特集 13
研究速報

直円管内旋回乱流の数値解析
(k-ε, k-ε-h, 応力モデルと実験値間の比較検討)

Study of a turbulent swirling flow in a straight pipe.
(Comparison of the numerical results by k-ε, k-ε-h, and Reynolds-stress models with experimental data.)

西島勝一*
Shoiti NISIZIMA

1. はじめに

工学的研究における乱流の数値解析において，計算時間が短く構造が比較的簡単なために現在k-εモデルが最も多く用られているが，このモデルはレイノルズ応力の等方的渦粘性表現を基礎としているため，工学上重要な乱流の解析において的確な予測の出来ない場合が少なくない．例えば，直円管内旋回乱流の解析では次の実現象の再現が出来ない．

1．軸方向流速の管中心領域での減速現象．
2．周方向流速や乱流エネルギー値の管中心領域での立ち上がり現象．
3．旋回強度の下流方向への減衰傾向．

モデルの簡単さと計算時間の少なさを維持しつつk-εモデルの欠点を改善する事は有益なことであり，今まで幾つかの改善が試みられてきている[1),2)]．本論文では，実験値や応力モデルによる数値解析結果[3)]とk-ε-hモデル[4)]やk-εモデル[5)]による結果を比較検討し，モデルの問題点と改良方向を論議する．

2. k-εモデルとヘリシテイ方程式

2.1 長野—田川モデル

速度，圧力（密度で割ったもの）の平均部分とそれからのずれの擾乱部分をそれぞれ $(\bar{v}, \bar{p})$ と (v', p') で表すと，三次元非圧縮・粘性流体に対する平均部分の方程式は，

$$\frac{D\bar{v}_\alpha}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_a \frac{\partial}{\partial x_a}\right)\bar{v}_\alpha = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_a}\left(R_{a\alpha} + \nu \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_a}\right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_a}{\partial x_a} = 0, \quad (2)$$

で与えられる（アルファベットの下付き添字については1から3まで和を取ることとする）．ここで，ν は動粘性率，$R_{\alpha\beta}$ はレイノルズ応力で擾乱場の基本的統計量として乱流エネルギーkとエネルギー散逸率 ε を選び（長野—田川モデル[5)]では）次の通り表す：

$$R_{\alpha\beta} \equiv -\langle v'_\alpha v'_\beta \rangle = -\frac{2}{3}k\delta_{\alpha\beta} + \nu_t\left(\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha}\right), \quad (3)$$

$$\nu_t = C_\nu f_\nu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad f_\nu = \left\{1 - \exp\left(\frac{-y^+}{26}\right)\right\}^2 \left\{1 + \left(\frac{4.1}{R_t^{3/4}}\right)\right\},$$

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}, \quad u_\tau = \sqrt{\nu \frac{\partial \bar{v}_{to}}{\partial r}},$$

$$\bar{v}_{to} = \sqrt{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_\theta^2}, \quad R_t = \frac{k^2}{\nu\varepsilon} \quad (4)$$

ここで<>はアンサンブル平均を表し，yは壁からの距離，u_τ は壁面摩擦速度である．この式は次のk，ε方程式と連立させる事により解くことが出来る．

$$\frac{Dk}{Dt} = R_{ab}\frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_a}\left\{\left(\nu + \frac{\nu_t}{C_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_a}\right\}, \quad (5)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}R_{ab}\frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - C_{\varepsilon 2} f_\varepsilon \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_a}\left\{\left(\nu + \frac{\nu_t}{C_{\varepsilon 3}}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a}\right\}, \quad (6)$$

$$f_\varepsilon = \left\{1 - \exp\left(\frac{-y^+}{6}\right)\right\}^2 \left[1 - 0.3\exp\left\{-\left(\frac{R_t}{6.5}\right)^2\right\}\right] \quad (7)$$

各定数は，次の通り最適化されている．

$$C_\nu = 0.09,\ C_k = 1.4,\ C_{\varepsilon 1} = 1.45,\ C_{\varepsilon 2} = 1.9,\ C_{\varepsilon 3} = 1.3 \quad (8)$$

*東京大学生産技術研究所　第1部

2.2 ヘリシテイ3方程式モデル

横井と吉澤は，旋回の効果がヘリシテイを通してレイノルズ応力に反映される3方程式モデルを提案している[4]．渦度とその擾乱部分を $\overline{\omega}, \omega'$ としヘリシテイを，

$$h \equiv \langle v'_a \omega'_a \rangle, \tag{9}$$

とすると，その輸送方程式は次の通り導出されている：

$$\frac{Dh}{Dt} = R_{ab}\frac{\partial \overline{\omega}_b}{\partial x_a} - \overline{\omega}_a \frac{\partial R_{ab}}{\partial x_b} - C_{h1} f_v \frac{\varepsilon}{k} h + \frac{\partial}{\partial x_a}\left\{\left(\nu + \frac{\nu_t}{C_{h2}}\right)\frac{\partial h}{\partial x_a} + k\overline{\omega}_a\right\}。 \tag{10}$$

ヘリシテイ方程式の追加に伴い，式（3）のレイノルズ応力は，

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{2}{3}k\delta_{\alpha\beta} + \nu_t\left(\frac{\partial \overline{v}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \overline{v}_\beta}{\partial x_\alpha}\right) - \eta_1\left(\overline{\omega}_\alpha \frac{\partial h}{\partial x_\beta} + \overline{\omega}_\beta \frac{\partial h}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\overline{\omega}_a \frac{\partial h}{\partial x_a}\delta_{\alpha\beta}\right)$$

$$\eta_1 = C_{\eta 1}\nu_t^2/\varepsilon, \tag{11}$$

と新しい項が加わり，定数は次の値を用いている：

$$C_{\eta 1} = 0.1 \sim 0.2,\ C_{h1} = 1,\ C_{h2} = 1.8。 \tag{12}$$

3. 直円管内旋回乱流への適用

3.1 円柱座標系と流れ関数の導入

図1で表される円柱座標系を採用し，流量等の誤差を少なくするために流れ関数を導入して解析を行った：

$$\omega_\theta = -\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\psi,$$

$$\overline{v}_x = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r},\ \overline{v}_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x}。 \tag{13}$$

3.2 境界条件および計算方法

壁上では，滑り無し条件を用い，

$$\overline{v}_x = \overline{v}_r = \overline{v}_\theta = \mathrm{k} = 0,\ \varepsilon = \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial k}{\partial r}\right),\ \mathrm{h} = 0, \tag{14}$$

とした．管中心では，

$$\overline{v}_r = \overline{v}_\theta = 0,\ \frac{df}{dr} = 0\,(f = \overline{v}_x, k, \varepsilon, h),\ \frac{F}{r} \approx \frac{F}{r'}, \tag{15}$$

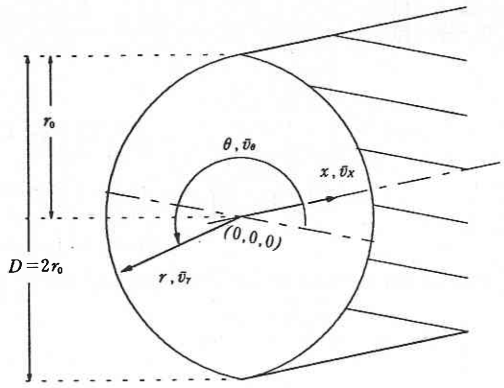

図1　直円管内旋回乱流の座標

を適用した．格子配置は軸方向に等間隔で100点，半径方向は管壁および管軸近傍を比較的細かくして62点を不等間隔に置いた．円周方向には各統計量は変化しないと仮定した．

時間差分の解法は安定性を重視して Crank-Nicolson スキームを用い，空間差分精度は移流項のみ1次風上で,他は中心差分とした．

4. 解析結果と検討

4.1 解析対象

解析対象としては，詳細な実験[6]結果が得られており，それに対応する応力モデルによる数値解析[3]も行われている以下の場合を採用した．

$$R_e = \frac{V_m 2r_0}{\nu} = 50000 \tag{16}$$

$$\Omega = 2\pi\rho\int_0^{r_0}\frac{\overline{v}_x\overline{v}_\theta r^2}{\rho\pi r_0^3 V_m^2}dr = 0.24\ (\text{計算入口：実験 } x/r_0 = 12.3),$$

$$\Omega = 0.18\ (\text{計算中間：実験 } x/r_0 = 25.7)$$

$$\Omega = 0.12\ (\text{計算出口：実験 } x/r_0 = 39) \tag{17}$$

ここで，V_m は断面平均流速，r_0 は円管の半径，ρ は流体の密度である．

本論文では，実験結果で示されている，円管中心領域での $\overline{v}_x$ の減速現象，円管中心領域での $\overline{v}_\theta$ 値の盛り上がりの持続，円管中心での k 値の立ち上がり継続，Ω の減衰傾向再現，管壁近くでの対数速度則の再現等の旋回乱流の特徴について検討を加える．

4.2 円管中心領域での $\overline{v}_x$ の減速現象

図2に $\overline{v}_x$ の実験値[6]，応力モデルによる結果[3]（2重三角と2重四角印），k-ε-h モデル，k-ε モデル[5]と，管軸中

心近くだけ変化させる意味で k-ε モデルにおいてレイノルズ応力 $R_{r\theta}$ だけに $r^{3/2}$ を乗じた修正 k-ε モデル（図では Present と表示）による結果を示している．小林一依田[1]は，旋回乱流の解析にあたってレイノルズ応力の各成分を非等方にする事の必要性を強調したが，その示唆の正しいことが示されている．図 2 ～図 6 から k-ε-h モデルが管中心近くの R_{xr} を変化さ $\bar{v}_x$ を減速させているのに対して，修正 k-ε モデルでは $R_{r\theta}$ 値を修正し $\bar{v}_\theta$ や k 値を大きく変化させて $\bar{v}_x$ に影響を与えていることがわかる．

4.3 円管中心領域での $\bar{v}_\theta$ 値の盛り上がり

小林一依田の指摘通り，$R_{r\theta}$の修正が旋回流速の予測に重要であることが図 3，図 5 からわかる．k-ε-h や k-ε モデルの $R_{r\theta}$ が実験値と逆に大きな負値を示す原因は，r が小さいところで

$$R_{r\theta}=\nu_t\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\bar{v}_\theta}{r}\right),\quad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\bar{v}_\theta}{r}\right)\approx C_2+2C_3r+\cdots,\qquad (18)$$

中の剛体回転からのずれを示す C_2 が大きな負値を持つことによっている．修正 k-ε モデルはこれをカットしている．k-ε-h モデルによる結果は $\bar{v}_\theta$, k 値について k-ε モデルとほとんど変わらない．

4.4 円管中心での k 値の立ち上がり

図 6 から実験では下流においても r = 0 で k が（壁付近を除外すれば）最大値を示していることがわかる．応力モデルや修正 k-ε モデルは，k-ε モデル等に比べて，管中心領域の k 値を改善するが，実験値の管中心へ向かって立ち上がって行く傾向は再現できない．k-ε モデル等では管

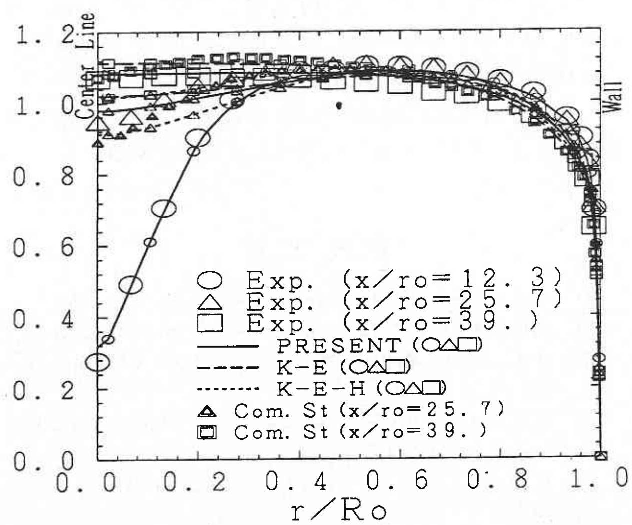

図 2 管軸方向流速 $\bar{v}_x/V_m$

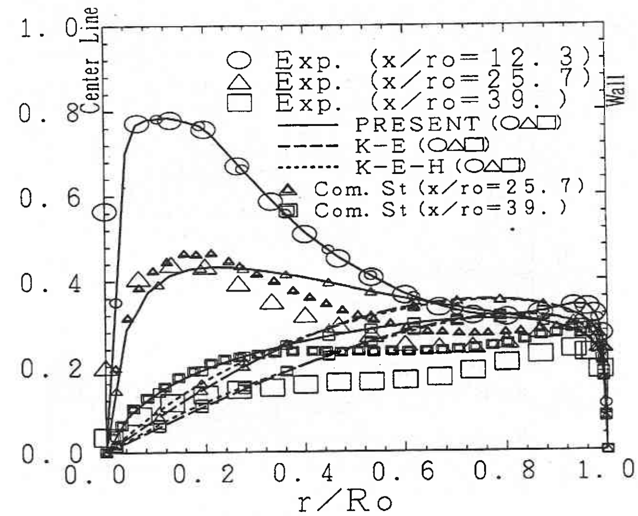

図 3 円周方向流速 $\bar{v}_\theta/V_m$

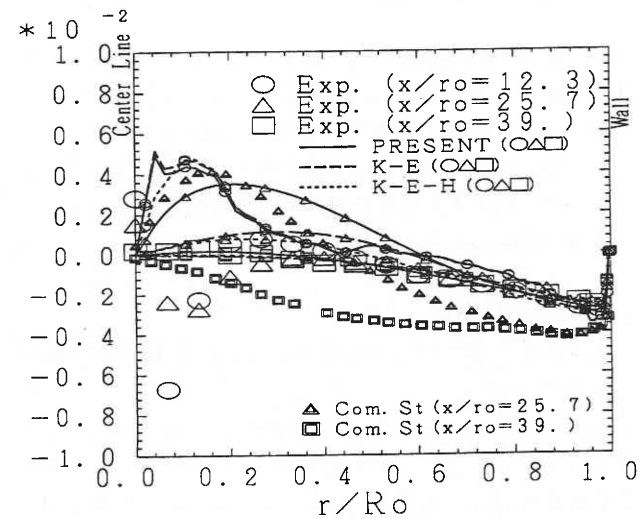

図 4 レイノルズ応力 $R_{xr}/V_m/V_m$

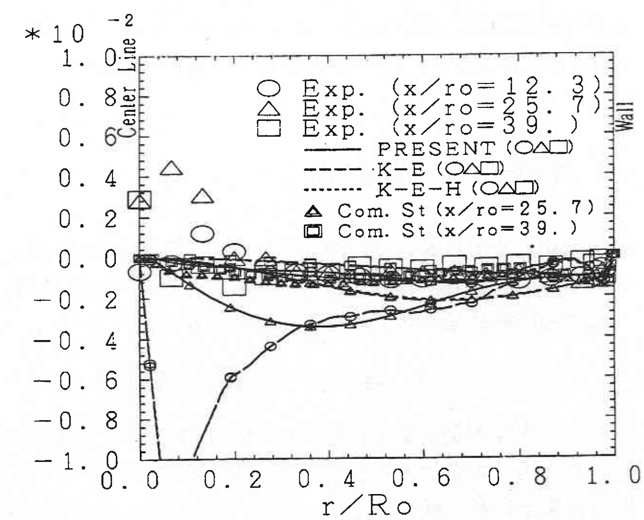

図 5 レイノルズ応力 $R_{r\theta}/V_m/V_m$

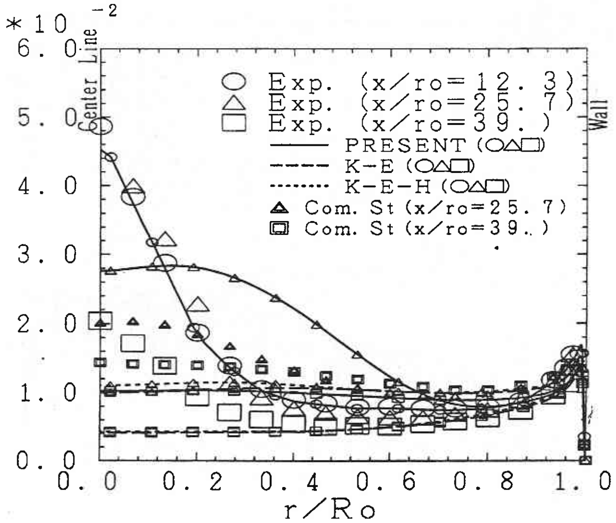

図 6　乱流エネルギー $k/V_m/V_m$

中心で拡散項が大きな役割を持ち，kのピークをならす方向に作用する．拡散項を打ち消すように（5）式にクロスデイフュージョン項を付加すればkの値は一定程度改善されるが，壁近くの対数速度則の再現に障害となることもわかった．円管中心部分の剛体回転が支配的な領域の扱いに工夫が必要である．

4.5　Ωの減衰傾向

図7から，各モデルとも実験で示されるΩの減衰線と大きな違いを示している．応力モデルの結果も，(17) 式から r が大きな領域の $\bar{v}_\theta$ 値の低下が Ω の減衰に大きく影響する事が推察され，図3より $r/r_0>0.5$ 領域の $\bar{v}_\theta$ が実験結果に比べ過大評価されてい点から，k-ε モデル等と同傾向にあると思われる．$R_{x\theta}$ や $R_{r\theta}$ を変化させても Ω の減衰傾向を改善できなかった．なお，応力モデルによる中央部から管壁に向かっての $\bar{v}_\theta$ の傾向は，実験のそれと良く似ている．

4.6　管壁近くでの対数速度則

実験結果からは旋回乱流においても，（4）の $\bar{v}_{to}$ について壁面近くで対数速度則が成り立っている事が報告されている．図8から，論議した各モデルとも壁近くの振る舞いはこの実験結果を良く再現している事がわかった．

5. 結　　論

直円管内旋回乱流を k-ε モデル，k-ε-h モデル，修正 k-ε モデルを用いて数値解析し，実験結果や応力モデルによる解析結果と比較，検討した．

その結果，旋回乱流の特性を再現するためにはレイノルズ応力の管中心付近の振る舞い，特に $R_{r\theta}$ が重要な役割を果たしている事がわかった．また，円管中心に向かって k 値が立ち上がって行く現象の再現には，管中央の剛体回転が支配的な領域の特性解明が必要と思われる．更に，旋回強度 Ω の減衰傾向再現には $r/r_0>0.5$ の $\bar{v}_\theta$ の振る舞いに注目する必要があることが示された．

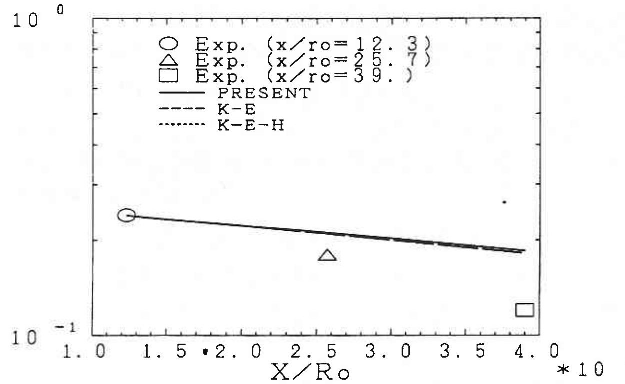

図 7　旋回の強さ Ω

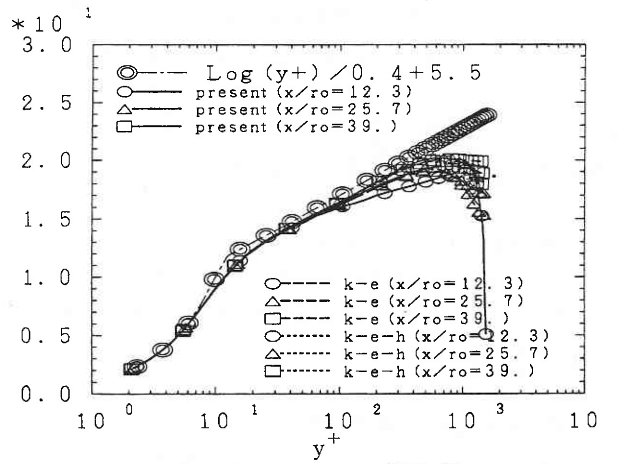

図 8　管壁近くの流速 $\sqrt{v_x^2+v_\theta^2}/u_\tau$

今後，これら旋回乱流の主特性に注目し,その特徴を表現できる k-ε モデルの改良は興味ある課題である．

(1996年10月 8 日受理)

参 考 文 献

1) 小林・依田，機論 B (1986)，52-481，pp. 3230-3236.
2) 西島・横井，機論 B (1992)，58-553，pp. 2714-2721.
3) 清水・吉田，第29回伝熱シンポ (1992)，A 234, pp. 385-386.
4) Yokoi, N. and Yoshizawa, A., Phys. Fluids A (1993), Vol. 5, pp. 464-473.
5) 長野・田川・新美，機論 B (1989)，55-512，pp. 1008-1015.
6) Kitoh, O., J. Fluid Mech. (1991), Vol. 225, pp. 445-479.