

特集 15
研究速報

低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルを用いた バックステップ流れの数値解析

Numerical Simulation of Backward-Facing-Step Flow
using a Low-Reynolds-Number $k-\varepsilon$ model

弘畑 幹鐘*・谷口 伸行*・小林 敏雄*

Mikikane HIROHATA; Nobuyuki TANIGUCHI and Toshio KOBAYASHI

1. はじめに

近年、乱流現象の数値予測に対しより高い精度が求められており、同時に複雑形状への適用も増えてきている。

時間平均乱流モデルにおいてはレイノルズ応力の輸送方程式を解く応力方程式モデル (RSM) が予測性能の点で優位であり、その研究は大きな進展を見せているものの、モデルの複雑さ、一般座標系への応用が難しさから工学的応用は未だ限定されている。

そのため実用面での乱流モデルの中心は $k-\varepsilon$ モデルあるいは代数応力モデル (ASM) である。標準 $k-\varepsilon$ モデルは壁面境界に壁関数を課すため剥離再付着を伴う流れ場において壁面付近の乱流統計量の予測には本来不向きであり、この場合乱流動粘性係数に修正関数を課して壁面挙動を再現する低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルを用いることになる。

本報では阿部ら¹⁾のモデル (ANKmodel) を用いてバックステップ流の数値解析を行い、低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルを複雑形状に適用する際の問題点を取り上げる。さらに修正関数を必要としない alternative なモデルとして $k-\nu^2$ モデル²⁾³⁾を紹介させていただく。

2. 基礎方程式とその概要

2.1 低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルについて

低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルは Jones-Launder 以来の古い歴史を持ち、多くの研究者によって研究がなされている。1981年以前に提案されたモデルに関しては patel⁴⁾による review があり、Lam-Bremhorst⁵⁾、Chien モデル等が最良とされている。しかし、これらのモデルはいずれも正しい壁面挙動を再現していないことも指摘されており、その後は乱流統計量の壁面漸近挙動の再現⁶⁾⁹⁾、特に近年は DNS データベースの結果を踏まえ、壁近傍の ε の挙動の再現に

*東京大学生産技術研究所 第2部

重点を置いたモデルの改良、提案⁷⁾が見られる。

2.2 基礎方程式

アンサンブル平均を施した非圧縮の連続の式、n-s 方程式、 k, ε の方程式を以下に示す。

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\bar{U}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) \quad (2)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \varepsilon \quad (3)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (f_1 C_1 P_k - f_2 C_2 \varepsilon) \quad (4)$$

$$P_k = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \quad (5)$$

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

$$\nu_t = f_\mu C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (7)$$

ここで

U_i : i 方向の平均速度, u_i : i 方向の速度変動, k, ε : 乱流エネルギーとその散逸率, ν_t : 乱流動粘性係数, $C_\mu, C_1, C_2, \sigma_k, \sigma_\varepsilon$: モデル定数, f_μ, f_1, f_2 : 修正関数, δ_{ij} : クロネッカーのデルタ

代表的な低レイノルズ数型モデルの例を表 1, 2 に示す。ANK モデルは NT モデルの改良モデルであり修正関数を用いる無次元距離 y^+ の代わりに y^* を用いている。

CHC⁸⁾ モデルはその形から LB モデルの改良モデルと推察され、最近のモデルとして取り上げた。

ここで、 ε の代わりに $\bar{\varepsilon}$ を用いたモデルは取り上げなかった。これは壁面境界条件の与え易さ ($\bar{\varepsilon} = 0$) から用いられるものであるが、 $\bar{\varepsilon}$ を用いることの是非は議論の分

表1 低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデル モデル定数, 境界条件

| model | code | $\epsilon_{wall} B.C.$ | C_μ | C_1 | C_2 | σ_k | σ_ϵ |
|--------------------------|------|-----------------------------------|---------|-------|-------|------------|-------------------|
| standard (1974) | HR | wall function | 0.09 | 1.44 | 1.92 | 1.0 | 1.3 |
| Lam-Bremhorst (1981) | LB | $\partial\epsilon/\partial y = 0$ | 0.09 | 1.44 | 1.92 | 1.0 | 1.3 |
| Nagano-Tagawa (1990) | NT | $v\partial^2 k/\partial y^2$ | 0.09 | 1.45 | 1.9 | 1.4 | 1.3 |
| Abe-Nagano-Kondoh (1992) | ANK | $v\partial^2 k/\partial y^2$ | 0.09 | 1.5 | 1.9 | 1.4 | 1.4 |
| Chang-Hsieh-Chen (1995) | CHC | $v\partial^2 k/\partial y^2$ | 0.09 | 1.44 | 1.92 | 1.0 | 1.3 |

表2 修正関数

| code | f_μ | f_1 | f_2 |
|------|---|----------------------|--|
| HR | 1.0 | 1.0 | 1.0 |
| LB | $[1 - \exp(-0.0165R_k)]^2 (1 + 20.5/R_k)$ | $1 + (0.05/f_\mu)^3$ | $1 - 0.3 \exp(-R_k^2)$ |
| NT | $[1 - \exp(-y^*/26)]^2 (1 + 4.1/R_k^{3/4})$ | 1.0 | $[1 - 0.3 \exp\{- (R_k/6.5)^2\}] [1 - \exp(-y^*/6)]^2$ |
| ANK | $[1 - \exp(-y^*/14)]^2 (1 + 5/R_k^{3/4} \exp\{- (R_k/200)^2\})$ | 1.0 | $[1 - 0.3 \exp\{- (R_k/6.5)^2\}] [1 - \exp(-y^*/3.1)]^2$ |
| CHC | $[1 - \exp(-0.0215R_k)]^2 (1 + 31.66/R_k^{3/4})$ | 1.0 | $[1 - 0.01 \exp(-R_k^2)] [1 - \exp(-0.0631R_k)]$ |

$$R_k = k^2 / \nu \epsilon \quad R_y = \sqrt{k} y / \nu \quad y^+ = u_\tau y / \nu \quad y^* = u_e y / \nu \quad u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho} \quad u_e = (\nu \epsilon)^{1/4} \quad \tau_w \text{ は壁面摩擦速度}$$

かれる所である⁹⁾¹⁰⁾¹⁴⁾.

3. 低レイノルズ数型モデルを複雑形状流れ場に適用することの問題点

問題になるのは修正関数に含まれる無次元距離の取り扱いで、これは壁近傍の wall echo 効果を表現するためには必要な項であり、 f_μ, f_2 は多くのモデルで Van-Driest 型減衰関数を用いて表現されている。複雑形状にこれらのモデルを適用する際、例えばバックステップ流の再循環領域の様に2方向以上を壁に囲まれている場合無次元距離をどう取り入れるべきかは頭を悩ます問題であり、このことが低レイノルズ数型モデルの複雑形状への適用を妨げている一因となっている。

修正関数に入る無次元距離は大別して

R_y, y^+, y^* の3つである。

バックステップ流れにおいて、無次元距離に y^* (または R_y) を用いる場合、一番簡単な方法としては壁から近い

方を y と考えるのが妥当であろう。それぞれ壁からの距離が y_l, x_l のとき図2の領域Ⅲの様に

$$y_{distance} = \min(x_l, y_l), \quad y^* = u_e \times y_{distance} / \nu$$

この場合でもステップ直後の剪断層等では f_μ が流れ方向に不連続に変化する可能性がある。

物理的にはレイノルズ応力が輸送されているため乱流粘性が不連続な変化を起こすことはない。

また、 y^+ を用いる場合はそれぞれの壁で壁面摩擦速度が異なるため上記の方法では再循環領域内で不連続な f_μ の分布を与えてしまう可能性がある。

無次元距離が y^+ で表現されている場合の大きな問題点として、バックステップ流や急拡大管流れの再付着点近傍で、 $u_\tau = 0, f_\mu = 0$ 、即ち距離 y の値に関わらず乱流粘性が0となり、物理的に不合理な解を与えることは以前から議論されている。Chang⁸⁾らは急拡大管流れでの評価で修正関数に y^+ を含むモデルが不満足な結果を与えることを報告している。ゾーナルモデルとしての適用¹¹⁾¹²⁾を考

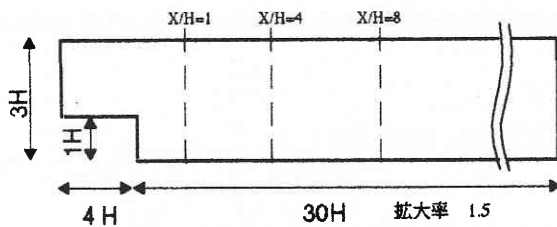


図 1 計算領域

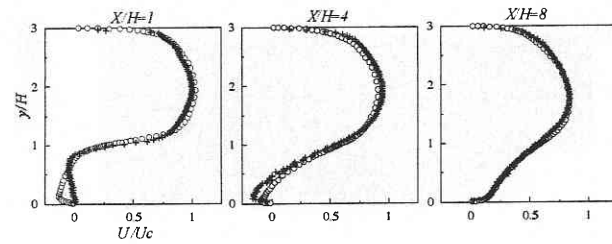


図 3 主流方向速度分布図

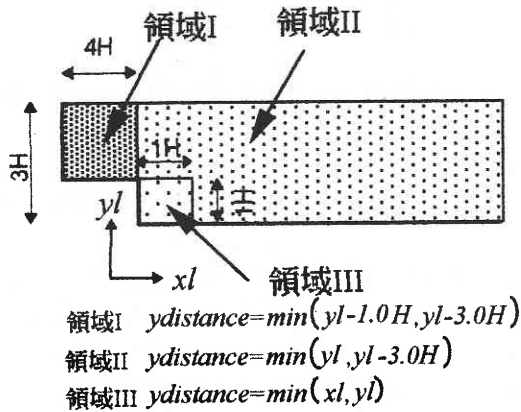


図 2 壁距離の定義

230×90である。計算領域を図 1 に示す。壁からの距離は最も単純な与え方として図 2 の様に定義した。

結果

図 3, 4 に主流方向速度分布, 乱流エネルギー k の分布を示す。再付着点距離は $x/H = 6.3$ となった。(実験値 $x/H = 6.51$, 阿部らの原論文では $x/H = 6.5$) 主流方向速度分布に関してはほぼ実験値と一致する傾向を得ている。乱流エネルギーについては図 4 (b), (c) では一致する傾向を得たが図 4 (a) において再循環領域 ($y/H = 0.5$) での k の値は実験値より約 1.8 倍大きい。 $y/H = 1$ におけるピーク値に関しては阿部らによる同じ計算結果と比較して 30% 以上大きい。原因としては壁からの距離の定義の方法に問題があると考えられる。

図 5 に f_u の分布を, 図 6 に流線を示す。

図 5 でステップ直後, 図 2 の領域 I と II の境界で f_u が不連続に変化をおこしていることが確認できる。これは f_2 においても同様でその場所で k のを過剰生成を引き起こしている。また下壁面角の部分で f_u が壁に対し単調に変化するため流線がその領域で壁に沿ってしまっている, またステップ直後再循環領域上部で流線が上方に膨らむ不自然な結果になった。

この結果から, 各領域境界と流れの再循環領域で壁距離の定義が流れ場に大きく影響する事が今回確かめられた。

ないのであれば, 複雑流れ場にこの形のモデルを用いるのは避けるべきである。

以上を考慮すれば, モデルの適用を計る際, あらかじめ流れ場の形状を踏まえた上でモデルの選定と壁からの距離を定義することが望まれる。

4. バックステップ流れの計算

以上の観点を下に今回バックステップ流れの計算を行った。モデルは ANK モデルを用い, 条件は Kasagi の実験 (拡大率 1.504, 中心速度 U_0 , ステップ高さ H によるレイノルズ数 $Re = 5500$) に合わせている。メッシュ数は

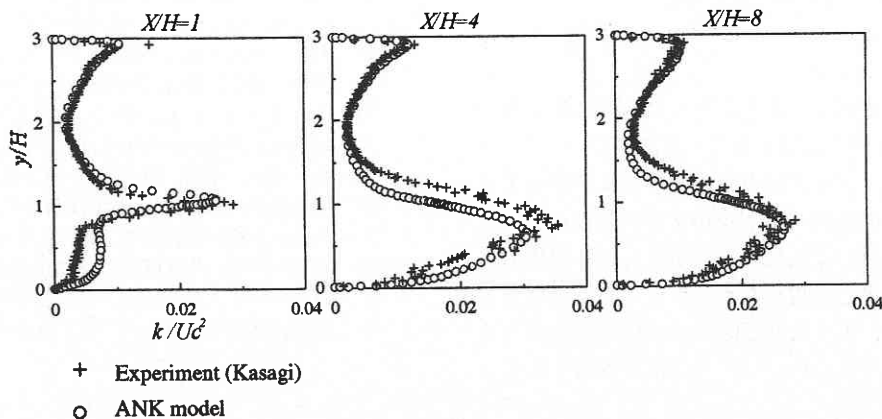


図 4 乱流エネルギー分布図

研究速報

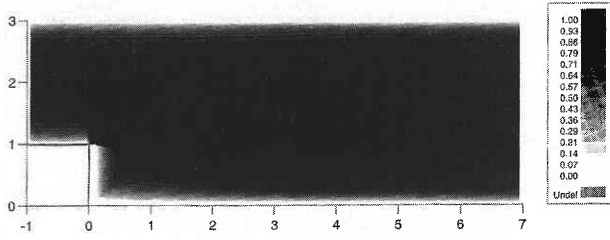


図5 f_{μ} の分布

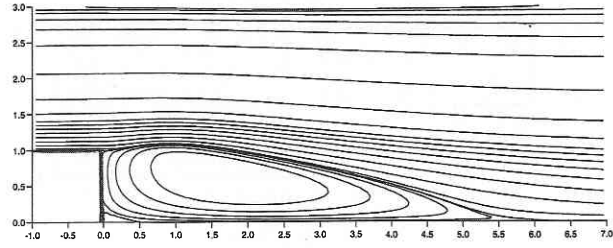


図6 流線図

5. $k-\epsilon-v^2$ モデルについて

Durbin²⁾³⁾によって提案された $k-\epsilon-v^2$ モデルの基礎式を以下に示す。(連続の式, n-s 方程式, k 方程式は (1), (2), (3) と同一)

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{T} (C_{\epsilon 1} P_k - C_{\epsilon 2} \epsilon) \quad (7)$$

$$\frac{Dv^2}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial v^2}{\partial x_j} \right] + kf_{22} - v^2 \frac{\epsilon}{k} \quad (8)$$

$$L^2 \frac{\partial f_{22}}{\partial x \partial x_j} - f_{22} = (1 - C_{f1}) \frac{[2/3 - v^2/k]}{T} - C_{f2} \frac{P_k}{k} \quad (9)$$

$$v_t = C_\mu v^2 T \quad (10)$$

$$l = \max \left[\frac{k^{3/2}}{\epsilon}, C_\eta \left(\frac{v^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \right], L = C_{Ll} T = \max \left[\frac{k}{\epsilon}, 6 \left(\frac{v}{\epsilon} \right)^{1/2} \right] \quad (11)$$

ここで v^2 はレイノルズ応力の壁方向成分 f_{22} は (8) 式中 kf_{22} で圧力ひずみ相関項と v^2 の非等方散逸を表現する T, l はエネルギー保有渦の時間スケール, 長さスケールである。

その特徴として

1. $k-\epsilon, v^2-f_{22}$ の 4 方程式モデルである
2. 乱流粘性を表現する速度スケール (の 2 乗) を k でなく v^2 を用いること
3. v^2 の圧力歪相関項と非等方散逸率を楕円緩和方程式の解 (f_{22}) として表現することである。

通常の応力方程式モデルの圧力歪相関項では壁面効果項が壁からの距離, 壁面法線ベクトルが含まれた複雑な代数式となるので複雑形状の流れ場への適用は一般に困難であるが, このように簡単な表現がなされモデルの汎用性を大きくしている。また, T, l は物理的には壁付近でコルゴモロフスケールに漸近するため (11) 式の形で表現されてい

る。

これにより修正関数なしで壁面効果と低レイノルズ数効果をモデルに取り込むことが可能となっている。

Durbin による検証例ではチャンネル流, 2 次元ディフューザ, 角柱周り流れ等で比較的良好な結果が報告されている。

ただし, 他の研究者による追試, 検証例がほとんど見られないため, 今回チャンネル流の追試を試みたがまだ正しい結果は得られてない。その結果は続報で報告させていただく。今の所, $v^2 - f_{22}$ 方程式系の境界条件を通常の $k-\epsilon$ 方程式系の境界条件と同様に与えているが, v^2 の分布が k と同様の分布になりその壁面挙動が再現できない。正しい境界条件をどう与えるかを現在検討中である。

最後に, 研究員の鬼頭幸三氏には多くのご助言を頂きました。ここに感謝の意を表します。(1996年10月31日受理)

参考文献

- 1) Abe, k., Kondoh, T. and Nagano, Y., Int. J. Heat Mass Transfer. Vol 37, No. 1, (1994), 139-151.
- 2) Durbin, P.A., Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Vol. 3, No. 1 (1991), 1-13.
- 3) Durbin, P.A., AIAAJournal, 33-4 (1995.4), 659-664.
- 4) Patel, V.C., Rodi, W. and Scheuerer, G., AIAA Journal 23-9 (1984.9), 1308-1319.
- 5) Lam, C.K.G, and Bremhorst, K., ASME Journal of Fluids Engineering Vol. 103 (1981.9), 456-460.
- 6) 長野・田川・新美, 機論, 55-512, B (1989), 1008-1015.
- 7) 長野・島田, 機論, 59-559, B (1993), 742-74.
- 8) Chang, K.C., Hsieh, W.D. and Chen, C.S., ASME Journal of Fluids Engineering Vol. 117 (1995.7), 417-423.
- 9) 明・笠木, 機論, 54-507, B (1988), 3003-3009.
- 10) 明・笠木, 機論, 54-508, B (1988), 3512-3519.
- 11) 鬼頭・小林, 生産研究, 47-2 (1995.2), 34-37.
- 12) 鬼頭・小林, 生産研究, 48-2 (1995.2), 111-114.
- 13) 富樫・小林, 生産研究, 45-1 (1993), 37-39.
- 14) 数値流体力学シリーズ 3. 乱流解析 東大出版会