

有限体積法による流れ解析スキームの再評価

An Evaluation of Flow Analysis Schemes by Finite Volume Method

谷口 伸行*

Nobuyuki TANIGUCHI

This paper evaluates flow simulation schemes to analyze their accuracy consistently to the face interpolation in the finite volume method (FVM). A systematic way to derive high-order conservative schemes is described on the non-uniform grid. It is applied to a discretization of the continuity and momentum equations for incompressible flow simulation. A volume filter in a LES is also evaluated by the FVM concept.

1. はじめに

流れの方程式の数値解析において有限体積法（あるいはコントロール・ボリューム法）と呼ばれる考え方がある。そこでは、流れの基礎式に対して物理量の保存という導出の過程にさかのぼって、離散化された代数方程式においても変数となる物理量の保存則を満たすように定式化がなされる。その結果、差分法でいうところの保存型スキーム（または、発散型とも呼ぶ）が自然な手順で導出される。有限体積法に基づき導出された離散式と保存型の差分式は1次元の系で考える限りは一般に一致するので、2つの手法の間に矛盾はない。そのため、有限体積法を差分法における保存型の物理的解釈にのみ用いる議論がしばしばなされているが、離散式の近似精度、安定性、あるいは、保存型の意味などを考えるとき両者を混同するのは必ずしも正確な議論といえない。

本論では有限体積法の考え方を他の手法-差分法や有限要素法-と対比しつつ検討し直してみる。また、有限体積法の定義に従った方法で離散式の近似精度を評価して、差分法におけるスキームの次数精度と一致することを確認するとともに、高次精度の有限体積法スキーム=保存型差分法スキームの導出について述べる。

2. 有限体積法の考え方

差分法や有限要素法が任意の微分方程式を対象としているのに対して、有限体積法は流れ場の保存方程式に特有の離散化手法として考えられる。すなわち、保存形で書かれる微分式、いわゆる対流項と拡散項に対してだけ有効であ

り、これらの微分が有限体積法ではFlux（流束）という概念を通して、離散化式の上でも保存則、

$$\int \frac{\partial(u\phi)}{\partial x} dx = [u\phi]_{i+\frac{1}{2}} - [u\phi]_{i-\frac{1}{2}} \quad (1a)$$

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx = \left[v \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2}} - \left[v \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{i-\frac{1}{2}} \quad (1b)$$

として定式化される。この関係は、ベクトル解析におけるストークスの発散定理として多次元にも容易に拡張される。形式的には他の項についても有限体積法で扱うことができるが、実際の演算には差分法や有限要素法が援用される。

ところで、差分法や有限体積法を有限要素法（重み付き残差法）の考え方と比較してみると、微分方程式の解の近似式と評価式の重み関数は図1のように定義できる。差分法や有限体積法では、近似解が離散値の（線形）関数として比較的自由に定義できるのに対して、重み関数は限定されている。ここで、有限体積法における重み積分、

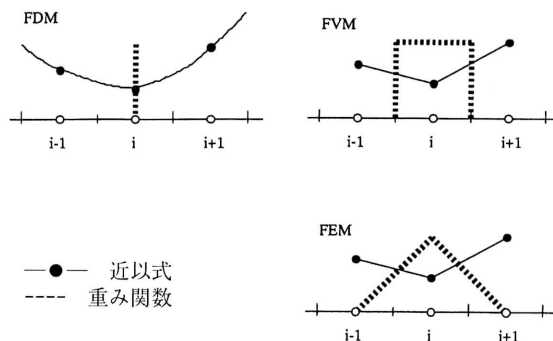


図1 近似解と重み関数

*東京大学生産技術研究所 第2部

$$\int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \phi_i dx = \bar{\phi}_i \Delta_i \quad (2)$$

は物理量 ϕ の平均値を表しており、離散的な変数として保存すべきは ϕ よりむしろ $\bar{\phi}$ と考えられる。有限体積法には、変数を ϕ とするか $\bar{\phi}$ とするかによって 2 種類の考え方があり得る。前者からは有限要素法に類似の定式が得られ、差分法の保存型スキームに対応するのは $\bar{\phi}$ を変数とする後者の方法であることを以下に示す。

上に述べたとおり有限体積法の意味は対流、拡散項の離散化にある。これらの離散化スキームは、重み関数で切りとられた積分体積（セルと呼ぶ）の境界値の補間式により定義される。境界面の補間値はテーラー級数で近似でき、たとえば、等間隔格子において対流項 QUICK スキーム、

$$\frac{3}{8}\phi_{i+1} + \frac{6}{8}\phi_i - \frac{1}{8}\phi_{i-1} = \phi_{i+\frac{1}{2}} + O(\Delta^3) \quad (3)$$

が導出される。ここで、補間式 (3) が 3 次精度であるにもかかわらず、差分法において QUICK スキームは 2 次精度でしかない点に注意されたい。この違いは、

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}} / \Delta_i = \bar{\phi}'_i \neq \phi'_i \quad (4)$$

であることによるもので、セル中心に離散点を定義すると、

$$\bar{\phi}'_i = \phi'_i + \frac{\Delta^2}{24} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + O(\Delta^4) \quad (5)$$

と評価される。式 (5) の右辺は有限要素法における質量行列に対応する。この場合、保存される量は平均値 $\bar{\phi}$ であり、 ϕ の保存性は式 (5) (定義では式 (2) 積分) の定式に依存し一般には保証されない。

次に、平均値 $\bar{\phi}$ を変数とする場合について考える。ここでは、テーラー展開の起点をセル境界にとると定式が容易になる。すなわち、近似解をセル境界 $i+1/2$ から展開し、式 (2) に従って積分すると、

$$\bar{\phi}_{i+1} = \phi + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta^2 + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Delta^3 + O(\Delta^4) \quad (6a)$$

$$\bar{\phi}_i = \phi - \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta^2 - \frac{1}{24} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Delta^3 + O(\Delta^4) \quad (6b)$$

$$\bar{\phi}_{i-1} = \phi - \frac{3}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta + \frac{7}{6} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta^2 - \frac{15}{24} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Delta^3 + O(\Delta^4) \quad (6c)$$

を得る。ここから、対流項 QUICK スキームは、

$$\frac{3}{8}\bar{\phi}_{i+1} + \frac{6}{8}\bar{\phi}_i - \frac{1}{8}\bar{\phi}_{i-1} = \phi_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta^2 + O(\Delta^3) \quad (7)$$

と表される。今度は、補間誤差が微分方程式へそのまま、

$$QUICK = \bar{\phi}'_i + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Delta^2 + O(\Delta^3) \quad (8)$$

と関連づけられる。式 (6) からは任意精度の補間スキームが導出でき、一般に差分法の保存スキームと一致する。

上に述べた ϕ , $\bar{\phi}$ を離散変数とするいずれのスキームも有限体積法に基づいて定式化されている限り式 (2) で定義する量 $\bar{\phi}$ を保存するが、離散化スキームの保存性が数値計算の安定化に寄与するのは直接には離散変数の (総和の) 有界性 (boundedness) を保証する条件としてである。この狭い意味の保存型スキームは上に示した通り変数 $\bar{\phi}$ に対して得られる。また、多次元においては、

$$\int_{S_i+\frac{1}{2}} \phi dS - \int_{S_i-\frac{1}{2}} \phi dS = \int_V \frac{\partial \phi}{\partial x} dV \quad (9)$$

であることから、 $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ をセル境界積分におき直せば、式 (6) が各座標方向にそのまま適用できることを付記しておく。

3. 有限体積法スキームの導出

上に述べた有限体積法の考え方に従って、流れ場の対流項、拡散項に現れる 1 階、2 階の微分項を近似する。そのためにはセル境界での補間値 $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ を得ればよい。式 (6) を不等間隔格子 (図 2) に拡張すると、

$$\bar{\phi}_{\pm} = \frac{\Delta_{\pm}}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\Delta_{\pm}^2}{6} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \pm \frac{\Delta_{\pm}^3}{24} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + O(\Delta^4) \quad (10a)$$

$$\bar{\phi}_{\pm\pm} = \phi_{\pm} \pm \frac{\Delta_{\pm\pm}}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{(\Delta_{\pm\pm} + \Delta_{\pm})^2 - \Delta_{\pm}^2}{6} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \pm \frac{(\Delta_{\pm\pm} + \Delta_{\pm})^3 - \Delta_{\pm}^3}{24} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + O(\Delta^4) \quad (10b)$$

が得られる。そこで、セル境界の近傍 4 点からの補間式を一般に、

$$a\bar{\phi}_{++} + b\bar{\phi}_{+} + c\bar{\phi}_{-} + d\bar{\phi}_{--} = F \quad (11)$$

と表すと、各係数は以下のマトリックスを解いて得られる。

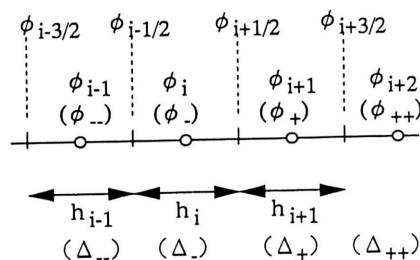


図 2 不等間隔格子の配置

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{\Delta_{++}}{2} & \frac{\Delta_+}{2} & \frac{\Delta_-}{2} & -\frac{\Delta_-}{2} \\ \frac{(\Delta_{++}+\Delta_+)^2-\Delta_+^2}{6} & \frac{\Delta_+^2}{6} & \frac{\Delta_-^2}{6} & \frac{(\Delta_{++}+\Delta_+)^2-\Delta_+^2}{6} \\ \frac{(\Delta_{++}+\Delta_+)^3-\Delta_+^3}{24} & \frac{\Delta_+^3}{24} & \frac{\Delta_-^3}{24} & \frac{\Delta_-^3-(\Delta_{--}+\Delta_-)^3}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここで、右辺は誤差を含めた補間項を表し、たとえば、

$$F = \phi_{i+\frac{1}{2}} (+0(\Delta^4)); S = (1, 0, 0, 0)^t \quad (13a)$$

$$F = \phi'_{i+\frac{1}{2}} (+0(\Delta^3)); S = (0, 1, 0, 0)^t \quad (13b)$$

とおく。等間隔格子においては、それぞれ、以下となる。

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{\phi}_{i+1} + \bar{\phi}_i}{2} - \frac{\bar{\phi}_{i+2} - \bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i-1}}{12} + 0(\Delta^4) \quad (14a)$$

$$\phi'_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{\phi}_{i+1} + \bar{\phi}_i}{\Delta} - \frac{\bar{\phi}_{i+2} - 3\bar{\phi}_{i+1} + 3\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_{i-1}}{12\Delta} + 0(\Delta^4) \quad (14b)$$

1, 2 階微係数は式 (11), または、式 (14) から以下の様に得られる。(\$\hat{\phi}\$ は上記の差分近似を表す)

$$\bar{\phi}'_i = \frac{\hat{\phi}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{\phi}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta} + 0(\Delta^4) \quad (15a)$$

$$\bar{\phi}''_i = \frac{\hat{\phi}'_{i+\frac{1}{2}} - \hat{\phi}'_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta} + 0(\Delta^3) \quad (15b)$$

前節で QUICK スキームに対して示した様に、補間式 (11), (14) の次数精度がそのまま微係数の近似式 (15) に反映することに注意されたい。

また、近傍 2 点からの次の補間式も式 (11) と同等の精度を持つ。

$$\hat{\phi}_{i+\frac{1}{2}} = a\bar{\phi}_{i+1} + b\bar{\phi}_i + c\bar{\phi}'_{i+1} + d\bar{\phi}''_i \quad (16a)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta_{i+1}}{2} & -\frac{\Delta_i}{2} & 1 & 1 \\ \frac{\Delta_{i+1}^2}{6} & \frac{\Delta_i^2}{6} & \frac{\Delta_{i+1}}{2} & -\frac{\Delta_i}{2} \\ \frac{\Delta_{i+1}^3}{24} & -\frac{\Delta_i^3}{24} & \frac{\Delta_{i+1}^2}{6} & \frac{\Delta_i^2}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16b)$$

$$\hat{\phi}'_{i+\frac{1}{2}} = \alpha\bar{\phi}_{i+1} + \beta\bar{\phi}_i + \gamma\bar{\phi}''_{i+1} + \delta\bar{\phi}''_i$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta_{i+1}}{2} & -\frac{\Delta_i}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\Delta_{i+1}^2}{6} & \frac{\Delta_i^2}{6} & 1 & 1 \\ \frac{\Delta_{i+1}^3}{24} & -\frac{\Delta_i^3}{24} & \frac{\Delta_{i+1}^2}{2} & -\frac{\Delta_i^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

この場合、等間隔格子では、

$$\hat{\phi}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{\phi}_{i+1} + \bar{\phi}_i}{2} - \frac{\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i}{6} + 0(\Delta^4) \quad (17a)$$

$$\hat{\phi}'_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i}{\Delta} - \frac{\bar{\phi}''_{i+1} - \bar{\phi}''_i}{12\Delta} + 0(\Delta^4) \quad (17b)$$

となり、いわゆるコンパクト・スキーム¹⁾の保存型表式を表している。ここに示した手順に従えば、不等間隔格子において任意次数精度の保存型スキームが導かれる。

4. 流れ場方程式の離散化

ここでは、流れ場方程式の各項の離散化について考える。まず連続の式を有限体積法で評価すると

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}}{h_x} + \frac{v_{i+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}}{h_y} = 0 \quad (18)$$

となる。セル境界での速度を 2 次精度の中心補間で与えると、

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_i}{2} = u_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{6} u'' + 0(h^4) \quad (19)$$

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{u}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2h} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 0(h^4) \quad (20)$$

となり、式 (5) を適用すると一階微分 \$u'\$ について \$x\$ 方向に \$2h\$ の幅の平均値を与えていることが分かる。2 (3) 次元でも形式的には有限要素法的に点 \$i\$ を囲む 4 (6) 点を結ぶ領域 (図 3) の平均と評価できる。有限体積法の定義に従う積分セルでの質量保存を正確に表すためには、\$\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}\$ に対して高次の補間、たとえば、式 (14a) などが必要である。

つぎに運動量式についてみると、対流項スキームは有限体積法に従い、

$$\frac{\partial (u\phi)}{\partial x} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}}\phi_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}\phi_{i-\frac{1}{2}}}{h} \quad (21)$$

となる。運動方程式を \$\bar{\phi}\$ (運動量成分を表す) の保存式と考えると、右辺各項の積の一方 \$\phi\$ に対するスキームは運動量の補間精度に関して他の項と整合性が求められるが、他方 \$u\$ は形式的には既知量でありその制約を受けない。ただし、非圧縮性流れでは運動エネルギー式が連続の式と

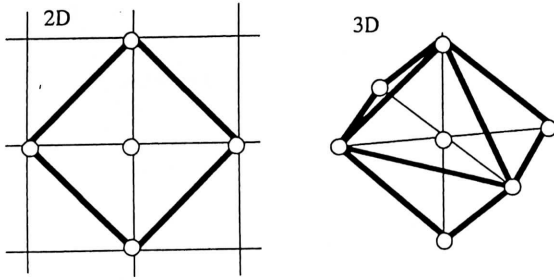


図3 2次精度スキームの平均領域

運動方程式から従属的に得られることから、離散化式において質量、運動量およびエネルギーの3つの保存が成り立つには、連続の式と運動方程式がそれぞれに保存性を満たすだけでなく、両者の離散化に整合性が必要である。すなわち、 ϕ の補間式にかかわらず、 u の補間については連続の式と同じスキームを用いて評価すべきである²⁾。

補間式 (19) を式 (21) 右辺 u と ϕ の両方に用いると、

Eq. (21) \doteq

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_i}{2} \cdot \frac{\bar{\phi}_{i+1} + \bar{\phi}_i}{2} - \frac{\bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{2} \cdot \frac{\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i-1}}{2} \right] / h \\ &= \frac{1}{4h} (\bar{u}_{i+1} \bar{\phi}_{i+1} - \bar{u}_{i-1} \bar{\phi}_{i-1}) \\ &+ \frac{1}{4h} \bar{u}_i (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_{i-1}) + \frac{1}{4h} \bar{\phi}_i (\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}) \quad (22) \end{aligned}$$

となり、連続の式が同じ式 (19) で定義されていれば、エネルギー保存性を有する skew 差分スキームに一致する。ただし、上に述べた通り連続の式、運動方程式においてこのスキームが保存するのは有限体積法セルで定義される $\bar{\phi}$ ではなく、図3の領域の平均 $\bar{\phi}$ ($\bar{\Delta} > \bar{\Delta}$) であることに注意されたい。よって、平均 $\bar{\phi}$ では評価されない高波数の変動については解の有界性を保証しないことがありうる。

拡散項についても、セル境界で一階微分に対して、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i}{h} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + O(h^4) \quad (23)$$

と近似すると、層流ならば2階微分項として

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\bar{\phi}_{i+1} - 2\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i-1}}{h^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + O(h^4) \quad (24)$$

が導かれるが、これに対する平均幅は $\sqrt{2}h$ と評価される。平均値 $\bar{\phi}$ の方程式として正確なスキームはより高次の補間式 (14b), (17b) から得られる。

次に圧力項をみると、 $\bar{\phi}$ と同様に体積セル平均 \bar{p} を変数とした場合にスキーム精度は一階微分 u' と同じ様に評価できる。非圧縮性流れ解析で広く用いられる MAC 法

や SIMPLE 法では連続の式のかわりに圧力ポアソン式を解いて圧力 \bar{p} を定めるが、補間式 (19) を運動方程式の圧力項と連続の式に用いて圧力ポアソン式を形式的な代入で求めると、

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} \doteq \frac{\bar{p}_{i+2} - 2\bar{p}_i + \bar{p}_{i-2}}{4h^2} \quad (25)$$

となり圧力解の空間振動を生じてしまう。これは、すでに述べたように補間式 (19) が体積セルでの保存を正確に表現していないことによる。非圧縮流れ解析で圧力項の働きは速度場が連続の式を満たすための修正であることを考慮すれば、圧力式の導出にはまず連続の式から評価すべきである。すなわち、式 (19) の境界速度 u における圧力の寄与を、

$$u^*_{i+\frac{1}{2}} = \alpha \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\alpha \text{ は影響係数}) \quad (26)$$

とおき、たとえば補間式 (23) で近似して式 (18) に代入すると圧力ポアソン式の2階微分に式 (24) と同じスキームを得る。一方で、運動方程式を式 (26) から得ると考えると圧力項は、

$$\frac{\partial p}{\partial x} \doteq \left(\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}} \right) / 2 \doteq \frac{\bar{p}_{i+1} - \bar{p}_{i-1}}{2h} \quad (27)$$

となり式 (19), (20) と矛盾のない定式を得る。

前節から述べている様に、体積セルにおける保存を正確に表すには式 (26) に高次補間が必要で、たとえば式 (14b) を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}} &= \\ & \frac{\bar{p}_{i+1} - \bar{p}_i}{h} - \frac{\bar{p}_{i+2} - 3\bar{p}_{i+1} + 3\bar{p}_i - \bar{p}_{i-1}}{12h} + O(h^4) \quad (28) \end{aligned}$$

を得る。また、

$$\bar{p}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{p}_{i+1} + \bar{p}_i}{2} - \frac{\bar{p}_{i+2} - \bar{p}_{i+1} - \bar{p}_i + \bar{p}_{i-1}}{12} + O(h^4) \quad (29)$$

から運動方程式の圧力項、

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_i = \frac{-\bar{p}_{i+2} + 8\bar{p}_{i+1} - 8\bar{p}_{i-1} + \bar{p}_{i-2}}{12h} \quad (30)$$

を得る。

5. 有限体積法と体積フィルター

ここでは、有限体積法スキームの応用として、乱流のラージ・エディ・シミュレーション (LES) に現れる体積フィルターの定式化を示してみる。

LES では乱流変動のうち大スケール成分 (Grid Scale : GS と呼ぶ) と小スケール成分 (Sub-grid Scale : SG と呼ぶ) にわけて前者 (GS) のみを直接数値計算し, 後者の効果はモデル (SGS モデル) により表す. ここで, 流れの基礎方程式から大スケール成分を分離するために「空間フィルター」という考え方が用いられ³⁾, 差分法計算 (有限体積法も含む) においては, 多くの場合,

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \phi dx \quad (31)$$

で定義される「体積平均フィルター」を仮定している. ここで, Δ はフィルター幅で 2 つの成分を分離するスケールを表し, LES では格子幅に対応付けられる. 一見して分かるとおり, 式 (31) は有限体積法の重み積分式 (2) と同じ形式であり, フィルター幅 Δ を格子幅 h と等しいと定義すると, 有限体積法で離散化された変数 $\bar{\phi}$ が, そのまま LES の GS 成分を表していることが分かる. このことは, 粗い格子による乱流の直接差分計算は, SGS モデルを無視した LES に相当することを示している.

LES の SGS モデルの幾つかは空間フィルターを用いて定式化されており, 数値解析において空間フィルターの計算スキームが必要であるが, 式 (2), (31) の関係をみれば有限体積法と同様の手順で導出できる. たとえば, $\Delta = h$ として格子点 i 近傍の解を 2 次関数で近似すると等間隔格子では,

$$\bar{\phi}_i = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (ax^2 + bx + c) dx = \frac{h^2}{12} a + c \quad (32a)$$

$$\bar{\phi}_{i\pm 1} = \frac{13}{12} h^2 a \pm hb + c \quad (32b)$$

$$\phi = ax^2 + bx + c; \begin{cases} a = \frac{1}{2h^2} (\bar{\phi}_{i+1} - 2\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i-1}) \\ b = 0 \\ c = \bar{\phi}_i - \frac{1}{24} (\bar{\phi}_{i+1} - 2\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i-1}) \end{cases} \quad (33)$$

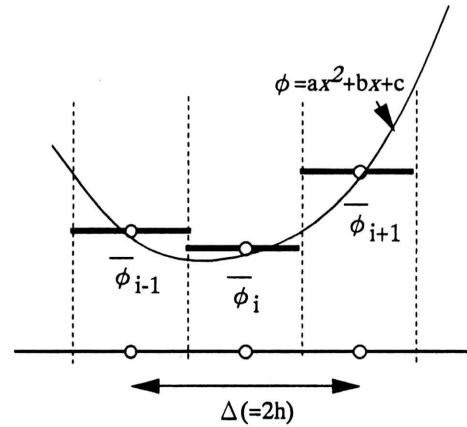
を得る. 式 (33) は Simpson 積分公式に類似するが, 離散変数は $\bar{\phi}$ に対して定義されており, 変数 ϕ に対する通常の定式とは係数が若干異なる. 式 (6) を参考に点 i からの展開式

$$\bar{\phi}_i = \phi_i + \frac{h^2}{24} \phi_i'' + 0(h^4) \quad (34a)$$

$$\bar{\phi}_{i\pm 1} = \phi_i \pm h\phi_i' + \frac{13}{24} h^2 \phi_i'' + 0(h^3) \quad (34b)$$

および

$$\phi = \phi_i + x\phi_i' + \frac{x^2}{2} \phi_i'' + 0(h^3) \quad (35)$$



より (33) 式を評価すれば,

$$\phi = ax^2 + bx + c + 0(h^3) \quad (33')$$

であり, 式 (5) を考慮すれば, 式 (32) は ϕ と $\bar{\phi}$ を区別できる最低次の近似といえる (よって, 台形公式では数値誤差を生じる^{4), 5)}). 式 (33) を定義式 (31) に従って積分すれば形式的には任意のフィルター幅 $\bar{\Delta}$ に対して

$$\bar{\phi}_i = \bar{\phi}_i + \frac{\gamma^2 - 1}{24} (\bar{\phi}_{i+1} - 2\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i-1}); \gamma = \frac{\bar{\Delta}}{h} \quad (36)$$

を得る. また, 同様に境界 $i+1/2$ 基準の展開式 (6) からは,

$$\bar{\phi}_{i+1/2} = \frac{\bar{\phi}_{i+1} + \bar{\phi}_i}{2} + \frac{\gamma^2 - 4}{48} (\bar{\phi}_{i+2} - \bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i-1}) \quad (37)$$

が得られる.

LES の SGS モデルとして Germano⁶⁾ が提案したダイナミックモデルでは, GS 成分 $\bar{\phi}$ にさらにフィルター操作を加えた $\tilde{\phi} (= \hat{\phi} = (\hat{\phi}))$ を用いて定式化される. ここで, GS 成分で仮定されるフィルター幅 $\bar{\Delta}$ (格子フィルター) とフィルター幅 $\tilde{\Delta} (= \hat{\Delta})$ (テストフィルター) の比として, 従来の研究に従って

$$\tilde{\Delta} = 2\bar{\Delta} (= 2h) \quad (38)$$

を採用すると, 式 (36) から等間隔格子では,

$$\tilde{\phi}_i = \bar{\phi}_i + \frac{1}{8} (\bar{\phi}_{i+1} - 2\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i-1}) + 0(h^4) \quad (39)$$

あるいは, 式 (37) から

$$\tilde{\phi}_{i+1/2} = \frac{\bar{\phi}_{i+1} + \bar{\phi}_i}{2} \quad (40)$$

を得る. 式 (40) は偶然であるが体積フィルターの定義を厳密に満たす.

ところで、空間フィルターとして Gaussian フィルターを仮定した場合も体積フィルターと同じ（誤差項は異なる）式（5）の近似が成り立つ³⁾。また、Gaussian フィルターの定義

$$\bar{\phi} = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) \phi dx ; G(x) = \sqrt{\frac{6}{\pi \Delta^2}} \exp\left(-\frac{6x^2}{\Delta^2}\right) \quad (41)$$

から上記のフィルター幅については

$$\bar{\Delta}^2 = \Delta^2 + \hat{\Delta}^2 \quad (42)$$

の関係があり、 $\hat{\Delta} = \sqrt{3}h$ に対して式（5）から導かれる

$$\bar{\phi}_i = (\hat{\phi}_i) \doteq \bar{\phi}_i + \frac{1}{8}(\bar{\phi}_{i+1} - 2\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i-1}) \quad (43)$$

は式（39）と一致（式（40）についても同様）し、式（42）は体積フィルターに対しても適切な近似であることがわかる。

6. ま と め

有限体積法の定義に基づいて任意次数精度の離散化ス

キームが得られ、差分法の保存型スキームに一致することを確認した。この考え方に従って、非圧縮性流れ方程式の離散化スキームの他、LES の空間フィルターについても検討した。ここで取り上げた計算スキームは各々には既に提案され評価されているものであるが、有限体積法による定式化は物理的意味を理解する上で見通しが良い様に思う。

(1995年11月13日受理)

参 考 文 献

- 1) Lele, S. K., Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution, J. Comput. Phys. 103, 16-42 (1992).
- 2) 森西, 中林, 田畑, 非圧縮性流体解析におけるエネルギー保存性, 第9回 NST シンポジウム, 131-138 (1994).
- 3) Leonard, A., Energy Cascade in Large Eddy Simulation of Turbulence Fluid Flow, Adv. Geophys. 18A, 237-248 (1989).
- 4) 堀内, 差分法による LES について, 生産研究 42-1, 43-46 (1990).
- 5) 谷口, 戴, 小林, Dynamic SGS モデルの差分法における定式化, 第9回 NST シンポジウム, 49-52 (1994).
- 6) Germano, M. et al., A dynamicsub-grid scale eddy viscosity model, Phys. Fluids A3 (7), 1760 (1991).