

## 0 方程式非平衡 Subgrid model の研究

Investigation of the 0-Equation Type of the Non-equilibrium Subgrid Model

岡 本 正 芳\*

Masayoshi OKAMOTO

Smagorinsky モデルはそのモデル定数が各種流れ場に依存するという問題点が広く知られている。この問題点が Smagorinsky モデルが有する非定常性の欠如に起因するものと考え、乱流統計理論の 2 スケール直接相関近似 (TSDIA) を用いて、非定常性の効果を考慮した 0 方程式型の非平衡 SGS モデルを導出する。さらに Mixing Layer, チャンネル流, 一様減衰流の 3 つの流れ場でこのモデルを用いた Large Eddy Simulation を実行し、改良および問題点を議論する。

## 1. 緒 言

近年の計算機の急速な発達は、乱流数値解析の分野において Navier-Stokes 方程式を直接解析する Direct Numerical Simulation (DNS) と、フィルター操作により小規模スケール (SGS スケール) の渦に関してのみモデルを導入し大規模スケール (GS スケール) の渦に関しては直接解析を行う Large Eddy Simulation (LES) の実行を可能にしてきた。特に、後者は前者と異なりコルモゴロフ長  $l_K (= \nu^{3/4} \varepsilon^{1/4})$  に代表される散逸領域スケールまでの計算格子の解像度を必要としないため比較的大きなレイノルズ数の流れ場に対しても適用可能である。そのため工学、自然科学の分野で現実の乱流場解析の利用に大きな期待が寄せられている。この LES における最も基本的な SGS モデルとして以下に示す Smagorinsky モデルがある。

$$-\overline{u'_i u'_j} = -\frac{2}{3} K_S \delta_{ij} + 2\nu_T \bar{S}_{ij}. \quad (1)$$

ここで  $K_S$  は SGS エネルギーであり、渦粘性率  $\nu_T$  及びストレイン-テンソル  $\bar{S}_{ij}$  はそれぞれ以下のように定義している。(上線付きおよびダッシュ付きの文字はそれぞれ物理量の GS 成分, SGS 成分を表現している。)

$$\nu_T = (C_S \Delta)^2 \bar{S}, \quad (2)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right). \quad (3)$$

ただし、 $\bar{S} = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$ ,  $\Delta$  はフィルター幅の代表値,  $C_S$

はモデル定数を意味する。このモデルを用いて解析を行うためには  $C_S$  を設定することが不可欠であり、経験的に一様減衰流では  $C_S$  値は 0.2 程度<sup>1)</sup>, 自己相似的 Mixing Layer では 0.16<sup>2)</sup>, チャンネル流では 0.1<sup>3)</sup> といった値が推奨されている。このように Smagorinsky モデルではモデル定数を個々の流れ場に応じて設定する必要があるため、より一般的な複雑な流れ場に適用する際、 $C_S$  をいくつにすべきかが重要な問題となる。この問題点を解決するため近年いくつかの SGS モデルが提案されてきた。一つはグリッドの大きさの異なるフィルターを 2 回かけそのフィルター間の相似則を利用して速度等の計算された物理量から各点での  $C_S$  値を見積もる Dynamic SGS モデル<sup>4)</sup> と呼ばれる方法である。このモデルでは、従来のモデルに必要不可欠な壁関数 (壁近傍といった分子粘性が主導的役割を立たす領域で乱流モデルの寄与を打ち消す目的で導入される減衰関数) を導入することなく解析できるという非常に大きなメリットも持っている。一方、Smagorinsky モデルの表現自体を改良してこの問題点の解消を行おうとする努力も長年にわたってなされてきた。本研究では Dynamic SGS モデルとは異なり後者の観点から、流れの非定常性の影響を示す非平衡効果を Smagorinsky モデルに導入した非平衡モデルを用いてこの問題点を議論する。非平衡モデルは乱流統計理論の一つである 2 スケール直接相関近似 (TSDIA) を用いて、吉澤によりアンサンブル平均型<sup>5)</sup> および SGS 型<sup>6)</sup> の勾配拡散型渦粘性モデルの改良を目的として提案がなされてきた。ここで言う非平衡効果とは「計算スケール (アンサンブル平均型モデルであればエネルギー供給領域, SGS 型モデルでは  $\Delta$  より大きな慣性小領域) での変動が瞬時にそれより小さなスケールにカスケ

\*東京大学生産技術研究所 第 1 部

ドするのではなく、有限時間をかけて伝播するために生じる履歴の効果」を意味し、モデルとしては以下のように表現される。

$$\nu_T = \nu_{T0} \left(1 - \frac{1}{f} \frac{Df}{Dt}\right). \quad (4)$$

ここで  $D/Dt$  は Lagrangian 時間微分 ( $D/Dt \equiv \partial/\partial t + \bar{u}_j \partial/\partial x_j$ ) を意味し、 $f$  はモデルを構成する物理量でアンサンブル平均型モデルでは乱流エネルギーとその散逸率、SGS モデルではストレインの大きさ  $\bar{S}$  や SGS エネルギー  $K_S$  が対応する。アンサンブル平均型の非平衡モデルでは西島、吉澤<sup>(6),(7)</sup>により一様剪断流でのエネルギーの過剰生成に関して大きな改善が見られることが示されてきた。一方、SGS 型の非平衡モデルに関しては理論により提案されたモデルを森西、小林<sup>(8),(9)</sup>により一様減衰流、チャンネル流、バックステップ流れに対して適用し、次のように最適化された。

$$\frac{C_S}{C_{S0}} = \left(1 - 32 \frac{1}{S^2} \frac{DS}{Dt}\right). \quad (5)$$

ただし、 $C_{S0}$  は 0.1 である。また、 $C_S$  値の増大化や負値を防ぐため  $C_S$  に下限値 0、上限値 0.27 の変動域を設定した。さらに、 $C_S$  の急激な変化が計算の不安定さを誘発することを防ぐため局所的に平均を取ることでスムージングを行う事を推奨している。しかしながら、非平衡効果の SGS モデルへの寄与に関する研究が完成したとは言い難い。

そこで、本論文ではまず理論的な側面から質量保存則を満たす TSDIA 解析を行い 0 方程式型の非平衡 SGS モデルを導出し、パデ近似等を導入して新たな非平衡モデルを提案する。そして自己相似的 Mixing Layer、チャンネル流、一様等方流に適用しそのモデルの評価を行う。

## 2. 基礎方程式

非圧縮性条件下での Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (7)$$

ここで、 $u_i$  は速度ベクトル、 $p$  は圧力、 $\nu$  は分子粘性を意味し、同記号のテンソルの足の間では縮約を取るものとする。GS 成分と SGS 成分に分離するためのフィルター  $G$  を

$$\bar{u}_i(x) = \iiint d^3x' G(x-x') u_i(x'), \quad (8)$$

で定義して、式 (6)、(7) にフィルター操作を実行する

と

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} &= - \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ &+ \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (10)$$

となり、これが LES の基礎方程式にあたる。式 (9) の最終項は通常 3 つの項に分離され

$$\overline{u_i u_j} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}, \quad (11)$$

$$L_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j, \quad (12)$$

$$C_{ij} = \overline{u'_i u'_j} + \overline{u'_i \bar{u}'_j}, \quad (13)$$

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}, \quad (14)$$

$L$  を Leonard 項、 $C$  を Cross 項、 $R$  を Reynolds 応力項と呼ぶ。本研究ではこのうちフィルターの干渉による効果を意味する Leonard 項と Cross 項は無視し、Reynolds 応力項のみに注目していく。

また、フィルターの干渉を無視した近似下で SGS エネルギー ( $K_S \equiv \overline{u'_i u'_i}/2$ ) の輸送方程式は

$$\frac{DK_S}{Dt} = R_{ij} \bar{S}_{ij} - \epsilon_S + \nabla T_K, \quad (15)$$

のように書け、 $\epsilon_S$ 、 $\nabla T_K$  はそれぞれ SGS エネルギーの散逸項、拡散項と呼ばれ次のように定義される：

$$\epsilon_S = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}, \quad (16)$$

$$T_{Kj} = - \frac{1}{2} \overline{u'_j u'_m u'_m} + \overline{u'_j p'} + \nu \frac{\partial K_S}{\partial x_j}. \quad (17)$$

## 3. TSDIA 理論計算

SGS 成分の速度場に TSDIA 解析を導入し (詳細は省略した)<sup>(10)</sup>、慣性領域でのエネルギースペクトルにコロモゴロフの 5/3 乗則を仮定すると、SGS のエネルギー  $K_S$  およびレイノルズ応力項の非対角成分  $B_{ij}$  は

$$K_S = C_{K1} \epsilon_S^{2/3} l^{2/3} + C_{K2} \epsilon_S^{-2/3} l^{4/3} \frac{D\epsilon_S}{Dt}, \quad (18)$$

$$B_{ij} = \left( C_{B1} \epsilon_S^{1/3} l^{4/3} + C_{B2} \epsilon_S^{-1} l^2 \frac{D\epsilon_S}{Dt} \right) \bar{S}_{ij}, \quad (19)$$

と導出される. 式 (18), (19) の係数は  $C_{K1} = 0.665$ ,  $C_{K2} = -0.581$ ,  $C_{B1} = 0.108$ ,  $C_{B2} = -0.0211$  である. ただし,  $l$  は TSDIA 解析における切断長さである. これらの表現から Lagrangian 時間微分項を無視し, 式 (15) において SGS エネルギーの生成項と散逸項の釣り合いを考え,  $K_S$ ,  $\epsilon_S$  を消去すると

$$\nu_T = (0.112l)^2 \bar{S}, \quad (20)$$

となり,  $l$  と  $\Delta$  を対応させれば Smagorinsky モデル (1) が導出される. 以上のように理論の枠組みでは Smagorinsky モデルは平衡状態を仮定して導出されるため非定常性の効果を正確に表現できない可能性が大きい. そこで, 拡散項を無視した式 (15) と, 式 (18), (19) を用いて SGS 渦粘性率の表現を導出すると

$$\nu_T = (C_S \Delta)^2 \bar{S} - C_{m1} (C_S \Delta)^2 \bar{S} \chi, \quad (21)$$

( $C_S \Delta = 0.112l$ ,  $C_{m1} = 4.13$ ). ただし, 2 階以上の時間微分の項は無視した. また,  $\chi$  は

$$\chi = \frac{1}{\bar{S}^2} \frac{D\bar{S}}{Dt}, \quad (22)$$

で非定常性を表現する無次元量である. このモデル (21) では  $\chi$  が大きな正値を取る場合, 渦粘性率が負の値になるためパデ近似を用いて以下のように表現を変える.

$$\nu_T = \frac{(C_S \Delta)^2 \bar{S}}{1 + C_{m1} \chi}. \quad (23)$$

しかし, 式 (23) においても  $\chi$  がある負値より小さくなると分母がゼロや負の渦粘性率が生じる問題が残る. そこで, 本研究では非平衡効果の高次項にあたる  $\chi^2$  の項を導入する方法

$$\nu_T = \frac{(C_S \Delta)^2 \bar{S}}{1 + C_{m1} \chi + C_r \chi^2}, \quad (24)$$

と上限値 ( $C_S \leq C_{m2}$ ) を設定する方法の 2 通りのモデルを試みた. Fig. 1 には Mixing Layer を計算し求めた最適値をプロットしてある. しかし, 高次項を導入したモデルではチャンネル流の解析で平板間の上下で非対称が永続的に残り定常流にならないため, 以後は後者を非平衡 SGS モデルと呼んでいく.

この上限値の設定は Fig. 1 でわかるように  $\chi$  が大きな負の値を取るときに効いてくる. 簡単な次元解析から SGS エネルギーは 0 方程式の範疇では  $S^2$  に比例すると考えられ,  $\chi$  が負の値ということは  $DK_S/Dt$  が負に対応する.  $K_S$  の輸送方程式 (15) において拡散項を無視すると

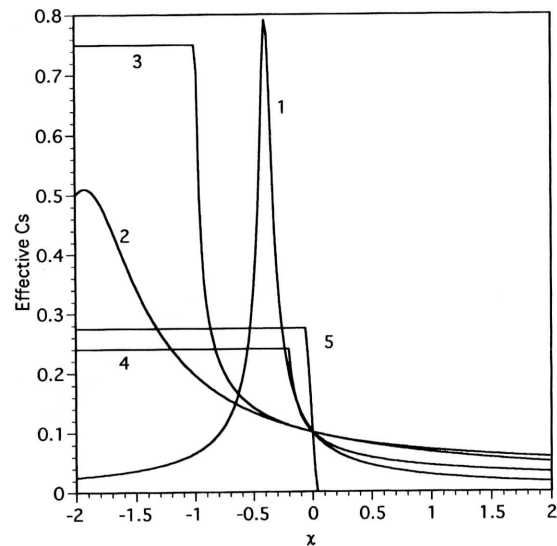


Fig. 1 非定常性を表現する無次元量  $\chi$  と有効的  $C_S$  の対応. 1 は  $C_{m1} = 1.0$ ,  $C_r = 0.26$ , 2 は  $C_{m1} = 5.0$ ,  $C_r = 6.35$ , 3 は  $C_{m1} = 1.0$ ,  $C_{m2} = 0.75$ , 4 は  $C_{m1} = 4.13$ ,  $C_{m2} = 0.24$ , 5 は森西, 小林モデル.

右辺第 1 項の生成項は正値であり,  $DK_S/Dt$  が最も小さな負値を取る場合は正値の生成項がほとんど無視可能な

$$\frac{DK_S}{Dt} \approx -\epsilon_S, \quad (25)$$

が成立している場合であると考えられる. 式 (25) と式 (18), (19) で渦粘性表現を導出すると,

$$B_{ij} \sim 1.44 \times C_{B1} \epsilon_S^{1/3} l^{4/3} \bar{S}_{ij}, \quad (26)$$

となり, 式 (19) の渦粘性項の係数と比べ若干大きな値 (理論から,  $C_S$  の 1.2 倍) を取ることがわかる. 以上のように上限値を設定することは理論的側面からもある程度説明付けることができ, Fig. 1 での  $\chi^2$  を導入したモデルで見られるような 0 へ漸近していくことはこの事実とは矛盾する.

また,  $C_S$  の値はチャンネル流, Mixing Layer, 一様減衰流の 3 つの流れ場で最も定常性が強いと考えられるチャンネル流の推奨値 0.1 を採用する.

#### 4. 数値解析

この章では非平衡モデル (23) を Mixing Layer, チャンネル流, 一様減衰流の 3 つの流れ場へ適用した結果を示す. まず初めに Mixing Layer に対しての適用を行った. 計算条件は計算格子が  $64 \times 64 \times 64$  のノルマル方向 (y 方向) 不等間隔格子で 2 次精度の中心差分を用いて時間発展に 2 次の Adams-Bashforth 法を採用した. モデル定数の最適化はノルマル方向中心での主流方向 (x 方向) の 1 次

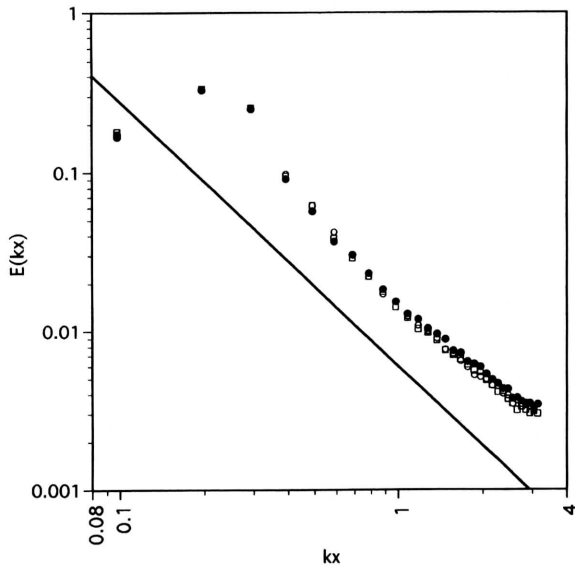


Fig. 2 Mixing Layer での主流方向 1 次元エネルギースペクトル. ●は Smagorinsky モデル  $C_s=0.13$ , ○は非平衡モデル  $C_{m1}=1.0, C_{m2}=0.75$ , □は非平衡モデル  $C_{m1}=4.13, C_{m2}=0.24$ , 直線は5/3乗則.

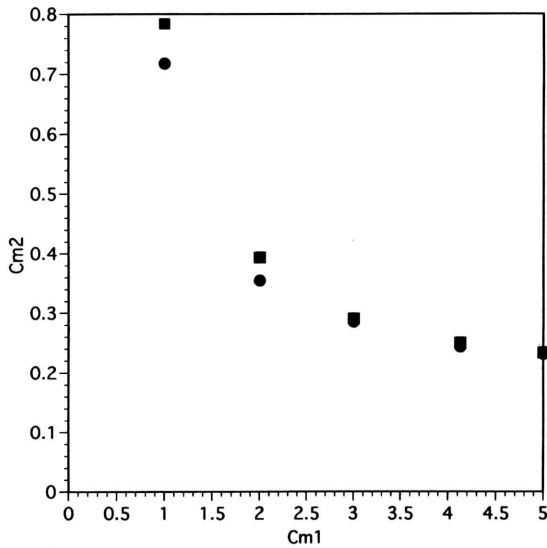


Fig. 3 Mixing Layer のより最適化された  $C_{m1}$  と  $C_{m2}$  の対応関係. ■は  $t=80$ , ●は  $t=120$ .

元エネルギースペクトルがコロモゴロフの5/3乗則を満たすことを条件とし, Smagorinsky モデルでは  $C_s = 0.13$  と決定した (Fig. 2). その際, レナード項やクロス項を無視しているため厳密には決定できないフィルターをガウシアンフィルター

$$G(x) = \sqrt{\frac{6}{\pi \Delta^2}} \exp\left(-\frac{6x^2}{\Delta^2}\right), \quad (27)$$

と仮定して乗則の査定に用いた. (以後もスペクトルの

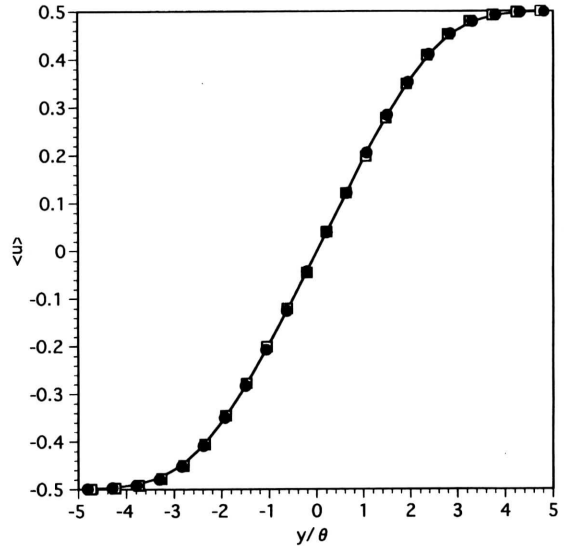


Fig. 4 Mixing Layer ( $t=80$ ) での主流平均速度. 実線は Smagorinsky モデル  $C_s=0.13$ , □は非平衡モデル  $C_{m1}=1.0, C_{m2}=0.75$ , ●は非平衡モデル  $C_{m1}=4.13, C_{m2}=0.24$ .

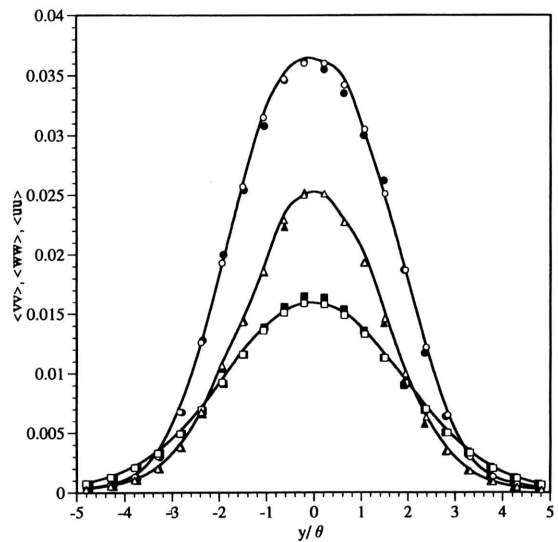


Fig. 5 Mixing Layer ( $t=80$ ) でのノルマル-ストレス. 実線は Smagorinsky モデル  $C_s=0.13$ , 黒点は非平衡モデル  $C_{m1}=1.0, C_{m2}=0.75$ , 白点は非平衡モデル  $C_{m1}=4.13, C_{m2}=0.24$ .

査定ではこの仮定を使用している.) 非平衡モデルに関しても同一条件を満たすものとして, Fig. 3 に示すようにいくつかのモデル定数系を得ることができた. また, これらのモデル定数系の非平衡モデルは平均量に関しても, 最適化された Smagorinsky モデルの結果をほぼ再現している. ここでは  $C_{m1} = 1.0, C_{m2} = 0.75$  と  $C_{m1} = 4.13, C_{m2} = 0.24$  の2つのモデル定数系での解析結果を平均主流速度を Fig. 4, 2 次のノルマル-ストレスを Fig. 5 に示す. エネルギー収支等の  $y$  方向分布に関しても大きな違いは生じて

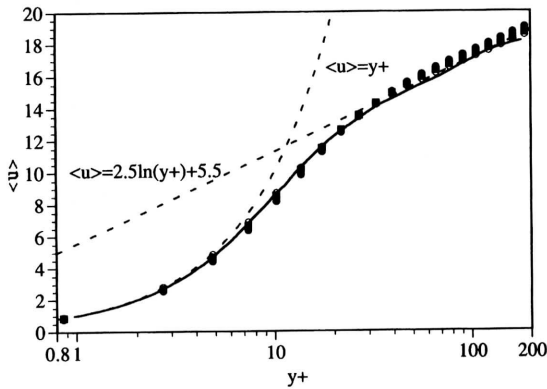


Fig. 6 Channel 流での主流平均速度. 実線は Kim らの DNS<sup>11)</sup>, ○は Smagorinsky モデル  $C_s=0.13$ , ●は非平衡モデル  $C_{m1}=1.0, C_{m2}=0.75$ , ■は非平衡モデル  $C_{m1}=4.13, C_{m2}=0.24$ .

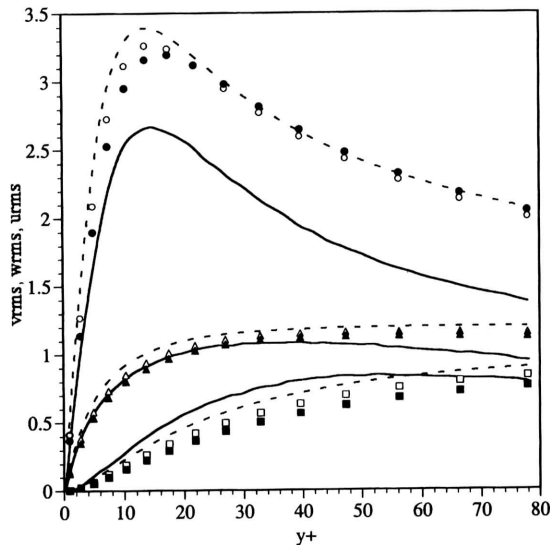


Fig. 7 Channel 流での揺らぎ速度の 2 乗平均. 実線は Kim らの DNS<sup>11)</sup>, 破線は Smagorinsky モデル  $C_s=0.13$ , 黒点は非平衡モデル  $C_{m1}=1.0, C_{m2}=0.75$ , 白点は非平衡モデル  $C_{m1}=4.13, C_{m2}=0.24$ .

いない。

次に  $Re = 13800$  (壁での摩擦速度で定義したレイノルズ数は640) のチャンネル流へ適用した. 計算条件は主流方向の格子数を128に変化させた事を除けば差分法, 時間発展法ともに Mixing Layer と同一である. 壁関数は Van Driest 型減衰関数

$$f(y^+) = 1 - \exp(-y^+ / 25), \quad (28)$$

を使用した. 結果は, Fig. 6 (平均主流速度), Fig. 7 (揺らぎ速度の 2 乗平均) が示すように Mixing Layer で最適化された非平衡モデルはどのモデル定数系でも平均量に関しては Smagorinsky モデル  $C_s = 0.10$ での解析結果をほ

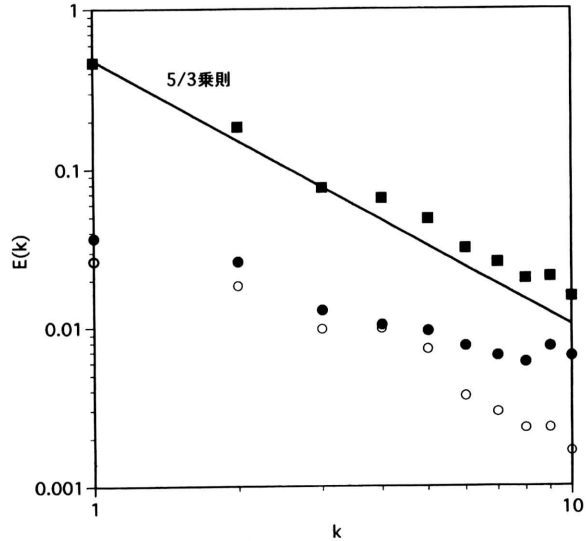


Fig. 8 一様減衰流での 3 次元エネルギースペクトル. ■は初期スペクトル, ○は Smagorinsky モデル  $C_s=0.22$ , ●は非平衡モデル  $C_{m1}=4.13, C_{m2}=0.24$ .

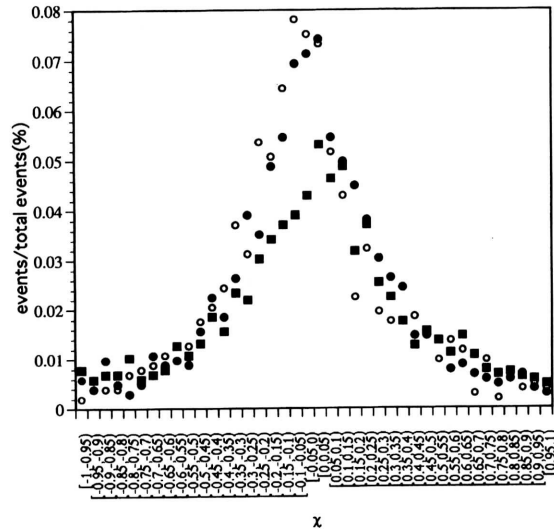


Fig. 9 非定常性を表現する無次元量  $\chi$  のヒストグラム. ○は一様減衰流, ●は Mixing Layer ノルマル方向中心, ■は Channel 流 ノルマル方向中心.

ぼ再現できた。

最後に一様減衰流への適用を調べた. 計算条件は 2 通りの手法で行った. 一つは先の解析法と異なり  $32 \times 32 \times 32$  で疑似スペクトル法 (エリアイジングエラーは  $2/3$  rule で除去した.), 時間発展は 4 次精度の Runge-Kutta 法を用いた. もう一つは先の 2 流の解析手法と対応を取る目的から 2 次精度中心差分, 時間発展は Adams-Bashforth 法を使用した. 両手法から得られた結果には大きな違いは生じなかった. そこで前者の結果をグラフ化して記載する. GS 成分のエネルギーが十分落ち初期データの影響が無くなったと考えられる時刻でのエネルギースペクトルを取ったと

ころ Fig. 8 のようになった.  $C_S = 0.22$  の Smagorinsky モデルの結果がある程度  $5/3$  乗則を満足しているのに比べて, Fig. 3 に記載した最適化された定数系の非平衡モデルではどれも同様にかなり傾きが緩やかになった. Fig. 1 で一様減衰流を用いて最適化された森西, 小林のモデルと比べると,  $\lambda = 0$  付近で我々の非平衡モデルでは非平衡効果の影響が緩やかであり, Smagorinsky モデルで  $C_S$  に最適値  $0.22$  より小さい値を入れた解析結果に対応していると考えられる. しかしながら一方, 森西, 小林モデルに近づけてかなり大きな  $C_{m1}$  の値を導入して一様減衰流で最適化を行うと Mixing Layer の解析においてスペクトルの傾きがきつくなる (森西, 小林モデルでは  $2.5$  乗) という結果が得られ, 一様減衰流のスペクトルの傾きは Mixing Layer でのスペクトルの傾きより  $1$  程度緩やかである傾向が示された. この困難は,  $C_S$  の大きさを変化させる, 式 (15) での拡散項に対応する項をモデルに導入する, 平均化等のスムージング操作を加える等の方法では解消することはできなかった.

そこで, この困難の原因を調べる目的で最適化した Smagorinsky モデルの解析結果を利用し, 一様減衰流と Mixing Layer (ノルマル方向中心) の  $\lambda$  に関するヒストグラムを取ったところ Fig. 9 のようになった. その結果, 両流れ場の  $\lambda$  の分布 (平均値および標準偏差等) に大きな違いが生じず, 同一のモデル定数を用いて Smagorinsky モデルを実行した場合に対応していることが判明した. このことは  $\lambda$  が一様減衰流と Mixing Layer の違いを説明する無次元量ではないことを示唆していると考えられる.

## 2. 結 言

TSDIA により流れ場の非定常性の効果を取り込んだ 0 方程式型非平衡 SGS モデルを導出した. そのモデルを Mixing Layer とチャンネル流, 一様減衰流へ適用し LES を実行した. その結果, Mixing Layer と一様減衰流の両者を同時に再現することができるモデルは導出できなかった. しかし, この問題点は, 推奨された Smagorinsky モデルの結果を利用し 0 方程式で唯一の非定常性を表現する無次元量  $\lambda$  の分布を調べたところ, 両者の  $\lambda$  の分布には目立った相違点がないことが確認され, 非平衡 SGS モデルには  $\lambda$  自体から変更および改善が必要なことが判明した. 以上を考慮し, 今後はまず 1 方程式型の SGS モデルに拡張していく予定である. (1995年11月10日受理)

## 参 考 文 献

- 1) Antonopoulos-Domis, M., J. Fluid Mech. 104, (1981) 55.
- 2) Mansour, N. N., Ferziger, J. H. and Reynolds, W. C., Report No. TF-11 Stanford University, (1978).
- 3) Piomelli, U., Moin, P. and Ferziger, J. H., Phys. Fluids 31, (1988) 1884.
- 4) Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, W., H., Phys. Fluids A 3, (1991) 1760.
- 5) Yoshizawa, A., Phys. Fluids. A 3, (1991), 2007.
- 6) Yoshizawa, A. and Nisizima, S., Phys. Fluids. A 5, (1993) 3302.
- 7) 西島勝一, 第26回乱流シンポジウム講演論文集, (1994) 200.
- 8) 森西洋平, LES による乱流解析の実用化のための基礎研究, (1989) 東京大学博士論文.
- 9) 森西洋平, 小林敏雄, 生産研究, (1990) 47.
- 10) Okamoto, M., J. Phys. Soc. Jpn. 63, (1994) 2102.
- 11) Kim, J., Moin, P. and Moser, R., J. Fluid Mech. 177, (1987) 133.