

# 有限要素法における運動量保存 —LES による平均レイノルズ応力の評価—

Consistency of Finite Element Scheme in Calculation of Internal Fluxes  
—Evaluation of Reynolds Stress in LES—

大 島 ま り\*

Marie OSHIMA

## 1. はじめに

近年のコンピュータ性能および数値解析技術の発達に伴い、工学上より実用的な複雑形状場における乱流解析の必要性が益々高まってきている。特に、これまで比較的単純な流れ場に適用されてきた LES (Large Eddy Simulation) をレイノルズ平均モデルでは予測できない壁剪断流および噴流などの工学的に興味ある問題へと適用する試みがなされるようになってきた。ここで、LES の計算精度は格子依存性が強く、例えば壁乱流などのように壁近傍で観察されるストリーク構造をとらえるためには、壁近傍に非常に細かいメッシュを配置する必要がある。有限要素法などの非構造格子は、構造格子と比較してメッシュの形状および配置を自由に変えることができるため、工学的な問題を解く際に有利と思われ、筆者らは有限要素法を用いた LES 解析を行ってきている<sup>1)</sup>。

有限要素法による LES において、節点値を用いて計算された平均レイノルズ応力は DNS (Direct Numerical Simulation) 及び実験結果と一致しないことが、確認されている<sup>1)</sup>。特に、壁近傍のクラスタリングがきつくなるほど、従来の節点を用いた評価法と DNS の結果の違いは顕著となる。有限要素法では速度などの節点値は正確に評価することができるが、フラックス値あるいは応力などの微分値の評価は近似の形で計算するのが一般的である<sup>2),3)</sup>。したがって、節点値を用いてのフラックスの評価は正確ではなく、さらに離散化した際の運動量及びエネルギーの保存を満足しないという問題が生じる<sup>4)</sup>。

そこで、本研究では離散化した際の運動量を保存するようなコンシステントなフラックス値及び応力の解析手法の開発を目的としている。特に本論文では、以下の二点に重点を置いている。

まず、離散化した際の運動量を保存するために Navier-Stokes 式の移流項に発散型 (Divergence Form) を採用する。一般に、発散型は離散化した際の運動量及びエネルギーの保存性を満足するが、対流型 (Advective Form) と比較して数値安定性が劣るといふ欠点がある。そこで、一点積分を適用することにより高レイノルズ数における数値安定化を図った。次に、境界あるいは内部の任意断面でのフラックス値を解析するための有限要素式を導出し、離散化した際の運動量の保存性を保つように平均レイノルズ応力を求めるポスト処理の手法を開発した。

本手法を用いて、チャンネル乱流における平均レイノルズ応力を計算し、DNS の結果<sup>5)</sup>と比較・検討を行った。その結果、従来の節点評価による解析結果と比較して良好な結果が得られ、本手法の妥当性が確認された。

## 2. 有限要素法による定式化

LES 解析に用いた基礎方程式は、以下のようになる。

$$\bar{u}_{i,j} = 0, \quad (1)$$

$$\bar{u}_i = F_{ij,j} + b_i, \quad (2)$$

$$F_{ij} = -\bar{u}_j \bar{u}_i - \delta_{ij} P + \nu \bar{u}_{i,j} + \nu_t (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}), \quad (3)$$

$$\nu_t = (C_\mu f \Delta)^2 (2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2}, \quad (4)$$

$$P = \frac{1}{\rho} \bar{p} + \frac{1}{3} \bar{u}_k \bar{u}_k, \quad (5)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{j,i} + \bar{u}_{i,j}), \quad \Delta = (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3)^{1/3}, \quad (6)$$

$$f = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \quad (7)$$

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad A^+ = 25$$

ここで、Sub-grid scale model として、Smagorinsky model を採用した。また、対流項には運動量保存型の発散型を用いている。式中の  $u_i$ ,  $P$  は  $i$  方向 ( $i=1,2,3$ ) 速度と

\*東京大学生産技術研究所 第2部

研 究 速 報  
 圧力であり、 $b_i$  は外力項、 $(-)$  はフィルター化された物理量であり、 $\nu$  は分子粘性であり、 $\nu_t$  は渦粘性である。

以上の式を、重み付き残差法により弱形式化し、部分積分を適用し、ガラーキン法により空間離散化を行うと以下の離散化式が得られる。

$$\int_{\Omega} N_{E,i} \overline{U_{iE}} d\Omega = 0, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_A N_{B,i} \dot{u}_{iB} d\Omega &= \int_{\Omega} N_{A,j} (N_C \overline{u_{jC}} N_{B,i} \overline{u_{iB}}) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} N_{A,j} \delta_{ij} P_E d\Omega \\ &- \nu \int_{\Omega} N_{A,j} N_{B,i} \overline{u_{iB}} d\Omega \\ &- \nu_t \int_{\Omega} N_{A,j} (N_{B,j} \overline{u_{iB}} + N_{B,i} \overline{u_{jB}}) d\Omega \\ &+ \text{Boundary term}, \end{aligned} \tag{9}$$

ここで、 $N$  は内挿関数、添字  $A, B, C$  は節点を示し、 $E$  は要素を示す。

内部節点値である速度及び圧力は (8) 式と (9) 式を速度・圧力の分離解法の一つである MAC 法を用いた従来の有限要素解析を行うことで求める<sup>1)</sup>。ここで、有限要素には速度一次・圧力 0 次の 8 節点のブリック要素を用い、時間については 2 次の Adams-Bashforth 法を適用した。ここで、移流項の積分は数値安定を図るため、1 点積分を用いた。

以上より求められた速度と圧力より、ポスト処理することにより Fig. 1.a) に示されている任意断面  $\Gamma_{\phi}$  上の全体の応力を計算する。ここで、断面  $\Gamma_{\phi}$  上の全体の応力を  $t_i$  とし、以下のように定義する。

$$t = (-\overline{u_j u_i} + \tau_{ij}) n_j. \tag{10}$$

断面上での  $t_i$  を未知数とし、重み関数がゼロにならないとすると、 $t_i$  についての次式が導かれる。

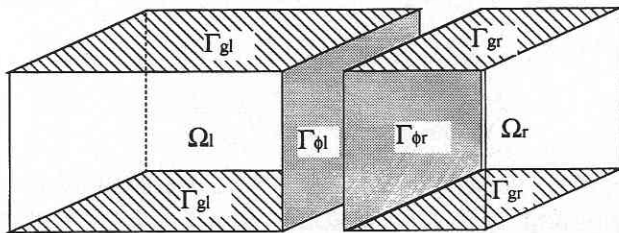


Fig. 1.a) Analysis domain with an arbitrary section  $\Gamma_{\phi}$ .

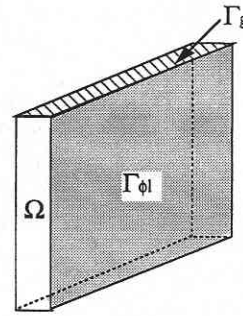


Fig. 1.b) The post-processing slab for the inner flux on  $\Gamma_{\phi}$ .

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\phi}} N_A N_B t_{iB} d\Gamma &= - \int_{\Omega} N_{A,j} (N_C \overline{u_{jC}} N_{B,i} \overline{u_{iB}}) d\Omega \\ &- \int_{\Omega} N_{A,j} \delta_{ij} P_E d\Omega \\ &+ \nu \int_{\Omega} N_{A,j} N_{B,i} \overline{u_{iB}} d\Omega \\ &+ \nu_t \int_{\Omega} N_{A,j} (N_{B,j} \overline{u_{iB}} + N_{B,i} \overline{u_{jB}}) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} N_A N_{B,i} \dot{u}_{iB} d\Omega - \text{Boundary term}. \end{aligned} \tag{11}$$

ここで、ポスト処理は Fig. 1.b) に示されているように  $\Gamma_{\phi}$  上に節点を有する要素の一方からのフラックスのみを考慮すればよい。したがって、ポスト処理の計算負荷が全体の計算負荷に与える影響は小さい。

実際の平均レイノルズ応力は

$$\langle \overline{u'_1 u'_2} \rangle = \langle \overline{u_1 u_2} \rangle - \langle \overline{u_1} \rangle \langle \overline{u_2} \rangle, \tag{12}$$

と与えられる。ここで、 $\langle x \rangle$  は  $x$  の時間平均統計量を示す。 $\langle \overline{u_1} \rangle \langle \overline{u_2} \rangle$  は各々の節点を用いて評価することができるが、 $\langle \overline{u_1 u_2} \rangle$  については (12) 式のコンシステントな手法を用いて得られた  $x_1-x_2$  面上の  $t_1$  あるいは  $x_2-x_3$  面上の  $t_2$  より粘性応力を差し引くことにより求める。

### 3. 解析結果

#### 3.1 解析モデル

解析モデルは Fig. 2 に示されている  $3.2H \times 1.0H \times 1.6H$  のチャンネルであり、要素分割は  $32 \times 40 \times 32$  である。境界条件は Table 1 にまとめられているように、 $x_1(x)$  と  $x_3(z)$  方向に周期境界条件と  $x_2(y)$  は壁境界条件を用いた。また、Table 2 にまとめられているように解析条件はレイノルズ数は  $Re_{\tau} = u_{\tau}(H/2)/\nu = 180$ 、 $C_s = 0.1$  を用いた。

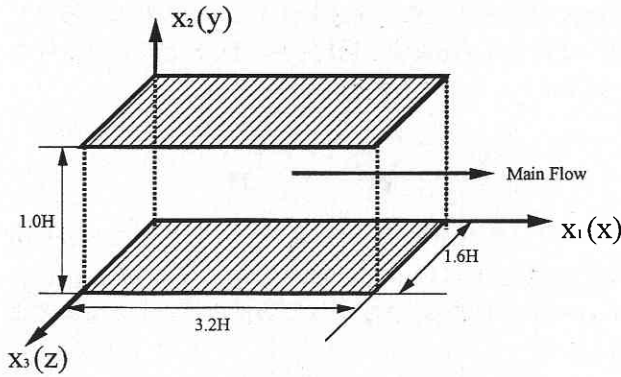


Fig. 2 Analysis model of the channel flow.

Table 1 Geometric conditions

|                          |   |
|--------------------------|---|
| Dimension of the channel | 3.2H × 1.0H × 1.6H  |
| Total number of elements | 32 × 40 × 32  |
| Spatial resolution       | $\Delta x_1^+ = 36$<br>$\Delta x_2^+ = 1.07 \sim 29.7$<br>$\Delta x_3^+ = 18$ |
| Boundary conditions      | Periodic (x1, x3 directions)<br>Non-Slip(x2 direction)                        |

Table 2 Analysis conditions

|                         |                                      |
|-------------------------|--------------------------------------|
| Coupling algorithm      | MAC method                           |
| Time advancement method | 2nd-order<br>Adams-Bashforth method  |
| Reynolds number         | $Re_\tau = u_\tau (H/2) / \nu = 180$ |
| Smagorinsky constant    | $Cs = 0.1$                           |
| Time step size          | $\Delta t = 0.0005$                  |

3.2 解析結果

Fig. 3 は本手法を用いて評価した場合の10,000時間ステップ後の平均レイノルズ応力を従来の節点評価した場合とDNSの結果と比較した結果を示している。また、Fig. 4は本手法を用いた際の10,000時間ステップ後の応力の内訳を比較している。

Fig. 3 に示されているように、本手法によるレイノルズ応力の評価は、従来の節点評価と比較してDNSと良好な

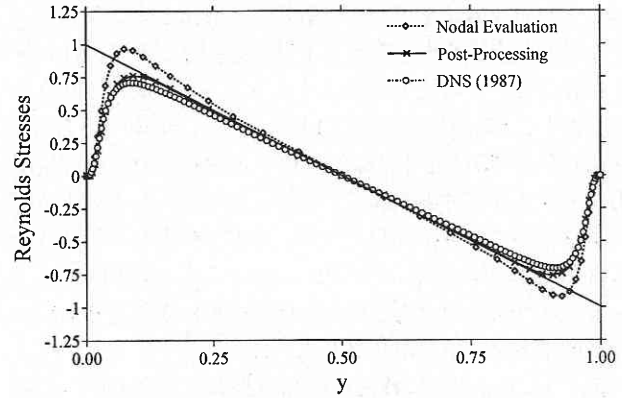


Fig. 3 Profile of the Reynolds Stress.

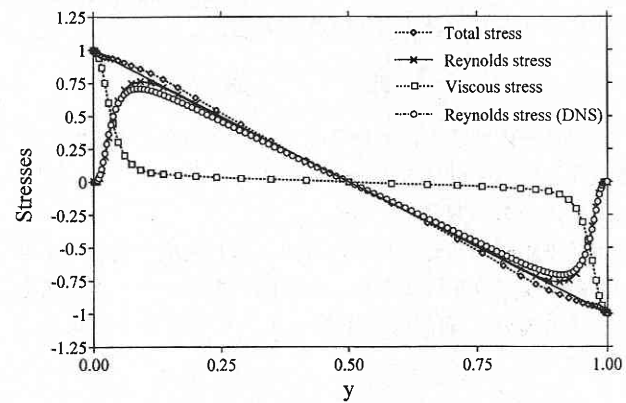


Fig. 4 Profile of the Stress.

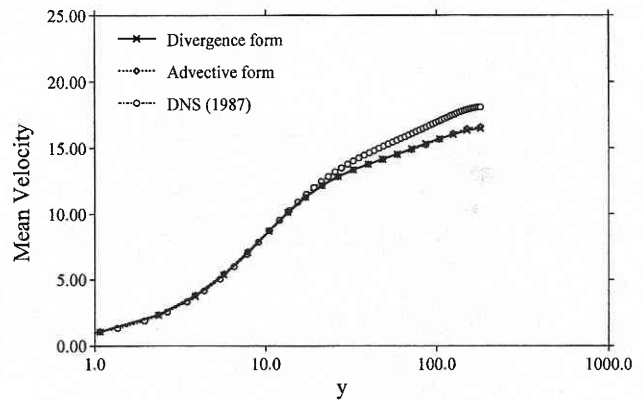


Fig. 5 Profile of the Mean Velocity.

一致を示している。節点を用いてレイノルズ応力評価した場合には離散化された運動量が保存されず、平均レイノルズ応力がDNSの結果と一致しない。さらに、Fig. 3中の直線で示されている圧力勾配による力と釣り合うためには負の粘性応力ではなくてはならず、物理的にも矛盾した結果となる。一方、重み付き残差法によって弱形式化した式に

## 研究速報

対して有限要素法を用いて離散化した方法とコンシステントな離散化方法を用いてポスト処理を行うことで、運動量が保存され、その結果平均レイノルズ応力が改善された。

しかし、Fig. 4に示されているように、全体の応力は  $y = 0.125 - 0.25$  付近で実線の直線で表されている圧力勾配力より大きめに評価されている。このため、レイノルズ応力も  $y = 0.125 - 0.25$  付近では、DNSの結果より大きめに評価されている。この原因については、壁方向のメッシュの粗さあるいは有限要素法解析の精度が原因であるか、今後のさらなる検討が必要と思われる。

Fig. 5とFig. 6とに移流項に発散型と対流型を用いた際の平均流速分布と乱流強度分布の比較を示した。図に示されているように、移流項の違いの平均流速分布と乱流強度分布に与える影響は小さいと思われる。

## 4. 結 論

境界及び内部節点におけるフラックス値を求める際に、離散化された運動量を保存するようなコンシステントなポスト処理技術の開発を行った。

ポスト処理の基礎方程式の導出には対流項に発散型を用い、数値安定性を図るために1点積分を用いた。本手法をチャンネル乱流に適用し、平均レイノルズ応力を計算し、

DNSの結果との比較・検討を行った。その結果、節点を用いた従来の評価方法と比較して、DNSとのより良好な一致を示し、本手法の妥当性が証明された。

(1996年5月31日受理)

## 謝 辞

本研究は著者が文部省在外研究員として米国 Stanford 大学に滞在中に行った。同大学にてご指導下さった Hughes 教授はじめ、助言および討論を頂いた方々に感謝致します。

## 参 考 文 献

- 1) Tsubokura M., et al., The proceedings of ASME/JSME Joint Conference in Fluid Engineering, Hilton Head Island, SC, U.S.A. (1995).
- 2) Mizukami, A., Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 57, pp. 239-243 (1986).
- 3) Gresho, P.M., Computers and Fluids, Vol. 9, pp. 223-25 (1981).
- 4) Carey, G.F., et al., Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 50, pp. 107-120(1985).
- 5) Kim, J., Moin, P. and Moser, R., J. Fluid Mech., Vol. 177, pp. 133-166 (1987).