

有限要素法によるチャネル乱流の LES (第 3 報)

Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flow Using Finite Element Method

坪倉 誠*・小林 敏雄*・谷口 伸行*・大島 まり*
Makoto TSUBOKURA, Toshio KOBAYASHI, Nobuyuki TANIGUCHI and Marie OSHIMA

1. はじめに

近年の計算機性能の向上に伴い、いままでは比較的簡単な形状の乱流場において適用されてきた Large Eddy Simulation (LES) の、工学上有用な複雑形状を有する乱流場、もしくは壁剪断流、噴流、後流などが複合したような複雑乱流への適用が期待されている。一方 LES の Sub-grid scale (SGS) model, とくに渦粘性モデルにおける 2 つのスケールのうち、速度スケールについてはエネルギーの輸送方程式を考慮して解かれるが長さスケールについては、一般に計算格子の形状から求められる。この場合構造格子においてみられるアスペクト比の大きな格子は通常用いられる計算格子の体積から求めた場合、長さスケールを適切に評価しない可能性がある。一方近年、乱流場における組織的構造が乱流エネルギーの輸送などに重要な役割をはたすことが指摘されている。例えば壁乱流においては壁近傍にストリークなどの組織構造が観察される。これらの組織構造を適切に数値計算で再現するためには壁近傍において壁方向のみならず壁に平行な方向にもかなり細かい計算格子を必要とする反面、壁から離れた領域では乱流構造はより等方的であり、LES を用いる場合、比較的粗い格子で十分であるという問題がある。筆者らはこれらの問題の解決策として有限要素法が非常に有力な手段になると考え、有限要素法により LES を行うべく、プログラム開発、対流項のテストを行い、チャネル乱流へ適用してきた^{1),2)}。

本研究においてはチャネル乱流を、スパン方向の要素を壁近傍においては乱流の組織構造を捕らえるために細かくし、チャネルの中心においては粗くした非構造格子を用いて LES 解析を行い、同じ解析コードによる同じ要素数の構造格子による結果、ならびに DNS³⁾、実験値⁴⁾と比較した。

*東京大学生産技術研究所 第 2 部

2. 基礎式

解析対象は非圧縮性 Newton 流体とし、Sub-grid scale model としては Deardorff⁵⁾ により初めてチャネル乱流の数値解析に適用された Smagorinsky model を採用する。すなわち本研究における基礎式は以下のようになる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(2\nu_t \bar{S}_{ij} \right) \quad (2)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 (2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2} \quad (4)$$

ただし、Smagorinsky 定数 C_s は 0.1 とし、渦粘性係数には壁近傍の漸近挙動を捕らえるために、Van Driest 型⁶⁾の減衰関数 $f(y^+) = 1 - \exp(-y^+/25)$ を乗じている。

3. 計算手法

基礎式は重み付き残差法により弱形式化した後、ガラーキン法により空間離散化される。本研究においては図 1 に示す 8 節点要素を用いた。速度は要素の各節点で定義され、圧力は要素内で一定とする。(即ち、速度 1 次、圧力 0 次) 時間については 2 次の Adams-Bashforth 法を適用する。またアルゴリズムには陽的解法である MAC 法を採用した。以下に MAC 法に基づく有限要素行列式を示す。

$$C^T M^{-1} C \bar{P}^n = -\frac{1}{\Delta t} C^T \bar{u}^n + C^T M^{-1} (1.5F^n - 0.5F^{n-1}) \quad (5)$$

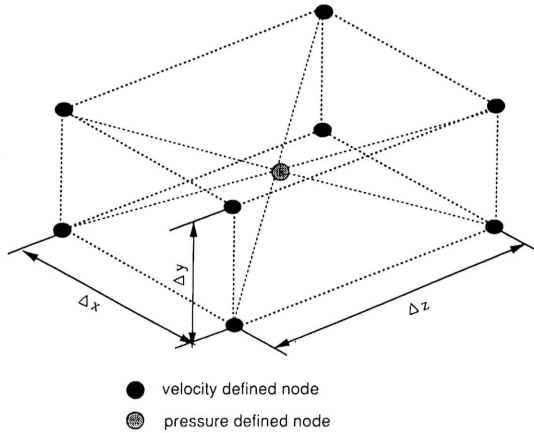


図1 六面体要素

$$\bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n + \Delta t M^{-1} [C^p \bar{p}^n - (1.5F^n - 0.5F^n)] \quad (6)$$

ただし,

$$F^n = B^n (\bar{u}^n) \bar{u}^n + D^n (\bar{u}^n) \bar{u}^n - f^n \quad (7)$$

とする。式中、太字はマトリックスを表しているものとする。ここに、M, C, B, D はそれぞれ質量、勾配、対流、拡散マトリックスである。

圧力 Poisson 方程式は CG 法による反復解法により解かれる。

尚、有限要素法は差分法と比較して一般にかなり多くの計算容量と CPU 時間を必要とし、このことが有限要素法解析の大きな欠点の一つとなっており、本研究においては計算容量と CPU 時間を減らすために、質量マトリックスの各行（もしくは列）成分を対角成分に足しあわせることで対角化している。また、対流項に対しても輸送速度に対して圧力の精度と同精度で評価する方法を取っている²⁾。この簡略化の結果、CPU 時間、計算容量とも、差分法とほぼ同じオーダーとなっている。

4. 計算条件

計算領域は図2に示す通り流れ方向 3.2H、チャンネル幅 H、スパン方向 1.6H、である。以下、流れ方向、壁方向、スパン方向をそれぞれ x, y, z とする。尚、主流方向、スパン方向は周期境界条件とし、壁上では no-slip 条件を適用した。また、レイノルズ数は摩擦速度とチャンネル幅で無次元化して 360、時間ステップは 0.0005、CG 法の収束条件は 10^{-10} である。このとき、圧力の反復回数はほぼ 130 回であった。尚、計算においては流れ方向に無次元化した圧力勾配 -2 を陽的に与えて流れ場を維持している。

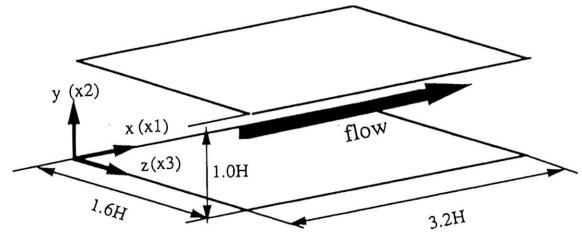


図2 流れ場の概観

5. 構造格子と非構造格子

本研究に用いた格子を図3に示す。本研究においては構造格子、非構造格子の2種の格子を用いた。どちらも流れ方向には32の等間隔要素を用い、壁に垂直方向は40の非等間隔要素を用いている。ただしスパン方向は CASE A においては32の等間隔要素を用い、CASE B においては壁近傍、即ち $0 < y^+ < 5.7$ においては64の等間隔要素を用い、 $5.7 < y^+ < 21.5$ においては32の等間隔要素、 $21.5 < y^+ < 180$ においては16の等間隔要素を用いている。計算に用いた全要素数は両ケースとも40,960である。壁近傍における組織構造を捕らえるには、より壁から離れた領域においてもスパン方向に64要素を用いる必要があると思われるが、本研究においては両ケースにおいて同じ要素数を用いて計算するために、CASE B の壁近傍のスパン方向の要素数は $y^+ < 5.7$ の領域とやや小さくなっている。構造格子、

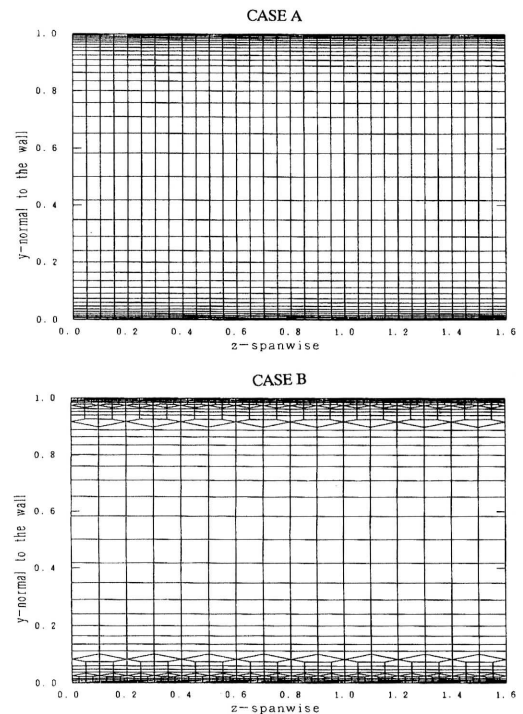


図3 格子分割

非構造格子とも、流れ方向の要素幅は $\Delta x^+ = 36$ 、壁方向は最小要素幅 $\Delta y^+ = 1.1$ である。壁方向の要素幅は前報よりさらに壁近傍を細かくしている。スパン方向の要素幅は CASE A は $\Delta z^+ = 18$ 、CASE B は壁近傍から離れるにしたがって $\Delta z^+ = 9, 18, 36$ と広がっている。

6. 計算結果

図 4 に平均流速分布を示す。図中の破線は $u^+ = y^+$ 、並びに $u^+ = 2.5 \log y^+ + 5.5$ である。構造格子 CASE A、非構造格子 CASE B とも経験則と比較的よくあっているが、CASE A においては対数則領域でやや小さな値となっているのに対して、CASE B においてはやや大きな値となっている。ただし、差分法による LES の低レイノルズ数のチャンネル解析においては、スパン方向の格子が十分でない場合対数則領域で経験則と比較してやや大きな値となることが知られている。対数則領域で傾きがほぼ経験則に一致した場合、経験則にのるかどうかは、壁近傍での摩擦速度の予測精度によるところが大きく、この意味で CASE B は壁近傍で CASE A より、より細かい格子を用いたことによる成果があらわれていると考えられる。

図 5 に乱流強度の GS 成分を示す。流れ方向の乱流強度について、CASE A と比較して CASE B の方が壁近傍 $y^+ < 10$ 近辺でよい結果を示していることが分かる。ただし、 $y^+ = 20$ 近辺において CASE B の結果がやや不自然な挙動を示している。またこの挙動はスパン方向の乱流強度においてもみられる。この領域は CASE B においてスパン方向の要素を 32 から 16 へ変化させている領域であり、要素の幅の急激な変化が流れ場に影響を及ぼしているものと考えられる。

この影響を調べるために図 6 に $y^+ \sim 20$ 、即ち両ケースにおいて流れ方向、スパン方向とも 32 要素を用いている領域での流れ方向、スパン方向の 1 次元エネルギースペクトルの 3 成分を示す。流れ方向のスペクトルは CASE A、CASE B とも高周波成分がほぼ理想的にカットされてい

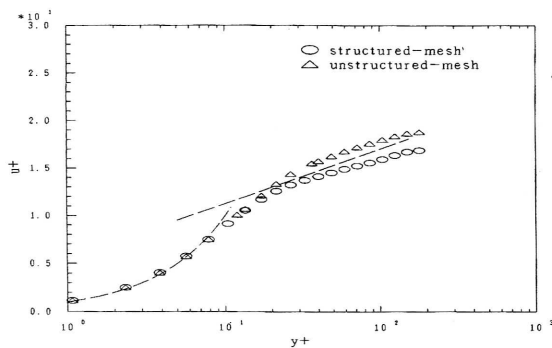


図 4 平均流速分布

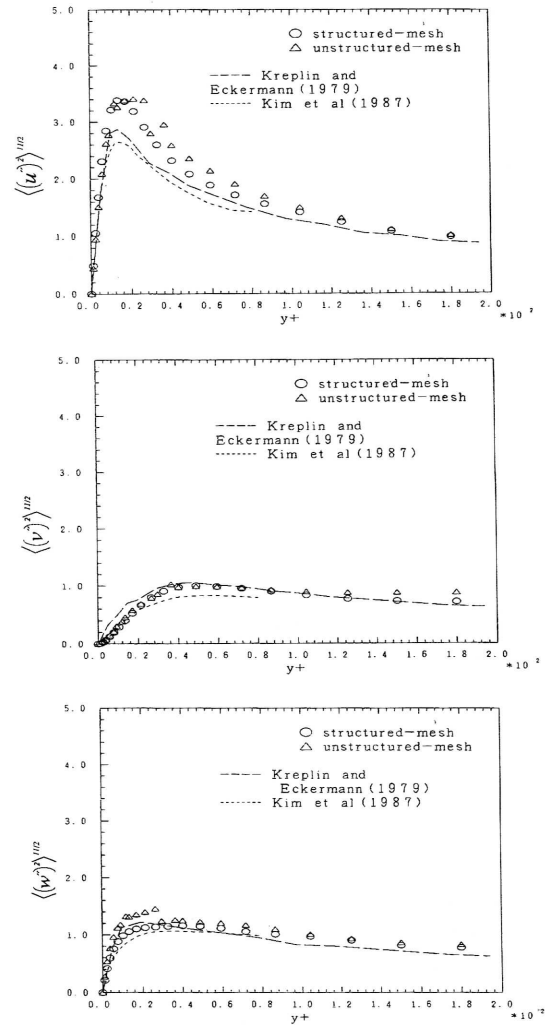


図 5 乱流強度分布

るが、スパン方向のスペクトルは CASE A においては問題はみられないが CASE B においては高周波領域に不自然なピークがみられ、スパン方向の格子サイズの急激な変化による影響がでたものと思われる。

図 7 に壁近傍 $y^+ = 2.4$ における $x-z$ 面上の流れ方向の速度擾乱の等高線図を示す。図中実線は正值を、波線は負値をあらわしている。CASE A、CASE B とも壁乱流の実験、DNS において顕著にみられるストリーク構造が再現されているのが分かる。但し、CASE A と比較した場合、CASE B においてはより細かい乱流構造が再現されている。

7. ま と め

有限要素法による非構造格子を用いて、チャンネル乱流の LES 解析を行った。壁近傍の乱流の組織構造を詳細にと

研究速報

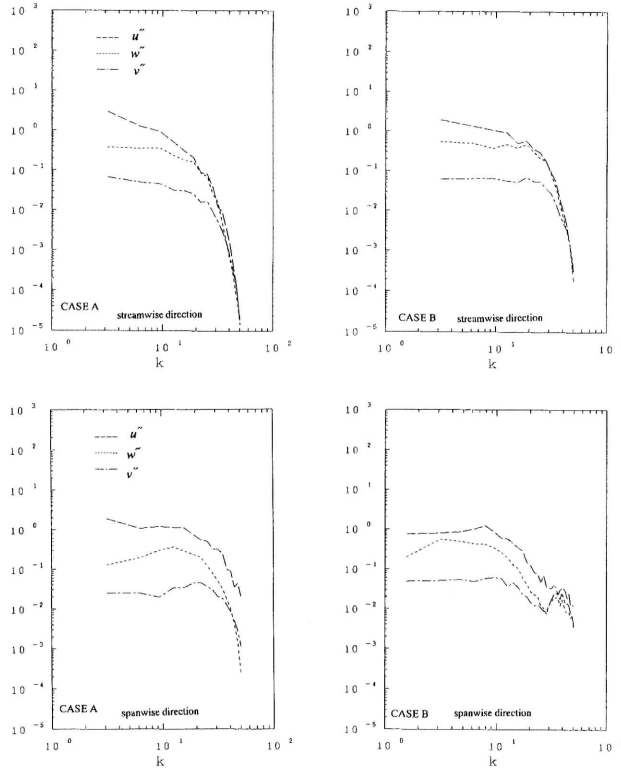


図6 1次元エネルギースペクトル

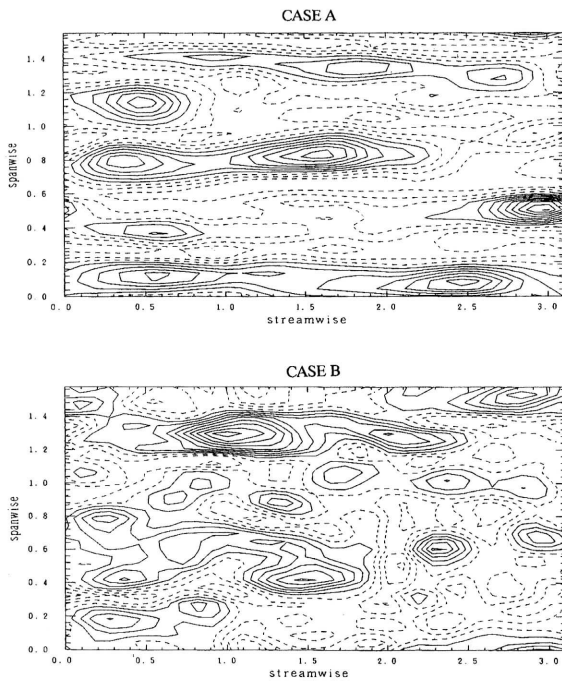


図7 流れ方向速度擾乱

らえるために、特にスパン方向の格子数を壁近傍で増やし、乱流が等方的になるチャンネル中心で比較的粗い格子を用いて解析を行い、その結果を構造格子による結果、DSNの結果と比較した。平均流速、 $y^+ < 10$ においては非構造格子を用いたことによる改善がみられたが、一方、スパン方向の格子数が32から16にかわる領域において乱流強度に不自然なピークがみられた。またこの領域近傍のエネルギースペクトルにおいてもこの影響がみられた。LESにおいては格子平均の概念が重要であり、この意味で格子の大きさを急激に変化させたことが原因であると思われる。本研究においては構造格子、非構造格子において同じ要素数で解析を行ったため、スパン方向の要素数が急激に変化する領域が乱流強度がピーク値をもつ $y^+ = 20$ 近辺になってしまい、このような悪影響があらわれてしまったが、このような領域をよりチャンネル中央の領域に配置することで結果は改善されると思われる。また本研究において用いた6面体要素は格子配置については柔軟性に欠け、このような問題の解決策として4面体などの格子配置に対して比較的柔軟性のある要素を用いることが考えられるが、この点については今後の課題としたい。また、本研究においては計算容量と計算時間を減らすためにいくつかの修正マトリックスを用いた。これらの修正マトリックスを用いることの計算結果への影響については前報で述べた通り、DNSの結果と比較した場合あまり大きいとは思われないが、定量的な評価については今後の課題とする。(1995年11月10日受理)

参考文献

- 1) 小林他, 生産研究46巻2号, pp. 65 (1993).
- 2) 坪倉他, 生産研究47巻2号, pp. 54 (1994).
- 3) Kim, J., Moin, P. and Moser, J., J. Fluid Mech. 177, pp. 133 (1987).
- 4) Kreplin, H. and Eckermann, H., Phys. Fluids 22 (7), pp. 1233 (1979).
- 5) Deardorff, J. W., J. Fluid Mech. 41 part 2, pp. 453 (1970).
- 6) Van Driest, E. R., J. Aero. Sci. 23 (1956).