\partial x^a} \frac{\partial u'^b}{\partial x^a} \right\rangle + \lambda \left\langle \frac{\partial b'^b}{\partial x^a} \frac{\partial b'^b}{\partial x^a} \right\rangle, \quad (9)$$

$$H = -\langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' - \mathbf{b}' \cdot \mathbf{j}' \rangle, \quad (10)$$

$$W = \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle, \quad (11)$$

で定義される。乱流統計量 (8) - (11) を用いると (6), (7) 式の係数  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  および  $\nu_K$ ,  $\nu_M$  は

$$\alpha^{\text{model}} = C_\alpha \frac{K}{\varepsilon} H, \quad (12)$$

$$\beta = \frac{5}{7} \nu_K^{\text{model}} = C_\beta \frac{K}{\varepsilon} K, \quad (13)$$

$$\gamma = \frac{5}{7} \nu_M^{\text{model}} = C_\gamma \frac{K}{\varepsilon} W, \quad (14)$$

のように関係づけモデル化できる<sup>15)</sup>。ここで  $C_\alpha$ ,  $C_\beta$ ,  $C_\gamma$  はモデル定数である。大切な点は,  $\alpha$  (アルファ効果),  $\beta$  (乱流磁気拡散効果),  $\gamma$  (クロス・ヘリシティ効果) がそれぞれ残留ヘリシティ  $H$ , 乱流 MHD エネルギー  $K$ , 乱流クロス・ヘリシティ  $W$  で表されるということである ( $K/\varepsilon$  は乱流の時間スケールを与えることに注意)。

総 MHD エネルギー  $\int (\mathbf{u}^2 + \mathbf{b}^2) / 2dV$  と総クロス・ヘリシティ  $\int \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV$  が非圧縮性 MHD 方程式の保存量であるため [ $\mathbf{u}$  ( $= \mathbf{U} + \mathbf{u}'$ ): 速度,  $\mathbf{b}$  ( $= \mathbf{B} + \mathbf{b}'$ ): 磁場,  $V$ : 流体体積],  $K$  と  $W$  の発展方程式はどちらも簡単な形

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) G = P_G - \varepsilon_G + \nabla \cdot \mathbf{T}_G \quad (G = K \text{ or } W) \quad (15)$$

に書くことができる。ただしここで

$$P_K = -\mathbf{E}_M \cdot \mathbf{J} + R^{ab} \frac{\partial U^b}{\partial x^a}, \quad (16)$$

$$\varepsilon_K = \varepsilon, \quad (17)$$

$$\mathbf{T}_K = \mathbf{WB} + \left\langle \left( \frac{\mathbf{u}'^2}{2} + \frac{\mathbf{b}'^2}{2} + p'_M \right) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}') \mathbf{b}' \right\rangle \quad (18a)$$

$$\stackrel{\text{model}}{=} \mathbf{WB} + \frac{\nu_K}{\sigma_K} \nabla K, \quad (18b)$$

$$P_W = -\mathbf{E}_M \cdot \boldsymbol{\Omega} + R^{ab} \frac{\partial B^b}{\partial x^a}, \quad (19)$$

$$\varepsilon_W = (\nu + \lambda) \left\langle \frac{\partial u'^b}{\partial x^a} \frac{\partial b'^b}{\partial x^a} \right\rangle \stackrel{\text{model}}{=} C_W \frac{\varepsilon}{K} W, \quad (20)$$

$$\mathbf{T}_W = \mathbf{KB} - \left\langle (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}') \mathbf{u}' - \left( \frac{\mathbf{u}'^2}{2} + \frac{\mathbf{b}'^2}{2} + p'_M \right) \mathbf{b}' \right\rangle \quad (21a)$$

$$\stackrel{\text{model}}{=} \mathbf{KB} + \frac{\nu_K}{\sigma_W} \nabla W \quad (21b)$$

である ( $p'_M$ : MHD 圧力のゆらぎ部分,  $\sigma_K$ ,  $C_W$ ,  $\sigma_W$ :

モデル定数)。乱流エネルギー散逸率  $\varepsilon$  の方程式は

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) \varepsilon \stackrel{\text{model}}{=} C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} P_K - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} + C_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon}{K} \nabla \cdot (\mathbf{WB}) + \nabla \cdot \left( \frac{\nu_K}{\sigma_D} \nabla K \right) \quad (22)$$

となる ( $C_{\varepsilon 1}$ ,  $C_{\varepsilon 2}$ ,  $C_{\varepsilon 3}$ ,  $\sigma_D$ : モデル定数)。一方, 残留ヘリシティ  $H$  の方程式は対応する総残留ヘリシティ  $\int (-\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{j}) dV$  が保存量でないため式 (15) のように簡単な形で書くことはできない。第 3 節で見るように本論ではアルファ効果を見捨てるので残留ヘリシティの発展方程式を用いることはないが, その主な形は  $C_H$ ,  $\sigma_H$  を 1 程度の定数として

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) H = -R^{ab} \frac{\partial \Omega^b}{\partial x^a} + \Omega^b \frac{\partial R^{ab}}{\partial x^a} - C_H \frac{\varepsilon}{K} H + \nabla \cdot \left( -K \boldsymbol{\Omega} + \frac{\nu_K}{\sigma_H} \nabla H \right) \quad (23)$$

となる<sup>16)</sup>。

ここで  $K$  と  $W$  の大きさについては, 任意のベクトル  $\Phi$  と  $\Psi$  について

$$\Phi^2 + \Psi^2 \geq 2\Phi \cdot \Psi \quad (24)$$

が言えることから

$$\frac{|W|}{K} = \frac{|\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle|}{\langle \mathbf{u}'^2 + \mathbf{b}'^2 \rangle / 2} \leq 1 \quad (25)$$

の関係が成り立つ。つまり乱流 MHD エネルギーで規格化された乱流クロス相関は 1 を超えることはない。

#### モデル定数

平均場の方程式 (1), (5) および乱流統計量の発展方程式 (15), (22) は 9 つのモデル定数を含んでいる。それらは

$$C_\alpha = 0.055, C_\gamma = 0.039, \sigma_K = 1, C_W = 1.1, \sigma_W = 1, C_{\varepsilon 1} = 1.5, C_{\varepsilon 2} = 1.9, C_{\varepsilon 3} = 1.5, \sigma_D = 1.6 \quad (26)$$

のように評価または最適化されているが<sup>12), 13)</sup>, 特に  $W$  の方程式に関する定数の最適化には改良の余地がある。例えば  $W$  の散逸率のモデル定数  $C_W$  [式 (20) 参照] は  $W$  の漸近的挙動を決める重要な定数である。規格化されたクロス相関についての関係式 (25) から  $C_W$  が 1 以上であることがわかる。つまり, 式 (15) から  $W/K$  の発展方程式を構成すると (20) を用いて

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla\right) \frac{W}{K} &= \frac{D}{Dt} \frac{W}{K} \\ &= \frac{1}{K} \frac{DW}{Dt} - \frac{W}{K^2} \frac{DK}{Dt} \\ &= \frac{1}{K} \left(P_W - \frac{W}{K} P_K\right) - \frac{\varepsilon}{K} (C_W - 1) \frac{W}{K} \end{aligned} \quad (27)$$

のようになる。これは  $W/K$  が有限値に留まるために

$$C_W \geq 1 \quad (28)$$

が必要であることを示している。本研究では  $C_W = 1.1$  また  $\sigma_W = 1$  を採用している [式 (26) 参照]。

### 3. クロス・ヘリシティ・ダイナモ

従来の乱流ダイナモ・モデリングでは (4) 式中の渦度  $\Omega$  に比例する項 ( $\gamma$  項) は無視され、 $\alpha$  項と  $\beta$  項のつり合いが議論されてきた。しかし流体がグローバルに回転しているような場合には、前述したように、平均の回転と直接結びついたクロス・ヘリシティ効果がより重要であると期待できる。

乱流速度場と乱流磁場の間にクロス相関がある場合、乱流起電力  $\mathbf{E}_M$  中に平均渦度  $\Omega$  または回転角速度ベクトル  $\omega_p$  に平行な成分が誘起される。このことは以下のように理解することができる。グローバルな渦度場  $\Omega$  中にある流体要素が速度  $\mathbf{u}'$  でゆらいているときその流体要素は  $\mathbf{u}' \times \Omega$  の力を受ける

$$\frac{\delta \mathbf{u}'}{\delta t} = \mathbf{u}' \times \Omega + \dots \quad (29)$$

この力は回転系 (角速度  $\omega_p$ ) で見たときに働く Coriolis 力  $\mathbf{u}' \times 2\omega_p$  と同じ性質を持っている。(  $\omega_p$  の角速度での回転が大きき  $2\omega_p$  の渦運動と局所的に等価である点に注意。) この力はゆらぎ速度と平均渦度の双方に垂直な方向にはたらく。乱流起電力  $\mathbf{E}_M (= \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle)$  への寄与は  $\delta \mathbf{u}' \times \mathbf{b}'$  で表される。乱流場の磁場と速度の間に相関がある ( $W = \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle \neq 0$ ) という事は統計的に見て  $\mathbf{b}'$  は  $\mathbf{u}'$  と平行または反平行ということである。このとき  $\langle (\mathbf{u}' \times \Omega) \times \mathbf{b}' \rangle$  は平均渦度  $\Omega$  の方向に成分を持つ。その向きは  $W > 0$  のとき  $\Omega$  と平行、 $W < 0$  のとき反平行となる (図 1)。

ここでは平均回転運動の效果に焦点を当てるため、むしろ通常のダイナモ・モデルで用いられるアルファ効果の項を無視し、 $\mathbf{E}_M$  の表式として

$$\mathbf{E}_M = -\beta \mathbf{J} + \gamma \Omega \quad (30)$$

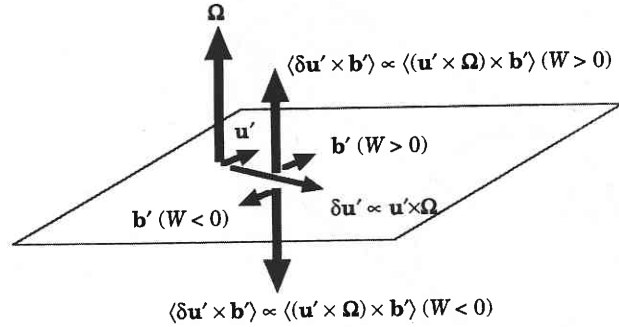


図 1  $\Omega$  に比例する乱流起電力  $\mathbf{E}_M$

を採用する<sup>10), 11)</sup>。この表式を (5) に代入し、定常性を仮定すると

$$\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B} - \beta \mathbf{J} + \gamma \Omega) = 0 \quad (31)$$

が得られるが、この式は  $\gamma/\beta$  が空間的に一様な場合

$$\mathbf{B} = \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{U}, \quad (32)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\gamma}{\beta} \Omega \quad (33)$$

の形の解を持つことが知られている<sup>10)</sup>。アルファ効果 ( $\alpha$  項) を無視し、乱流抵抗 ( $\beta$  項) とクロス・ヘリシティ効果 ( $\gamma$  項) のつりあいのみを考えるこの表式の有用性は、降着円盤磁場、太陽の黒点磁場、銀河磁場などへの応用から示されている<sup>8)~11)</sup>。

## 4. 対 象

### 4.1 円筒形状

核融合のトカマク装置はトーラス形状をしている。装置の小半径  $a$  と大半径  $R_0$  の比 (逆アスペクト比)  $a/R_0$  が小さいときはトーラスを円筒によって近似することができる。ここでは回転方向が  $\theta$  方向、回転軸が  $z$  方向、動径が  $r$  方向であるような円管を考える (図 2)。トカマク装置の理論的研究でしばしばされるように流れは  $z$  方向に一様であると仮定する (トロイダル対称性)。また簡単のため、 $\theta$  方向への一様性も仮定する (ポロイダル対称性)。後に形状の円筒からのずれ (トロイダル性) を考慮に入れる際にはこれら対称性の仮定を一部取り払う必要がある。

さて、実際のトカマク装置では動径方向の平均磁場およびプラズマ平均速度は他方向の成分と比較してかなり小さいので、簡単のためここでは動径方向の平均磁場と平均速度場を無視する;

$$U^r = B^r = 0. \quad (34)$$

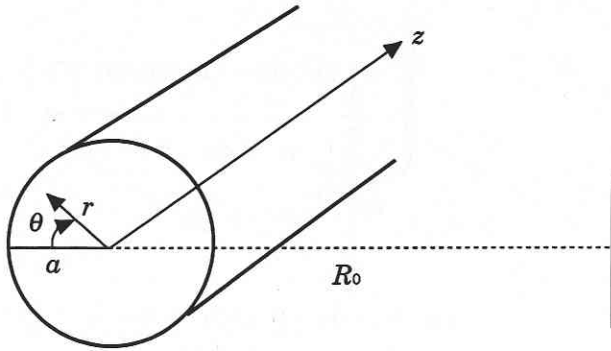


図2 円筒座標系 (r, theta, z)

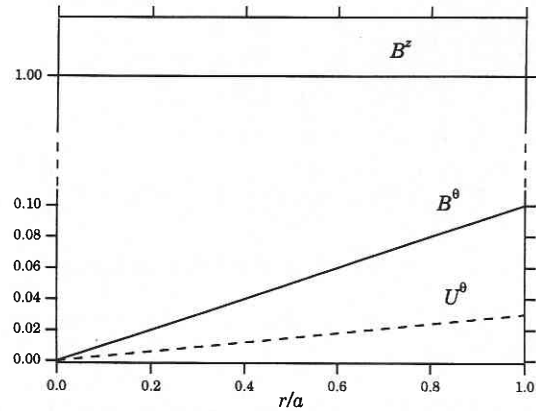


図3 磁場の動径方向分布とポロイダル速度

4.2 境界条件

境界条件には以下のものを用いる。

プラズマ中心

円筒の中心 (r = 0) で、系の対称性からポロイダル速度場とポロイダル磁場がゼロ、他の量については勾配がゼロという条件を課す；

$$U^\theta = 0, \frac{\partial U^z}{\partial r} = 0, B^\theta = 0, \frac{\partial B^z}{\partial r} = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\partial K}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial r} = 0.$$

プラズマ端

円筒の境界 (r = a) では、ポロイダル磁場 B<sup>θ</sup> を支えるために z 方向に一定の電場 E<sub>a</sub> をかける。他の量については「自由滑り (free-slip)」または変形速度ゼロ (strainless) の条件を課す；

$$E^\theta = 0, E^z = E_a, r \frac{\partial}{\partial r} \frac{U^\theta}{r} = 0, \frac{\partial U^z}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B^\theta = \frac{E_a}{\beta}, \frac{\partial B^z}{\partial r} = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\partial K}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial r} = 0.$$

第7節でトロイダル性を考慮に入れる場合にはこれらの境界条件を適宜変更する必要がある。

5. 手 続 き

5.1 基準状態

プラズマ回転の効果を考える対照としてまず回転のない状態を考える；

$$U = 0. \quad (37)$$

この状態では式 (30) のうち  $\gamma \Omega$  項がゼロになる。式 (5) の平均磁場に再生機構は働かず、乱流抵抗  $\beta$  による

平均磁場の異常拡散が生じるのみである。初期に適当なトロイダル磁場とポロイダル磁場 (図3) を与えて乱れが生成されていく様子を見る。

5.2 回転状態

次に、乱れの発展段階の適当な時点 (onset) でプラズマに回転を与え、その回転によって乱れの発展がどのように変化するかを見る。特に本研究では乱れの発展の初期の段階に回転を加え始める。定常状態になってから回転を加えた場合については文献13を参照されたい。

まずポロイダル回転として剛体回転

$$U = (0, U_a r/a, 0) \quad (38)$$

を与える (図3)。後で見ると実際に核融合トカマク装置の閉じ込め改善時に観測されるポロイダル回転は、プラズマ端に局在するもので、剛体回転のように変形速度がない全体的な回転とは異なっている。しかしここでは、回転による乱流抑制の効果を最もはっきりした形で見るとめに (38) の形の回転を用いる。

5.3 初期条件

初期条件としては表1に示したのものを用いる。初期のトロイダルおよびポロイダル磁場の動径分布は図3に示されている。Onset 時から与えるポロイダル回転の大きさはポロイダル磁場の1割程度とする。また初期の K の大きさは対応する乱流ポロイダル・ベーター値 ( $\beta_p = 2K/B^{\theta 2}$ ) が  $O(10^{-5})$  となるように選ばれている。定性的には以下の計算結果はこれら初期値の選び方に依存しない。

6. ポロイダル回転

プラズマの回転によって乱流クロス・ヘリシティ W が生成され、それとともに乱流 MHD エネルギー K は回転のない場合  $K_{ref}$  に比べて抑えられる。その時間発展の様子を示したのが図4である。以下ではそれらの変化がプラ

表1 初期条件. これらの値が,  $B^0(r=a)$  と  $E_a(r=a)$  と  $U_a(t \geq 40, r=a)$  を除いて,  $t=0$  に全ての  $r$  に対して与えられる.

状態	$B^z$	$B^r$	$E_a$	$U_a(\text{onset})$	$K$	$\varepsilon$	$W$
基準	1.0	$1.0 \times 10^{-1}$	$1.0 \times 10^{-3}$	0	$5.0 \times 10^{-6}$	$1.0 \times 10^{-6}$	0
回転	1.0	$1.0 \times 10^{-1}$	$1.0 \times 10^{-3}$	$O(10^{-3}) - O(10^{-2})$	$5.0 \times 10^{-6}$	$1.0 \times 10^{-6}$	0

ズマ回転の強さにどう依存しているかを詳しく見ていこう.

**クロス・ヘリシティの生成**

プラズマの回転は乱流クロスヘリシティ  $W$  を供給する. 発展方程式 (12) から  $W$  の成長率は

$$\frac{\partial W}{\partial t} = C_\beta \frac{K}{\varepsilon} K J^z \Omega^z - C_W \frac{\varepsilon}{K} W \quad (39)$$

で与えられる. このことは回転が強くないうち  $W$  は  $\Omega^z$  ( $= \Omega$ ) に比例していくことを示唆している. 図5は  $W$  が  $\Omega$  によってどう変わるかを示したものである.  $W$  および  $\dot{W}$  が  $\Omega$  に比例しているのがわかる. 注意すべきは回転が逆向き  $\Omega < 0$  になると生成される  $W$  も負になることである;

$$\begin{cases} W > 0 \leftarrow \Omega > 0, \\ W < 0 \leftarrow \Omega < 0. \end{cases} \quad (40)$$

(40) の関係は  $W$  の初期の符号には依存しないで成り立つ. このことから, 生成される  $W$  の符号は  $J^z \Omega$  つまり平均磁場と平均回転の幾何学的関係のみで決まることがわかる.

**乱流エネルギーの抑制**

回転を加えたときの乱流エネルギー  $K$  の生成率,  $P_K$ , と回転のないときの生成率  $P_{Kref}$  との間の差は

$$\delta P_k = P_K - P_{Kref} \cong -\gamma \Omega \cdot J = -C_\gamma \frac{K}{\varepsilon} W J^z \Omega \quad (41)$$

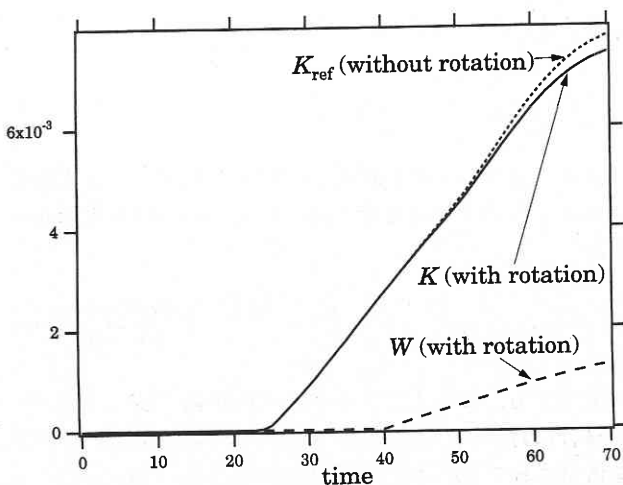


図4 KとWの時間発展

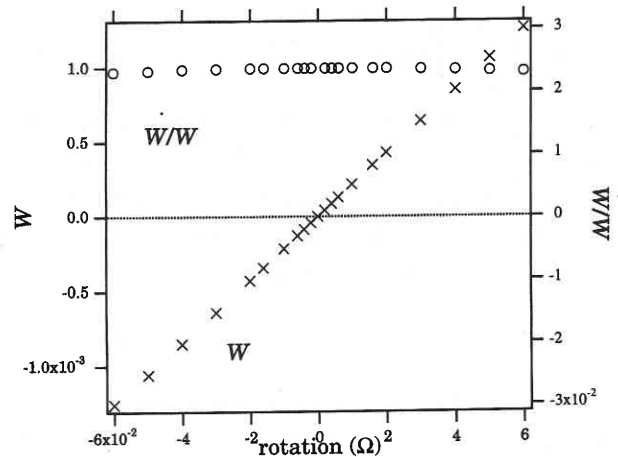


図5 Wの生成

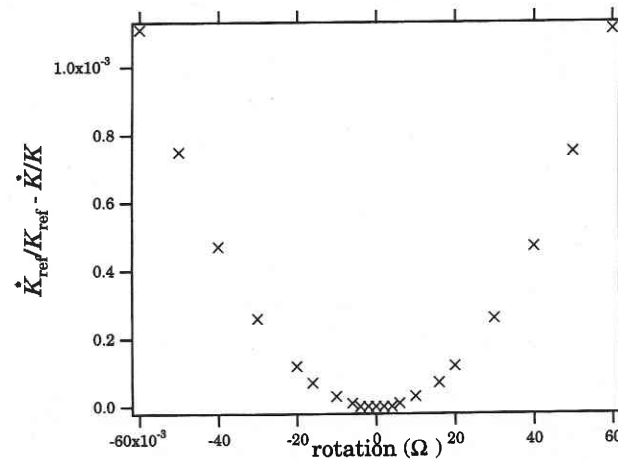


図6 Kの抑制率

で表される. クロス・ヘリシティ  $W$  が  $\Omega$  に比例することを考えると  $K$  の生成率の変化は  $\Omega^2$  に比例することが予想される. 相対的な  $K$  の変化率を回転に対してプロットすると図6のようになる.

**規格化されたクロス相関**

定常状態でのクロス・ヘリシティ・ダイナモの解として (32) または (33) という形の解が期待される<sup>10), 11)</sup>. したがって比例係数の  $\gamma/\beta$  あるいは  $W/K$  [式 (13) と (14) を参照] はクロス・ヘリシティ・ダイナモにおいて最も重要な量の一つである. 図7に  $W/K$  の  $\Omega$  による変化を示す.  $W$  が  $\Omega$  に比例することから  $W/K$  もほぼ  $\Omega$  に

比例することがわかる。

**定常ダイナモ解との比較**

プラズマ回転によって磁場および電流密度が変化する。この変化はクロス・ヘリシティ・ダイナモの作用で生成された磁場によるものと考えることができる。回転のない場合と比べた電流密度  $J^z$  の変化分  $\delta J^z (= J^z - J^z_{ref})$  と式 (33), (13), (14) で与えられる定常ダイナモ解

$$J^z_{ind} = \frac{C_\gamma}{C_\beta} \frac{W}{K} \Omega \tag{42}$$

を比較したのが図 8 である。両者の間には約 2 倍の差があるがどちらも  $\Omega^2$  則に従うことがわかる。一致しない理由としては、式 (33) は本来定常状態での解であること、また式 (26) で与えられるモデル定数が完全には最適化されていないこと、などが考えられる。

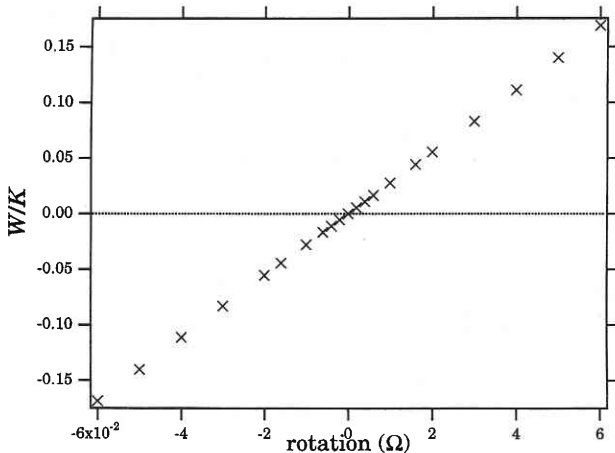


図 7 規格化されたクロス相関  $W/K$

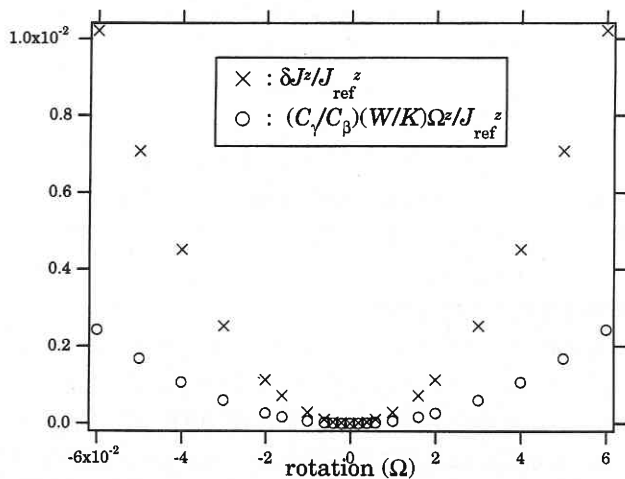


図 8 定常ダイナモ解  $J^z_{ind}$  [式 (42)] と回転により増加した電流  $\delta J^z$  の比較

**7. まとめと今後の課題**

**7.まとめ**

プラズマのポロイダル回転はポロイダル磁場と結びついて速度場と磁場のゆらぎのクロス相関である乱流クロス・ヘリシティを生成する。生成されるクロス・ヘリシティの符号は  $\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}$  の符号と一致し

$$\begin{cases} \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega} > 0 \rightarrow W > 0, \\ \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega} < 0 \rightarrow W < 0. \end{cases} \tag{43}$$

その生成率は渦度の大きさ  $\Omega$  に比例する。

ポロイダル回転が存在すると、その回転の向きによらず、クロス・ヘリシティの効果で乱流 MHD エネルギーは抑制される。エネルギー抑制率は回転の強さの二乗に比例する；

$$-\delta \left( \frac{K}{K} \right) \propto \Omega^2. \tag{44}$$

**7.2 今後の課題**

これまで見てきた回転 (38) はポロイダル方向の剛体回転であり、回転の効果を最もはっきりした形で見のに適していたとはいえ現実にトカマクなどの核融合装置で実現される流れから見れば特殊なものであった。そこで、残りの紙面ではもう少し現実に近い流れについて考察してみる。以下では (i) 変形速度を含む一般のポロイダル回転と (ii) トロイダル回転について述べる。

**変形速度を含む回転**

簡単のためトロイダル速度が動径  $r$  によらない ( $\partial U^z / \partial r = 0$ ) とすると変形速度テンソルは

$$\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & S & 0 \\ S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{45}$$

と書ける。ただしここで

$$S = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{U^\theta}{r} \tag{46}$$

である。渦度の大きさ  $\Omega = (1/r) (\partial / \partial r) (r U^\theta)$  と変形速度の大きさ  $S$  を用いて変形速度のゼロからのずれを表す尺度

$$N(r) = \left( \frac{2S}{\Omega + S} \right)^2 = \left\{ 1 - \left( \frac{U^\theta}{r} \middle/ \frac{\partial U^\theta}{\partial r} \right) \right\}^2 \tag{47}$$

を導入する。これまで見てきた剛体回転 (38) は  $N = 0$  の場合に対応する。様々な  $N$  の値について乱れの抑制率を考察することができる。例えば

$$U^\theta(r) = U_a \frac{r}{a} - U_1 \frac{r(a-r)}{a^2} \sin \frac{2\pi r}{a} \quad (48)$$

というポロイダル速度場について  $N(r)$  の分布を計算する。このとき乱れ抑制率が  $N=0$  すなわち (38) の回転の場合からどれだけ変化するかその分布を調べる。両者の分布を比較することは興味深いことであろう。

### トロイダル回転とトロイダル性

実際の核融合装置は円筒状ではなくトーラス状である。プラズマのトロイダル回転の効果を調べるにあたってはこのトロイダル性 (toroidicity) を何らかの形で考慮に入れる必要がある。トロイダル性のため、トロイダル磁場はもはや空間的に一様ではなく ( $\partial B_z / \partial r \neq 0$ )、プラズマ大半径が小さい側でトロイダル磁場は大きく (High-Field Side: 高磁場側)、大半径が大きい側ではトロイダル磁場は小さくなる (Low-Field Side: 低磁場側)。円筒座標のままトロイダル性を摂動的に取り入れる場合トロイダル磁場は第一近似で

$$B^z(r, \theta) = \frac{B_0}{1 + (r/R) \cos \theta} \quad (49)$$

のようになる。一方、プラズマのトロイダル回転は通常核融合装置に中性粒子ビームを入射することで与えられるが、式 (49) のような磁場配位に対して、中心 ( $r=0$ ) で最大で端に近づくにしたがって減少するようなトロイダル回転、例えば

$$U^z(r) = U_0 \exp \left\{ - \left( \frac{r}{l} \right)^2 \right\} \quad (50)$$

を付加することを考えよう (図 9)。ただし  $l$  は入射ビームの拡がりに対応する。すると低磁場 (LF) 側と高磁場 (HF) 側で異なった効果が生じる;

$$\begin{cases} \frac{\partial B^z}{\partial r} < 0, \frac{\partial U^z}{\partial r} < 0 \rightarrow \frac{\partial B^z}{\partial r} \frac{\partial U^z}{\partial r} > 0, & \text{(LF)} \\ \frac{\partial B^z}{\partial r} > 0, \frac{\partial U^z}{\partial r} < 0 \rightarrow \frac{\partial B^z}{\partial r} \frac{\partial U^z}{\partial r} < 0. & \text{(HF)} \end{cases} \quad (51)$$

つまり低磁場 (LF) 側では正の乱流クロス・ヘリシティ生成されるのに対して高磁場 (HF) 側では負のクロス・ヘリシティが生成される。実際のトーラス・プラズマでは LF 側と HF 側で様々な非対称性が観測されているが<sup>17)</sup>、これらを上記のクロス・ヘリシティの非対称性という観点から捉え直すことは面白い題材を提供するであろう。

(1996年10月17日受理)

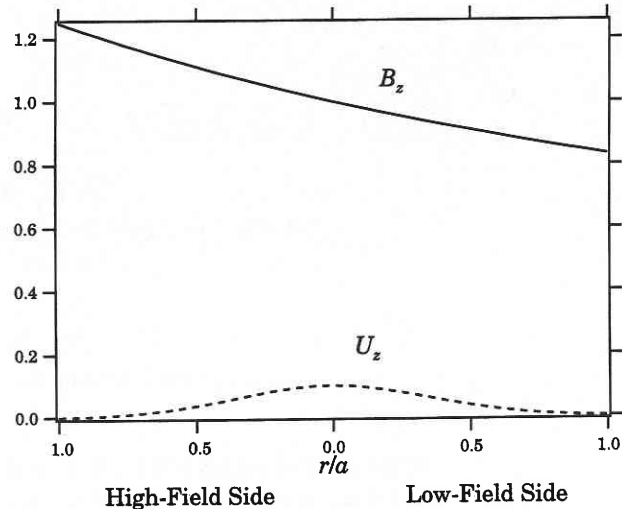


図 9 トロイダル磁場とトロイダル回転の動径方向分布

### 参考文献

- 1) E. N. Parker, *Cosmical Magnetic Fields* (Clarendon Press, Oxford, 1979).
- 2) R. D. Stambaugh et al., *Phys. Fluids B* **2**, 2941 (1990).
- 3) C. L. Rettig et al., *Phys. Fluids B* **5**, 2428 (1993).
- 4) A. Yoshizawa and N. Yokoi, *J. Phys. Soc. Jpn* **60**, 2500 (1991).
- 5) N. Yokoi and A. Yoshizawa, *Phys. Fluids A* **5**, 464 (1993).
- 6) H. K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge U. P., Cambridge, 1978).
- 7) F. Krause and K.-H. Rädler, *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory* (Pergamon Press, Oxford, 1980).
- 8) A. Yoshizawa and N. Yokoi, *Phys. Plasmas* **3**, 3604 (1996).
- 9) A. Yoshizawa, *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **45**, 129 (1993).
- 10) A. Yoshizawa and N. Yokoi, *Astrophys. J.* **407**, 540 (1993).
- 11) N. Yokoi, *Astron. Astrophys.* **311**, 731 (1996).
- 12) F. Hamba, *Phys. Fluids A* **4**, 441 (1992).
- 13) N. Yokoi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **65**, 2353 (1996).
- 14) C. G. Speziale, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23**, 107 (1991).
- 15) A. Yoshizawa, *Phys. Fluids B* **2**, 1589 (1990).
- 16) A. Yoshizawa, *J. Phys. Soc. Jpn.* **65**, 72 (1996).
- 17) B. Lipschultz, B. LaBombard, E. S. Marmor, M. M. Pickrell, J. L. Terry, R. Watterson, S. M. Wolfe, *Nucl. Fusion* **24**, 977 (1984).