

## 不安定成層乱流におけるエネルギー、温度強度スペクトル

The Energy and Thermal-Intensity Spectra  
for a Unstable-Stratified Turbulent Flow

岡本正芳\*

Masayoshi OKAMOTO

## 1. 序 論

現実の流れ場を解析し研究する際に、重力と温度差から生じる浮力の効果が重要になるケースは少なくない。しかし、浮力下の流れ場にチャンネル流やグリッド乱流を用いて最適化された標準的な乱流モデルを適用し解析を行うと、逆勾配拡散現象<sup>1)</sup>を再現できないなどの破綻が生じることが知られてきた。そのため、これらの浮力特有の効果を表現できる乱流モデルを開発することは非常に重要な意味を持っている。本研究では浮力下の乱流モデル研究の基礎となる乱流エネルギーや温度強度スペクトルに関する理論的研究の成果を報告する。

浮力下の流れ場のスペクトルに関しては、不安定成層乱流に対して2つの理論的研究がなされてきた。一つは Bolgiano<sup>2), 3)</sup>が、コルモゴロフの相似仮説<sup>4)</sup>を用いて

$$E(k) \propto P_{K_\theta}^{2/5} (\alpha g)^{4/5} k^{-11/5}, \quad (1)$$

$$E_\theta(k) \propto P_{K_\theta}^{4/5} (\alpha g)^{-2/5} k^{-7/5}, \quad (2)$$

( $k$ は波数,  $P_{K_\theta}$ は温度強度の生成率である。) というエネルギー及び温度強度スペクトルを提案している。もう一つは Shur による大気乱流の観測結果<sup>5)</sup>に対する説明として、Lumely が浮力小領域 (buoyancy subrange: 浮力効果が支配的なスケール帯) でのエネルギー輸送率と浮力項の釣り合いを考え

$$E(k) = C e^{2/3} k^{-5/3} + C' \alpha g \frac{\partial \theta}{\partial z} k^{-3}, \quad (3)$$

が導出している<sup>6)</sup>。(C及びC'は次元解析のため決定できない定数であるが、釣り合いの条件からCは正值として

いる。また、不安定成層乱流では平均温度勾配  $\partial \theta / \partial z$  は正の値を取る。) さらに、Phillips は Lumely の理論から得られるエネルギー輸送率を用いて、温度強度スペクトル

$$E_\theta(k) \propto k^{-1}, \quad (4)$$

を導いている<sup>7)</sup>。

一方、近年の実験や観測等から不安定成層流のスペクトルに関しても、 $E(k)$ ,  $E_\theta(k)$ 共に波数の-3乗に比例するような浮力小領域の存在が確認されてきた<sup>8)</sup>。しかし、未だこれらのスペクトルに関する理論的説明は与えられておらず、本研究では乱流統計理論の一つである2スケール直接相関近似 (TSDIA)<sup>9)</sup>を適用して、不安定成層乱流でのスペクトル表現を導出する。

## 2. 基礎方程式

浮力下の流れ場を支配する方程式として、非圧縮的な取り扱いが可能なブシネスク方程式は

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \alpha g_i \theta, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta u_j}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (7)$$

のように書き表せる。ここで、 $u_i$ は速度、 $\theta$ は温度、 $p$ は圧力、 $g_i$ は重力加速度  $(0, 0, -g)$ 、 $\nu$ は動粘性率、 $\kappa$ は温度伝導率、 $\alpha$ は体膨張率である。

ブシネスク方程式 (5)-(7) はアンサンブル平均を取ることにより、平均場の方程式

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} - \alpha g_i \Theta, \quad (8)$$

\*東京大学生産技術研究所 第2部

研究速報

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + U_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial H_j}{\partial x_j}, \quad (10)$$

が得られる。(大文字は平均量を意味する。)ここで、 $R_{ij}$ と $H_j$ は揺らぎの速度や温度の2体相関によって表現されるレイノルズ応力と温度フラックスであり、その定義は

$$R_{ij} \equiv -\langle u'_i u'_j \rangle, \quad (11)$$

$$H_j \equiv -\langle u'_j \theta' \rangle, \quad (12)$$

となる。(ダッシュの付いた量は揺らぎの量を意味する。)平均量を用いてこれらをモデル化することが式(8)-(10)の方程式系に対して数値解析を実行するには必要となる。

一方、式(5)-(7)と式(8)-(10)の差から揺らぎの場に関する方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial (u'_i u'_j + R_{ij})}{\partial x_j} \\ = \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} - \alpha g_i \theta', \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + U_j \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \frac{\partial (u'_j \theta' + H_j)}{\partial x_j} + \kappa \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (15)$$

が導かれる。本研究ではこの方程式に対してTSDIA解析を適用する。

乱流エネルギーと温度強度およびそれらのスペクトルは

$$K \equiv \frac{1}{2} \langle u'_j u'_j \rangle = \int dk E(k) \quad (16)$$

$$K_\theta \equiv \frac{1}{2} \langle \theta' \theta' \rangle = \int dk E_\theta(k), \quad (17)$$

で表現される。浮力の影響がない乱流場の慣性領域では、これらのスペクトル(16)、(17)は

$$E(k) = 1.50 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (18)$$

$$E_\theta(k) = 0.415 \varepsilon_\theta \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3}, \quad (19)$$

となる。ここで $\varepsilon$ と $\varepsilon_\theta$ は乱流エネルギーと温度強度の散逸率

$$\varepsilon \equiv \nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle, \quad (20)$$

$$\varepsilon_\theta \equiv \kappa \left\langle \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right\rangle, \quad (21)$$

である。

また、式(13)-(15)より乱流エネルギーと温度強度の輸送方程式は

$$\frac{DK}{Dt} = P_K - \varepsilon + D_K + B, \quad (22)$$

$$\frac{DK_\theta}{Dt} = P_{K_\theta} - \varepsilon_\theta + D_{K_\theta}, \quad (23)$$

となり、それぞれ $K$ の生成項 $P_K$ 、拡散項 $D_K$ 、浮力項 $B$ 、 $K_\theta$ の生成項 $P_{K_\theta}$ 、拡散項 $D_{K_\theta}$ である：

$$P_K = R_{jm} \frac{\partial U_j}{\partial x_m}, \quad (24)$$

$$D_K = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \langle u'_j u'_m u'_m \rangle + \langle u'_j p' \rangle - \nu \frac{\partial K}{\partial x_j} \right), \quad (25)$$

$$B = \alpha g_j H_j, \quad (26)$$

$$P_{K_\theta} = H_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j}, \quad (27)$$

$$D_{K_\theta} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \langle \theta'^2 u'_j \rangle - \kappa \frac{\partial K_\theta}{\partial x_j} \right). \quad (28)$$

### 3. TSDIA 理論解析

式(13)-(15)に対して、主に遅い変数 $(X, T)$ に依存すると考えられる平均成分 $F$ と速い変数 $(\mathbf{x}, t)$ にも強く依存する揺らぎの成分 $f'$ に変数分離を行う。

$$f = F(\mathbf{X}, T) + f'(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t, T). \quad (29)$$

速い変数に関して、平均流に乗った座標系でのフーリエ変換

$$f'(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t, T) = \int d^3 \mathbf{k} f(\mathbf{k}, \mathbf{X}, t, T) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}t}, \quad (30)$$

を適用する。遅い変数と浮力項に対して摂動論的な取り扱いを施し、速度場と温度場に関してそれぞれグリーン関数 $G_{ij}(\mathbf{k}, t, t')$ 、 $G_\theta(\mathbf{k}, t, t')$ を導入して形式的に解くと、速度場と温度場の解は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
u_i(\mathbf{k}, t) &= u_{i,0,0}(\mathbf{k}, t) \\
&- \int_{-\infty}^t ds G_{ij}(\mathbf{k}, t, s) \alpha_{g_j} \theta_{0,0}(\mathbf{k}, s) \\
&- \int_{-\infty}^t ds G_{ij}(\mathbf{k}, t, s) \frac{Du_{j,0,0}(\mathbf{k}, s)}{DT} \\
&- \int_{-\infty}^t ds G_{ij}(\mathbf{k}, t, s) \frac{\partial U_j}{\partial X_m} u_{m,0,0}(\mathbf{k}, s) \\
&+ \int_{-\infty}^t ds \int_{-\infty}^s ds' G_{ij}(\mathbf{k}, t, s) G_{jm}(\mathbf{k}, s, s') \alpha_{g_m} \frac{D\theta_{0,0}(\mathbf{k}, s')}{DT} \\
&+ \int_{-\infty}^t ds \int_{-\infty}^s ds' G_{ij}(\mathbf{k}, t, s) G_{mn}(\mathbf{k}, s, s') \alpha_{g_n} \frac{\partial U_j}{\partial X_m} \theta_{0,0}(\mathbf{k}, s') \\
&+ \int_{-\infty}^t ds \int_{-\infty}^s ds' G_{ij}(\mathbf{k}, t, s) G_{\theta}(\mathbf{k}, s, s') \alpha_{g_j} \frac{D\theta_{0,0}(\mathbf{k}, s')}{DT} \\
&+ \int_{-\infty}^t ds \int_{-\infty}^s ds' G_{ij}(\mathbf{k}, t, s) G_{\theta}(\mathbf{k}, s, s') \\
&\times \alpha_{g_j} \frac{\partial \theta}{\partial X_m} u_{m,0,0}(\mathbf{k}, s'), \quad (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta(\mathbf{k}, t) &= \theta_{0,0}(\mathbf{k}, t) \\
&- \int_{-\infty}^t ds G_{\theta}(\mathbf{k}, t, s) \frac{D\theta_{0,0}(\mathbf{k}, s)}{DT} \\
&- \int_{-\infty}^t ds G_{\theta}(\mathbf{k}, t, s) \frac{\partial \theta}{\partial X_j} u_{j,0,0}(\mathbf{k}, s) \\
&+ \int_{-\infty}^t ds \int_{-\infty}^s ds' G_{\theta}(\mathbf{k}, t, s) G_{jm}(\mathbf{k}, s, s') \\
&\times \alpha_{g_m} \frac{\partial \theta}{\partial X_j} \theta_{0,0}(\mathbf{k}, s'), \quad (32)
\end{aligned}$$

ここで、 $u_{m,0,0}$  や  $\theta_{0,0}$  は浮力の影響しない一様等方場の解に対応する。また、式 (31)、(32) で揺らぎ量の 2 体以上からなる非線形項は複雑になるのを避けるため無視した。(さらに詳細な TSDIA 理論解析は文献 10, 11 に譲る。) 式 (31)、(32) を用いて、エネルギー、温度強度スペクトルは

$$\begin{aligned}
E(k) &= 4\pi k^2 Q(k, t, t) \\
&- 4\pi k^2 \int_{-\infty}^t ds G(k, t, s) \frac{DQ(k, t, s)}{DT} \\
&+ \frac{8\pi}{3} \alpha_{g_j} \frac{\partial \theta}{\partial X_j} k^2 \int_{-\infty}^t ds \int_{-\infty}^s ds' G(k, t, s) \\
&\times G_{\theta}(k, s, s') Q(k, t, s'), \quad (33)
\end{aligned}$$

$$E_{\theta}(k) = 2\pi k^2 Q_{\theta}(k, t, t)$$

$$\begin{aligned}
&- 2\pi k^2 \int_{-\infty}^t ds G_{\theta}(k, t, s) \frac{DQ_{\theta}(k, t, s)}{DT} \\
&+ \frac{8\pi}{3} \alpha_{g_j} \frac{\partial \theta}{\partial X_j} k^2 \int_{-\infty}^t ds \int_{-\infty}^s ds' G_{\theta}(k, t, s) \\
&\times G(k, s, s') Q_{\theta}(k, t, s'), \quad (34)
\end{aligned}$$

と表される。

#### 4. 結 果

TSDIA 理論から得られたスペクトル表現 (33)、(34) に対し、最低次に一様等方乱流場のスペクトル (18)、(19) を仮定すると

$$\begin{aligned}
E(k) &= 1.51 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} - 0.901 \varepsilon^{-2/3} k^{-7/3} \frac{D\varepsilon}{Dt} \\
&+ 1.10 \alpha_{g_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} k^{-3}, \quad (35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\theta}(k) &= 0.415 \varepsilon_{\theta} \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3} - 0.380 \varepsilon^{-2/3} k^{-7/3} \frac{D\varepsilon_{\theta}}{Dt} \\
&+ 0.175 \varepsilon_{\theta} \varepsilon^{-5/3} k^{-7/3} \frac{D\varepsilon}{Dt} \\
&+ 0.603 \alpha_{g_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\varepsilon_{\theta}}{\varepsilon} k^{-3}, \quad (36)
\end{aligned}$$

というスペクトル表現が導出される。ここで、両スペクトルに現れる  $D/Dt$  関連項は既に吉澤により指摘された流れ場の非平衡性による効果を表している<sup>12)</sup>。本研究では浮力効果を強調する目的から非平衡効果を無視すると、式 (35)-(36) は

$$E(k) = 1.51 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} + 1.10 \operatorname{sgn}(\Phi) \varepsilon^{2/3} k_b^{4/3} k^{-3}, \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
E_{\theta}(k) &= 0.415 \varepsilon_{\theta} \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3} \\
&+ 0.603 \operatorname{sgn}(\Phi) \varepsilon_{\theta} \varepsilon^{-1/3} k_b^{4/3} k^{-3}, \quad (38)
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$k_b = \varepsilon^{-1/2} |\Phi|^{4/3}, \quad (39)$$

$$\Phi = \alpha_{g_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}, \quad (40)$$

であり、 $k_b$  は浮力小領域を特徴付けている波数で、 $\operatorname{sgn}(\Phi)$  は  $\Phi$  の正負の符号を意味する。本解析の定義では安定成層で  $\Phi < 0$ 、不安定成層で  $\Phi > 0$  となり、スペクトル (37)-(38) が現実性 (realizability) を満足する場合は不安定成層時に限られる。結果として、本理論からは浮力小

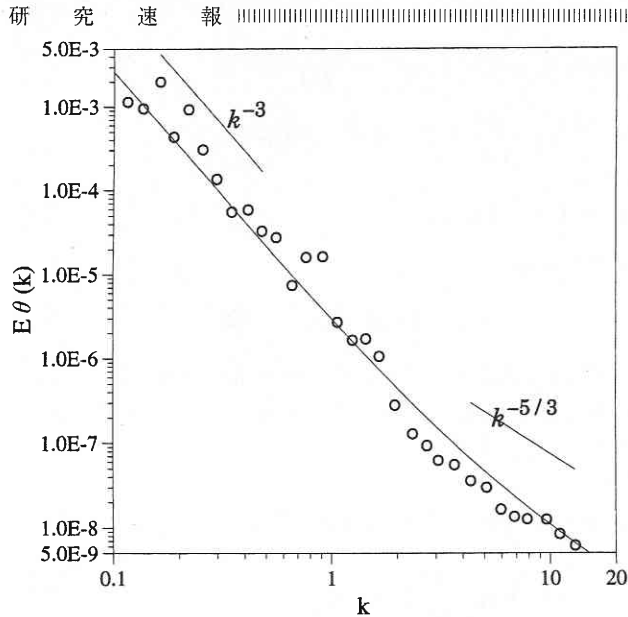


Fig. 1 温度強度スペクトル。○は Kotsovinos の実験データ，実線は理論値。

領域  $k_c (= K^{3/2} \varepsilon^{-1}) < k < k_b$  で  $E(k)$  と  $E_\theta(k)$  の両者が  $k^{-3}$  に比例するという結論が導出された。式 (38) と Kotsovinos の実験結果<sup>8)</sup>との比較が Fig. 1 にあてられているが，本理論は実験結果を十分に再現している。

次に，Lumley と Phillips が行ったスペクトル方程式での釣り合いを考える観点<sup>6), 7)</sup>から，この結果を再考してみる。波数空間でのエネルギー輸送率と浮力項の釣り合いは

$$\frac{\partial \varepsilon(k)}{\partial k} \approx \alpha g_j h_j(k), \quad (41)$$

となる。ここで， $\varepsilon(k)$  と  $h_j(k)$  は散逸率と温度フラックスのスペクトル表現である。本来，TSDIA 理論では平均場の影響の強いエネルギー供給領域付近での解析やモデルの開発を行うことを目的とするため，式 (18)，(19) のように散逸率に関しては間欠性を表現するような波数依存性は無視してきた。しかし，ここでは近似的に

$$\varepsilon = \int dk \frac{\partial \varepsilon(k)}{\partial k} \approx \varepsilon(k) \quad (42)$$

という関係を導入して，次元解析のレベルで議論を進める。この近似下で，TSDIA の結果から  $h_j(k)$  は

$$h_j(k) = 0.658 E_\theta(k) \varepsilon^{-2/3}(k) k^{-7/3} \alpha g_j + 0.921 \varepsilon^{1/3}(k) k^{-7/3} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}, \quad (43)$$

と表現される。第 2 項は温度場での標準的な勾配拡散近似に対応し，それを式 (41) に導入して  $\varepsilon(k)$  に関して解くと

$$\varepsilon(k) \approx \varepsilon_0 \left( \frac{k}{k_b} \right)^{-2}, \quad (44)$$

が得られる。これにより浮力小領域で  $k^{-3}$  に比例するスペクトルが現れる。(第 1 項を導入すると重力の 2 乗となりブシネスク方程式導出の際の仮定と矛盾する。) 一方，温度強度のスペクトルに関する方程式では式 (43) の第 2 項のような勾配拡散型の温度フラックスでは散逸率を通してしか浮力の影響は入らないため，Phillips の理論のように  $k^{-1}$  のスペクトルが現れる。しかし，本解析では式 (43) の第 1 項が生成項の中で直接的な浮力効果を発生させ，

$$\frac{\partial E_\theta(k)}{\partial k} \approx 0.658 E_\theta(k) \varepsilon^{-2/3}(k) k^{-7/3} \alpha g_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j}, \quad (45)$$

という釣り合い関係が成立する。この方程式は係数に依存すべき則が決まる。以上の議論は完全に TSDIA 理論と対応する訳ではないが，温度強度のスペクトルに  $k^{-3}$  が現れることは温度フラックスのモデル表現として，勾配拡散型近似の他に重力に比例する項の重要性を示唆するものと考えられる。(著者は既に文献 10)において，この項により温度剪断流での逆勾配拡散現象を再現できるモデルを提案している。)

(1996年10月14日受理)

#### 参考文献

- 1) D. J. Bergstrom, G. D. Stubbley and A. B. Strong: ASHRAE Trans. Res. 99(1993)422.
- 2) R. Bolgiano: J. Geophys. Res. 64(1959)2226.
- 3) R. Bolgiano: J. Geophys. Res. 67(1962)3015.
- 4) A. N. Kolmogorov: CR Acad. Sci. USSR. 30(1941)301.
- 5) G. N. Shur: Trudy 43(1962)79. [Trans. as AID Report T-63-55 aerospace Info. Div. Lib. Cong.].
- 6) J. L. Lumley: J. Atmos. Sci. 21(1964)99.
- 7) O. M. Phillips: International Colloquium on the Fine-Scale Structure of the Atmosphere and its Relation to Radio Wave Propagation (Moscow, 1965)121.
- 8) N. E. Kotsovinos: Phys. Fluids A 3(1991)163.
- 9) A. Yoshizawa: Phys. Fluids 27(1984)1377.
- 10) M. Okamoto: J. Phys. Soc. Jpn. 65(1996)2044.
- 11) M. Okamoto: J. Phys. Soc. Jpn. 65(1996)3193.
- 12) A. Yoshizawa: Phys. Rev. E 49(1994)4065.