$\mathcal{M}$ 速 報 究

研究速報

# 振動問題に対するホモロジー設計の一定式 A Formulation of Homology Design for Vibration Problems

吉 川 暢 宏\*・北 村 礼\*・中 桐 滋\* Nobuhiro YOSHIKAWA, Rei KITAMURA and Shigeru NAKAGIRI

1. はじめに

古典的最適構造設計では,力学的健全性を保持した上で 最小重量構造を見出すことを目的としていた<sup>1)</sup>.近年,現 実味を帯びてきた宇宙構造等の新種の構造では、能動的制 御系により高機能を果たさせようとしている<sup>2)</sup>. そのよう な構造に対しては、重量軽減のみならず目的とする機能を 十分に発揮させる洗練された構造設計手法が必要とな る<sup>3)~5)</sup>.構造の形状や方向等の幾何学的性状の制御精度 が、達成された機能の良否を決定する場合には、構造の一 部における変形を受動的に制御する方法が最適設計の一候 補となり得る<sup>6),7)</sup>.そのような設計の一つがホモロジー設 計であり,大口径電波望遠鏡の設計では,自重により構造 が変形してもアンテナ形状を放物面に保つホモロガス変形 を実現することより、望遠鏡の解像精度を向上させてい る<sup>8),9)</sup>.ホモロガス変形とは、構造の一部における幾何学 的性状を変形前、中、後で保持する変形であり、要求され る機能に応じたホモロガス変形を実現することにより、電 波望遠鏡の例のように能動的制御系の負荷を減ずることが 可能である.

これまで、有限要素法を用いたホモロジー設計の定式が いくつか提示されているが、それらの多くは静的問題に 限ったものであった<sup>10),11)</sup>.動的外荷重下でホモロガス変 形を実現する構造設計手法が提示できれば、制御負荷軽減 の観点からのホモロジー設計の利用価値が増すと考えられ る.動的問題では一般に、外荷重が振動モード形を支配す る. したがって,外荷重を陽に取り入れて構造決定方程式 を導出することが自然な発想である.しかしながら,得ら れた構造でホモロガス変形が実現するか否かは荷重に依存 することになり、荷重の不確定な変動によっては、ホモロ ジー設計を施した方がかえって機能の達成を阻害すること

にもなりかねない.

本研究では動的問題に対するホモロジー設計の一定式と して、複数の固有振動モード形をホモロガス振動モード形 とする定式を提示する.この定式は、"動荷重に対する振 動モード形は固有振動モードの重畳により表されるため, 突出すると考えられるいくつかの固有振動モード形をホモ ロガス振動モード形としておけば、動荷重の不確定な変動 に対してもロバストなホモロジー設計が行える"との定性 的予見に基づいている.

提示した手法の適否を、平面格子構造の面外曲げ振動に 関する数値計算例により検討する.低次の複数固有振動 モードにおいて、構造の中央リブを直線かつ水平に保持す るホモロガス振動モード形を実現する. このようにして得 られた構造が低次固有振動数に近い動荷重を受ける場合, 振動形が目的としたホモロガス振動モード形に近くなるか 否かを時刻歴解析により確認する.

# 2. 構造変更量決定方程式

ある試設計構造の存在を仮定し、それを線形弾性体とし て有限要素分割する.境界条件処理後の無減衰線形振動に 関する固有値問題は式(1)となる.

$$([K] - \lambda^{i}[M]) \ \{\phi^{i}\} = \{0\}$$
(1)

[K], [M] はそれぞれ剛性マトリクスと質量マトリクス であり、λ'と {φ'} は i 次の固有値と固有ベクトルを表 す.以下では肩符 iで i次の固有振動モードに関する量を 表し,また式(1)の固有値問題の自由度を Nとする.

i次の単一固有振動モード形をホモロガス振動モード形 とする制約は、固有ベクトル { / / の成分に関するベク トル関数として式(2)で表現できる.

\*東京大学生産技術研究所 第1部

研	究	速	報				
	$h(\phi)$	$i) \} =$	10	(2)	簡単のため,	この構造決定方程式を式	(7)と記す.

 ${h(\phi')}$ の成分はJ個とし、その成分は設定したホモロガス振動モード形に応じて種々の関数形で表される.本研究では、静止状態で直線である部材を振動中も直線に保つ線形ホモロガス振動モード形の実現を図る.その場合には ${h(\phi')}$ の成分は固有ベクトル成分の一次式で表される.

初期の試設計に対する固有値問題(1)を解いて得られ た固有ベクトルが式(2)を満足することは希であるので, *M*個の構造パラメータ *pm* を適宜選択して試設計の構造変 更を行う必要がある.本研究では無次元の設計変数 *α m* を式(3)の形で割り付けて構造変更を行う.

 $p_m = \overline{p}_m \left(1 + \alpha_m\right) \tag{3}$ 

以下,上付き棒記号は試設計の値である.

構造パラメータの変更による固有ベクトル {**ø**<sup>*i*</sup>} の変 動を,有限要素感度解析<sup>13)</sup>の結果より式(4) で一次近 似する.

$$\{\phi^{i}\} = \{\bar{\phi}^{i}\} + \sum_{m=1}^{M} \{\phi^{i}_{m}\} \ \alpha_{m}$$
(4)

添字の m は設計変数 a m に関する一階感度であることを示す.式(3)で一次近似された固有ベクトルを式(2)に代入して整理すると、式(5)のJ× Mの長方マトリクス [A<sup>i</sup>] を係数マトリクスとする設計変数決定方程式を得る.

$$[A^i] \{\alpha\} = \{b^i\} \tag{5}$$

[A<sup>i</sup>] は固有ベクトルの一階感度より成り, {α} は設計 変数を成分とする設計変数ベクトル, {b<sup>i</sup>} は試設計の固 有値解析より定められる定数ベクトルである.

ホモロガス振動モード形を実現しようとする k 個の次数 の固有振動モードに対して,式(5)の設計変数決定方程 式を導出し,それらの係数マトリクスおよび定数ベクトル を列方向に結合することにより,複数モードにおいてホモ ロガス振動モードを実現する構造決定方程式が式(6)の 形で得られる.

$$\begin{bmatrix} [A^1] \\ \vdots \\ [A^k] \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \{b^1\} \\ \vdots \\ \{b^k\} \end{vmatrix}$$
(6)

 $[A] \{\alpha\} = \{b\}$  (7)

式(7)を満足する設計変数ベクトルは,式(8)で表さ れる解の存在条件が成立するとき,式(9)で与えられる.

$$([I] - [A] [A]^{-}) \{b\} = \{0\}$$
(8)

 $\{\alpha\} = [A]^{-} \{b\} + ([I] - [A]^{-} [A]) \{h\} (9)$ 

ここで [A]<sup>-</sup>は Moore-Penrose 一般逆行列であり, [I]は 適宜の次数の単位行列,  $\{h\}$ は任意の列ベクトルであ る<sup>14)</sup>.式(9)の右辺第一項は特解,第二項は補解と呼 ばれる.一般には補解の係数マトリクス( $[I] - [A]^-$ [A])が零とはならないので,式(9)で得られる解は 不定である.本研究では $\{h\}$ を零ベクトルとして,特 解のみにより設計変数ベクトル $\{\alpha\}$ を定める.この解は  $\{\alpha\}$ のノルムを最小とする意味で,設計変更量最小の解 である.

以上により決定された設計変数は、固有ベクトルの一次 近似に基づいている。その誤差を補正するため、本研究で は式(9)の設計変数で変更された構造を新たな試設計と して試設計の感度解析と構造の更新を繰り返す方法を採る。

## 3. 数 值 計 算 例

初期の試設計を図1に示す平面格子フレームとし,前章 で述べた方法により低次の固有振動モードを対象としてホ モロジー設計を行う.構造は図中黒三角で示される四点で 単純支持され,1部材1要素として面外曲げとねじりを考 慮したはり有限要素でモデル化されるとする.部材の断面 は円形とし,全部材の断面直径に設計変数を割り付け,初 期の試設計における断面直径を10mmとした.また材料定 数はヤング率:70.0GPa,せん断弾性係数:26.9GPa,質 量密度: $3.0 \times 10^3$ kg/m<sup>3</sup>とした.

目標とするホモロガス振動モード形は, 図中の節点 3-8-13で形成される中央リブを直線かつ水平に保つもので ある.式(2)に対応する固有ベクトルの成分に対する具 体的な制約は式(10)の形式で与えた.

$$\begin{pmatrix} \phi^{i}_{w3} - \phi^{j}_{w8} \\ \phi^{i}_{w13} - \phi^{i}_{w8} \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$
(10)

ここで  $\phi_{u3}^{i}$ ,  $\phi_{u8}^{i}$ ,  $\phi_{u13}^{i}$ はそれぞれ節点3,8,13の たわみに対応する成分である.繰り返し計算を打ち切るた

14











(b) 二次振動モード

図2 ホモロジー設計後の固有振動モード

めに注目する誤差指標は、固有ベクトルのユークリッドノ ルムを1とする規準化条件の下で,対象次数に関する式 (10) 左辺のユークリッドノルムの和とした. その誤差指 標が10-6以下となることをもって目標とするホモロガス 振動モード形が実現されたものとみなした.

まず最初に低次から3次までの固有振動モードに対して ホモロジー設計を行った.しかしながら、2回の繰り返し 構造変更により断面直径が負となる部材が現れ、目的とす るホモロジー設計は実現できなかった. そこで、対象とす る次数を低次より2次までとしてホモロジー設計を行った. 5回の構造変更により得られたホモロガス振動モード形を 図2に示す.初期の試設計では一次モードで中央リブに大 



図3 ホモロジー設計に要した断面直径変更量

きなたわみが生ずるが、ホモロジー設計後は目標通り所定 の部材が直線に保持されている様子が判る.初期の試設計 の一次と二次の固有振動数は0.914Hz と0.940Hz であり, ホモロジー設計によりそれらが0.748Hz と0.918Hz と なった.この振動モードを実現するために要した断面直径 の変更量を図3に示す.図には断面直径の変更量の初期の 断面直径に対する割合を示す. この構造変更により増加し た重量は初期の試設計の9.7%であった.

#### 4. 時刻 歴解析

前章のホモロジー設計後の構造を,式(11)の単一面外方 向集中荷重 f [N] で励振して振動形を解析した.

(11) $f = \sin 2\pi w t$ 

解析には Newmark の $\beta$ 法を用い、 $\beta$ の値を1/6とした. また時間の刻みム<sub>t</sub>を0.01秒とした.励振の位置は図1の 節点6とし, 周波数 w を0.8Hz として解析を行った.

ホモロジー設計後の一次および二次の固有振動数はそれ ぞれ0.748Hz と0.918Hz であったので、0.8Hz で励振す れば一次および二次の振動モードが卓越して、前章で設定 したホモロガス振動モード形に近い振動形を呈すると予想 される.本解析では、節点3,8,13のたわみ w3, w8, w13により式 (12) で与えられる誤差ベクトル {ε} の ユークリッドノルムを誤差指標としてホモロガス振動モー ド形の現出程度を評価した.またホモロジー設計の効果を みるため、前章で用いた初期の試設計を同条件で励振した

$$\{\epsilon\} = \begin{cases} w_3 - w_8\\ w_{13} - w_8 \end{cases}$$
(12)

誤差指標の変動を図4に示す.太線でホモロジー設計後 の構造に対する結果を示し,細線で初期の試設計に対する 結果を示す.高次の振動モード形の影響があるため,ホモ ロジー設計した構造であっても誤差指標が零とはならない が,初期の試設計と比較すれば格段に誤差指標が減少して いる.図5に初期の試設計の,図6にはホモロジー設計さ れた構造の1秒毎の振動形を示す.



図6 ホモロジー設計の振動形

### 5. おわりに

複数の固有振動モードにおいてホモロガス振動モード形 を実現する構造決定方法を提示した.その定式は容易で, 単一固有振動モードに関する構造決定方程式を単純に結合 するだけである.しかしながら,目的とするホモロジー設 計の成否は事前には不明であり,数値計算例では低次より 二次までの固有振動モード形をホモロガス振動モード形と できただけであった.ホモロジー設計により得られた構造 に励振力を与えて時刻歴解析を行った結果からは,ホモロ ジー設計で対象とした次数の固有振動数に近い励振力が加 わる場合は,目的としたホモロガス振動モード形に近い振 動形を呈することが判った. (1995年8月28日受理)

# 参考文献

- ガリレオ ガリレイ (今野武雄,日田節次訳),新科学対 話,岩波文庫,(1949), p.194-206.
- Wada, B.K., AIAA Journal of Spacecraft, Vol. 27, No. 3 (1990), 330.
- Grandhi, R.V., AIAA-92-4813, 4th AIAA/ USAF/ NASA/ OAI Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimizations.
- 4) 大久保・Schmidt, 日本機械学会論文集 (C編), 60巻574 号, (1994), 2009.
- 5) 多田・古井, 日本機械学会論文集 (C編), Vol. 60, No. 570, (1994), 506.
- 6) 中桐・吉川,日本機械学会論文集(C編),59巻566号, (1993),159.
- Hiroshi Sato, Shigeru Nakagiri and Nobuhiro Yoshikawa, First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, Extended Abstract, (1995), 133.
- von Hoerner, S., Proc. ASCE, Journal of the Structural Division, Vol. 93, No.ST5, (1967), 461.
- 9) 森本,他4名,三菱電機技報,Vol. 56,No.7 (1982), 17.
- Hangai, Y., Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 39, Proc. 39th Japan National Congress for Applied Mechanics, Ed.JNCTAM, Science Council of Japan, Univ. of Tokyo Press (1990), 11.
- 11) 吉川·中桐,日本機械学会論文集 (A 編), 59-560 (1993), 286.
- 12) 吉川・中桐, 日本機械学会論文集 (A 編), 61-584 (1995), 198.
- Fox, R.L. and Kapoor, M.P., AIAA Journal, Vol. 6, No. 12, (1968), pp. 2426-2429.
- 14) 半谷・川口, 形態解析 一般 逆行列とその応用 -, (1991), 培風館.