

# 振動問題に対するホモロジー設計の一定式

A Formulation of Homology Design for Vibration Problems

吉 川 暢 宏\*・北 村 礼\*・中 桐 滋\*

Nobuhiro YOSHIKAWA, Rei KITAMURA and Shigeru NAKAGIRI

## 1. は じ め に

古典的最適構造設計では、力学的健全性を保持した上で最小重量構造を見出すことを目的としていた<sup>1)</sup>。近年、現実味を帯びてきた宇宙構造等の新種の構造では、能動的制御系により高機能を果たさせようとしている<sup>2)</sup>。そのような構造に対しては、重量軽減のみならず目的とする機能を十分に発揮させる洗練された構造設計手法が必要となる<sup>3)~5)</sup>。構造の形状や方向等の幾何学的性状の制御精度が、達成された機能の良否を決定する場合には、構造の一部における変形を受動的に制御する方法が最適設計の一候補となり得る<sup>6),7)</sup>。そのような設計の一つがホモロジー設計であり、大口径電波望遠鏡の設計では、自重により構造が変形してもアンテナ形状を放物面に保つホモガス変形を実現することより、望遠鏡の解像精度を向上させている<sup>8),9)</sup>。ホモガス変形とは、構造の一部における幾何学的性状を変形前、中、後で保持する変形であり、要求される機能に応じたホモガス変形を実現することにより、電波望遠鏡の例のように能動的制御系の負荷を減ずることが可能である。

これまで、有限要素法を用いたホモロジー設計の定式がいくつか提示されているが、それらの多くは静的問題に限ったものであった<sup>10),11)</sup>。動的外荷重下でホモガス変形を実現する構造設計手法が提示できれば、制御負荷軽減の観点からのホモロジー設計の利用価値が増すと考えられる。動的問題では一般に、外荷重が振動モード形を支配する。したがって、外荷重を陽に取り入れて構造決定方程式を導出することが自然な発想である。しかしながら、得られた構造でホモガス変形が実現するか否かは荷重に依存することになり、荷重の不確定な変動によっては、ホモロジー設計を施した方がかえって機能の達成を阻害すること

にもなりかねない。

本研究では動的問題に対するホモロジー設計の一定式として、複数の固有振動モード形をホモガス振動モード形とする定式を提示する。この定式は、“動荷重に対する振動モード形は固有振動モードの重畳により表されるため、突出すると考えられるいくつかの固有振動モード形をホモガス振動モード形としておけば、動荷重の不確定な変動に対してもロバストなホモロジー設計が行える”との定性的予見に基づいている。

提示した手法の適否を、平面格子構造の面外曲げ振動に関する数値計算例により検討する。低次の複数固有振動モードにおいて、構造の中央リブを直線かつ水平に保持するホモガス振動モード形を実現する。このようにして得られた構造が低次固有振動数に近い動荷重を受ける場合、振動形が目的としたホモガス振動モード形に近くなるか否かを時刻歴解析により確認する。

## 2. 構造変更量決定方程式

ある試設計構造の存在を仮定し、それを線形弾性体として有限要素分割する。境界条件処理後の無減衰線形振動に関する固有値問題は式(1)となる。

$$([K] - \lambda^i [M]) \{\phi^i\} = \{0\} \quad (1)$$

$[K]$ ,  $[M]$  はそれぞれ剛性マトリクスと質量マトリクスであり、 $\lambda^i$  と  $\{\phi^i\}$  は  $i$  次の固有値と固有ベクトルを表す。以下では肩符  $i$  で  $i$  次の固有振動モードに関する量を表し、また式(1)の固有値問題の自由度を  $N$  とする。

$i$  次の単一固有振動モード形をホモガス振動モード形とする制約は、固有ベクトル  $\{\phi^i\}$  の成分に関するベクトル関数として式(2)で表現できる。

\*東京大学生産技術研究所 第1部

研 究 速 報

$$\{h(\phi^i)\} = \{0\}$$

(2)

簡単のため、この構造決定方程式を式 (7) と記す。

$\{h(\phi^i)\}$  の成分は  $J$  個とし、その成分は設定したホモロガス振動モード形に応じて種々の関数形で表される。本研究では、静止状態で直線である部材を振動中も直線に保つ線形ホモロガス振動モード形の実現を図る。その場合には  $\{h(\phi^i)\}$  の成分は固有ベクトル成分の一次式で表される。

初期の試設計に対する固有値問題 (1) を解いて得られた固有ベクトルが式 (2) を満足することは希であるので、 $M$  個の構造パラメータ  $p_m$  を適宜選択して試設計の構造変更を行う必要がある。本研究では無次元の設計変数  $\alpha_m$  を式 (3) の形で割り付けて構造変更を行う。

$$p_m = \bar{p}_m (1 + \alpha_m) \quad (3)$$

以下、上付き棒記号は試設計の値である。

構造パラメータの変更による固有ベクトル  $\{\phi^i\}$  の変動を、有限要素感度解析<sup>13)</sup>の結果より式 (4) で一次近似する。

$$\{\phi^i\} = \{\bar{\phi}^i\} + \sum_{m=1}^M \{\phi^i_m\} \alpha_m \quad (4)$$

添字の  $m$  は設計変数  $\alpha_m$  に関する一階感度であることを示す。式 (3) で一次近似された固有ベクトルを式 (2) に代入して整理すると、式 (5) の  $J \times M$  の長方マトリクス  $[A^i]$  を係数マトリクスとする設計変数決定方程式を得る。

$$[A^i] \{\alpha\} = \{b^i\} \quad (5)$$

$[A^i]$  は固有ベクトルの一階感度より成り、 $\{\alpha\}$  は設計変数を成分とする設計変数ベクトル、 $\{b^i\}$  は試設計の固有値解析より定められる定数ベクトルである。

ホモロガス振動モード形を実現しようとする  $k$  個の次数の固有振動モードに対して、式 (5) の設計変数決定方程式を導出し、それらの係数マトリクスおよび定数ベクトルを列方向に結合することにより、複数モードにおいてホモロガス振動モードを実現する構造決定方程式が式 (6) の形で得られる。

$$\begin{bmatrix} [A^1] \\ \vdots \\ [A^k] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{b^1\} \\ \vdots \\ \{b^k\} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$[A] \{\alpha\} = \{b\} \quad (7)$$

式 (7) を満足する設計変数ベクトルは、式 (8) で表される解の存在条件が成立するとき、式 (9) で与えられる。

$$([I] - [A][A]^{-}) \{b\} = \{0\} \quad (8)$$

$$\{\alpha\} = [A]^{-} \{b\} + ([I] - [A]^{-}[A]) \{h\} \quad (9)$$

ここで  $[A]^{-}$  は Moore-Penrose 一般逆行列であり、 $[I]$  は適宜の次数の単位行列、 $\{h\}$  は任意の列ベクトルである<sup>14)</sup>。式 (9) の右辺第一項は特解、第二項は補解と呼ばれる。一般には補解の係数マトリクス  $([I] - [A]^{-}[A])$  が零とはならないので、式 (9) で得られる解は不定である。本研究では  $\{h\}$  を零ベクトルとして、特解のみにより設計変数ベクトル  $\{\alpha\}$  を定める。この解は  $\{\alpha\}$  のノルムを最小とする意味で、設計変数最小の解である。

以上により決定された設計変数は、固有ベクトルの一次近似に基づいている。その誤差を補正するため、本研究では式 (9) の設計変数で変更された構造を新たな試設計として試設計の感度解析と構造の更新を繰り返す方法を探る。

### 3. 数 値 計 算 例

初期の試設計を図 1 に示す平面格子フレームとし、前章で述べた方法により低次の固有振動モードを対象としてホモロジー設計を行う。構造は図中黒三角で示される四点で単純支持され、1 部材 1 要素として面外曲げとねじりを考慮したはり有限要素でモデル化されるとする。部材の断面は円形とし、全部材の断面直径に設計変数を割り付け、初期の試設計における断面直径を 10mm とした。また材料定数はヤング率：70.0GPa、せん断弾性係数：26.9GPa、質量密度： $3.0 \times 10^3 \text{kg/m}^3$  とした。

目標とするホモロガス振動モード形は、図中の節点 3-8-13 で形成される中央リブを直線かつ水平に保つものである。式 (2) に対応する固有ベクトルの成分に対する具体的な制約は式 (10) の形式で与えた。

$$\begin{Bmatrix} \phi_{w3}^i - \phi_{w8}^i \\ \phi_{w13}^i - \phi_{w8}^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ここで  $\phi_{w3}^i$ 、 $\phi_{w8}^i$ 、 $\phi_{w13}^i$  はそれぞれ節点 3、8、13 のたわみに対応する成分である。繰り返し計算を打ち切った

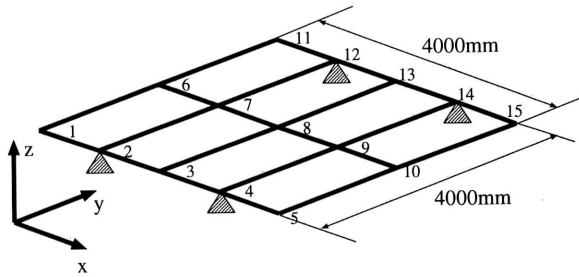
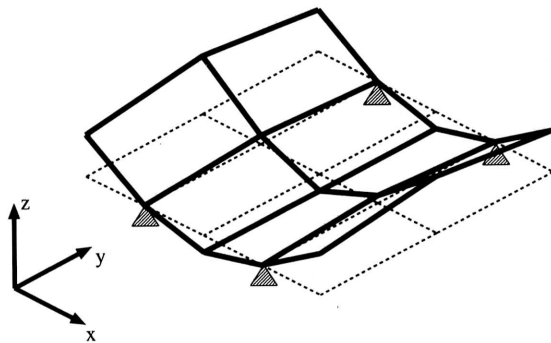
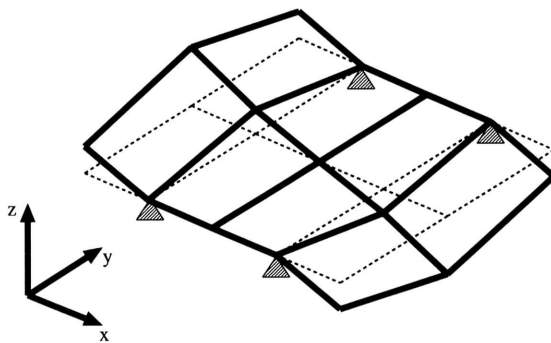


図1 平面格子フレーム



(a) 一次振動モード

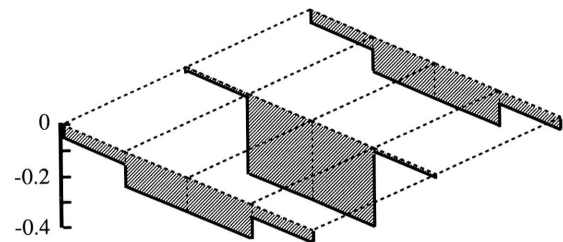


(b) 二次振動モード

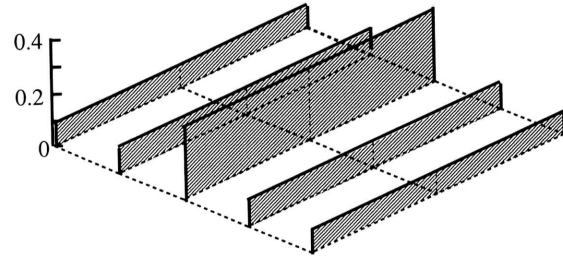
図2 ホモロジー設計後の固有振動モード

めに注目する誤差指標は、固有ベクトルのユークリッドノルムを1とする規準化条件の下で、対象次数に関する式(10)左辺のユークリッドノルムの和とした。その誤差指標が $10^{-6}$ 以下となることをもって目標とするホモロガス振動モード形が実現されたものとみなした。

まず最初に低次から3次までの固有振動モードに対してホモロジー設計を行った。しかしながら、2回の繰り返し構造変更により断面直径が負となる部材が現れ、目的とするホモロジー設計は実現できなかった。そこで、対象とする次数を低次より2次までとしてホモロジー設計を行った。5回の構造変更により得られたホモロガス振動モード形を図2に示す。初期の試設計では一次モードで中央リブに大



(a) x方向



(b) y方向

図3 ホモロジー設計に要した断面直径変更量

きなたわみが生ずるが、ホモロジー設計後は目標通り所定の部材が直線に保持されている様子が判る。初期の試設計の一次と二次の固有振動数は0.914Hzと0.940Hzであり、ホモロジー設計によりそれらが0.748Hzと0.918Hzとなった。この振動モードを実現するために要した断面直径の変更量を図3に示す。図には断面直径の変更量の初期の断面直径に対する割合を示す。この構造変更により増加した重量は初期の試設計の9.7%であった。

#### 4. 時刻歴解析

前章のホモロジー設計後の構造を、式(11)の単一面外方向集中荷重 $f$ [N]で励振して振動形を解析した。

$$f = \sin 2\pi \omega t \quad (11)$$

解析にはNewmarkの $\beta$ 法を用い、 $\beta$ の値を1/6とした。また時間の刻み $\Delta t$ を0.01秒とした。励振の位置は図1の節点6とし、周波数 $\omega$ を0.8Hzとして解析を行った。

ホモロジー設計後の一次および二次の固有振動数はそれぞれ0.748Hzと0.918Hzであったので、0.8Hzで励振すれば一次および二次の振動モードが卓越して、前章で設定したホモロガス振動モード形に近い振動形を呈すると予想される。本解析では、節点3、8、13のたわみ $w_3$ 、 $w_8$ 、 $w_{13}$ により式(12)で与えられる誤差ベクトル $|\epsilon|$ のユークリッドノルムを誤差指標としてホモロガス振動モード形の現出程度を評価した。またホモロジー設計の効果をみるため、前章で用いた初期の試設計を同条件で励振した

