

修士論文

単一トラップ中でのエキシトン・ポラリトンの  
p 軌道ボース・アインシュタイン凝縮

( P-orbital Bose-Einstein Condensation of Exciton-Polaritons  
in a Single Trap )



梶本 尚之

東京大学大学院 情報理工学系研究科 電子情報学専攻

指導教員 山本 喜久

2009 年 2 月 4 日提出

# 概要

本論分では、「一箇所にトラップされたエキシトン・ポラリトンのボース・アインシュタイン凝縮」について論じる．

ボース・アインシュタイン凝縮とは，ボース粒子で構成される系が一定の閾値温度より低い温度をとったときに，そのほとんどが最低エネルギー準位に落ち込む現象であり，巨視的量子効果を生み出す基本概念として長らく科学者の関心を引付けてきた．

1995 年，希薄原子気体のボース・アインシュタイン凝縮が実験により観測されてから，この研究は新しい局面に入ったといえる．ボース・アインシュタイン凝縮そのものの研究はもちろんのこと，凝縮体を利用してモット絶縁体やウィグナー結晶といった量子多体系の物理を探る試みが現在行われている．

本研究は，ボース・アインシュタイン凝縮を半導体微小共振器中のエキシトン・ポラリトンという準粒子を使って生成し，凝縮体を三角形や四角形の格子状に並べることで，p 軌道が相互作用しあう系をつくり，量子多体系の物理の解明をすることを最終目標としている．凝縮体を半径数  $\mu\text{m}$  のトラップしたとき，そこにはフントの規則によって  $(p_x^\dagger + ip_y^\dagger)$  で表される p 軌道が生まれる．この p 軌道は，実際の量子多体系の物理において重要な役割を果たす高軌道にある電子の振る舞いを模すと考えられている．本研究では，p 軌道相互作用を制御する第一段階として単一の場所にトラップされたエキシトン・ポラリトン凝縮体の p 軌道を観測する実験を行った．

本論分では実験結果を報告するとともに，今後の実験計画のあらましについて論じる．

# 目次

<b>第1章</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
1.1	ボース・アインシュタイン凝縮	2
1.2	微小共振器中のエキシトン・ポラリトン	2
1.3	エキシトン・ポラリトン BEC を用いた軌道物理学	3
1.4	本論文の流れ	4
<b>第2章</b>	<b>ボース・アインシュタイン凝縮</b>	<b>5</b>
2.1	理想気体の BEC	6
2.2	ボゴリューボフによる BEC の理論	11
2.3	相互作用のある系での BEC	13
2.4	超流動状態と2次元系での BEC	14
<b>第3章</b>	<b>半導体微小共振器中のエキシトン・ポラリトン</b>	<b>17</b>
3.1	量子井戸中のエキシトン・ポラリトン	18
3.1.1	Wannier-Mott Exction	18
3.1.2	光学遷移	21
3.1.3	量子井戸中の2次元エキシトン	23
3.1.4	QW エキシトンの束縛エネルギー	24
3.1.5	量子井戸エキシトンの光学遷移	26
3.2	半導体微小共振器	27
3.2.1	DBR 反射器	27
3.2.2	共振器分散関係	29
3.3	エキシトン・ポーラリトン	31
<b>第4章</b>	<b>p 軌道ボース・アインシュタイン凝縮</b>	<b>36</b>
4.1	原子気体による p 軌道ボース・アインシュタイン凝縮	37
4.2	単トラップされたエキシトン・ポラリトンの p 軌道 BEC	39

---

第 5 章 実験:単トラップされた BEC の p 軌道の観測	41
5.1 実験系 . . . . .	42
5.1.1 使用したサンプル . . . . .	42
5.1.2 実験系 . . . . .	42
5.2 実験結果 . . . . .	44
5.3 今後の予定 . . . . .	46
第 6 章 結論	49
参考文献	51

# 目次

2.1	$\rho_0(T)$ and $\mu$ v.s. $T$ for a 3D bose gas with given density $n$	10
3.1	Bloch and envelope functions of electrons and holes in a QW	22
3.2	Quantum Well	23
3.3	Discrete energy bands in a QW	23
3.4	Energy density of states in 3D and 2D	24
3.5	Band structures for - semiconductors in (a)bulk and (b)QW.	25
3.6	$f_e$ and $f_z$ for GaAs/AlAs QWs.	26
3.7	Optical transitions between electrons and holes that conserve total angular momentum.	27
3.8	Sketch of a semiconductor $\lambda/2$ microcavity	27
3.9	(a)Reflection spectra of a typical DBR.(b) $R_{max}^{2N}$ vs. $N$	28
3.10	(a)Reflectance of an empty $\lambda/2$ microcavity. (b)The cavity structure and field intensity distribution $ E_z ^2$ of the resonant TE mode.	30
3.11	(a)Incidence angle $\theta$ dependence of the cavity reflectance. (b)Cavity dispersion $E_{cav}$ v.s. $k_{  }$ or $\theta$	32
3.12	Polariton dispersions and corresponding Hopfield coefficient at (a) $\Delta = 2\hbar\Omega$ , (b) $\Delta = 0$ , and (c) $\Delta = -2\hbar\Omega$	35
4.1	(Color online)Anisotropic hopping matrix elements of $p$ -orbital bosons on a cubic lattice. The ' $\pm$ ' symbols indicate the sign of two lobes of $p$ -orbital wavefunction.	38
4.2	The $p$ -orbital bonding patterns:(a) the $\sigma$ -bonding(b) $\pi$ -bonding(c)OAM singlet (d)OAM doublets	39
4.3	(a)Schematic of a Michealson interferometer imaging setup. (b-d) Illustration of real-space imagings of a single vortex.	40
5.1	Sketch of the sample	43

---

5.2	Imaging and spectroscopy of exciton-polariton distribution in coordinate and momentum space . . . . .	44
5.3	8mW . . . . .	45
5.4	67mW . . . . .	45
5.5	96mW . . . . .	45
5.6	120mW . . . . .	45
5.7	163mW . . . . .	45
5.8	200mW . . . . .	45
5.9	Pomp power v.s. Peak energy of exciton-polariton . . . . .	46
5.10	Pomp power v.s. Intensity(a.u.) of exciton-polariton . . . . .	47
5.11	Exciton-Polariton Trap with Strong Confinement . . . . .	48

# 表目次

1.1	Parameter Comparison of BEC systems . . . . .	3
-----	---	---

# 第 1 章

## 序論



## 1.1 ボース・アインシュタイン凝縮

量子力学の体系が次第に組みあがってきた 1920 年代，アインシュタインによって理論的に予言されたのが，その後「ボース・アインシュタイン凝縮 (Bose-Einstein Condensation，以下 BEC と略す)」と呼ばれることになる現象である．これは，インド人物理学者ボースによって発見された統計法に従う粒子，ボース粒子の集団を極低温においたとき，ほとんどの粒子が最低エネルギー準位に落ち込むという相転移現象である．長らくこの現象は理論的な想像に過ぎないと思われていたが，1938 年にヘリウム 4 の超流動が BEC に起因しているというロンドンによる示唆がなされてから [1]，1957 年のバーディーン，クーパー，シュリーファールの BCS 理論による超伝導のメカニズムの解明など，BEC が現実の物理系でも重要な役割を演じていることが判明してきた．

BEC が長い間，科学者の注目をひきつけてきた理由は，通常，ミクロな領域でしか見られない量子力学が生み出す特異な振る舞いが，マクロな領域で観察されるという「巨視的量子効果」を演じるからである．広く知られたものに，超流動において粘性が 0 になってしまう現象，超伝導体が磁石の上に浮上する現象などがある．

アインシュタインによって最初に予言された系が実現されたのは，1995 年のコーネル，ワイマン，ケターレによる実験である．彼らはレーザー冷却によって希薄原子気体を 200nK という極低温におくことによって BEC を達成し，この功績によって 2001 年にノーベル物理学賞を受賞している ([2][3][4])．これ以後，原子気体の BEC を使った様々な研究が今日まで活発に行われている．例えば，凝縮体を格子状に並べ障壁ポテンシャルを変化させることによって超流動体から絶縁体への量子相転移を観察したものがある ([5])．この実験は BEC を使って実際の量子系を再現し，その物理を観測するという「量子シミュレーション」の可能性を強く示唆するものである．

## 1.2 微小共振器中のエキシトン・ポラリトン

数 nm の厚さのバンドギャップが小さい半導体の層をバンドギャップの大きい半導体の層で挟み込みこんだ構造を量子井戸と呼ぶ．量子井戸にレーザーでフォトンを入力すると，そのエネルギーが電子を励起させ電子と正孔が束縛しあうペア，エキシトンを作る．

表 1.1: Parameter Comparison of BEC systems

systems	atomic gases	excitons	exciton-polaritons
effective mass $m^*/m_e$	$10^3$	$10^{-1}$	$10^{-5}$
Bohr radius $a_B$	$10^{-1} \text{ \AA}$	$10^2 \text{ \AA}$	$10^2 \text{ \AA}$
particle spacing $n^{-1/d}$	$10^3 \text{ \AA}$	$10^2 \text{ \AA}$	$1 \mu\text{m}$
critical temperature $T_c$	$1\text{nK} \sim 1\mu\text{K}$	$1\text{mK} \sim 1\text{K}$	$1\text{K} \sim 300\text{K}$
$\frac{\text{thermalization time}}{\text{lifetime}}$	$1\text{ms}/1\text{s} = 10^{-3}$	$10\text{ps}/1\text{ns} = 10^{-2}$	$(1 \sim 10\text{ps})/(1 \sim 10\text{ps}) = 0.1 \sim 10$

量子井戸内のエキシトンが放出するフォトンのうち、特定の波長のものだけを半導体内に閉じ込められる構造を微小共振器という。微小共振器は、高い屈折率の層と低い屈折率の層を、閉じ込めたいフォトンの波長の  $1/4$  の周期で配置したもので、微小共振器内では閉じ込められたフォトンにより再びエキシトンが生成される。これは、フォトンがエキシトンと強結合し、エキシトンとフォトンが重ね合わさった新たな一つの量子状態、エキシトン・ポラリトンと呼ばれる準粒子が生成されたことを意味している ([6])。

エキシトン・ポラリトンを使った BEC を実現する研究が現在進められており、いくつかの研究はその達成を示唆している ([7])。一般に、BEC への転移温度  $T_c$  は  $T_c \sim 2\pi\hbar^2 n_c^{-2/d} m^{-1}$  で表される (式 2.28 参照)。ここで原子気体、エキシトン、エキシトン・ポラリトンの 3 つの物質についてパラメータを比較したものを表 1.1 に示す。BEC の条件式の分母に現れる有効質量に大きな違いがある。エキシトン・ポラリトンは質量が小さいため BEC への転移温度が比較的高温 (数 K) であり、BEC を起こしやすい粒子であることが見て取れる。また系がウエハー内で収まるため、簡易な実験系での BEC の実現が可能となる。

### 1.3 エキシトン・ポラリトン BEC を用いた軌道物理学

超流動、モット絶縁体、ウィグナー結晶といった電子強相関係の物質は、高軌道の準安定状態にある電子が系の状態に決定的な影響を持つと考えられている。こういった物質の物性を、BEC を格子状に配置し軌道相互作用を起こすことで再現しその物理を探る試みがある。事実、原子気体 BEC を使ってモット絶縁体から超流動の相転移を観察した実験がある ([8])。

こうした量子多体系の物理をエキシトン・ポラリトンの  $p$  軌道 BEC を使って探求する，という試みが本研究の最終的な目的である．その目標に向けた最初の段階として，一箇所にトラップした BEC の  $p$  軌道の観測を本研究では行った．

## 1.4 本論文の流れ

以下，2 章では BEC の特徴を理論的背景を基に概説する．3 章では，エキシトンとエキシトン・ポラリトンを扱う物理，粒子を閉じ込める量子井戸構造，微小共振器構造を説明する．4 章では BEC の  $p$  軌道を扱う物理を説明する．5 章で，実験系についての説明，実際に行った実験結果についての考察を行い，6 章で本研究をまとめる．

## 第 2 章

### ボース・アインシュタイン凝縮

この章では BEC についての基礎的な知識を取り上げる．BEC の概念が最初に物理学の議論の俎上にあがったのは，1925 年のアインシュタインによる論文である ([9])．この論文は，インドの物理学者ボースの統計法に注目し，熱平衡状態におかれた相互作用のないボース粒子の振る舞いを取り扱っている．本稿では，この議論を 2.1 で概説する．

アインシュタインによる議論は現実的な系での実現が困難であると思われていたが，液体ヘリウムの超流動状態の発見 ([10],[11]) の直後，ロンドンによりこれが BEC の一種の実現であることが指摘された ([1])．それ以後，量子多体系，量子相転移の物理の基本概念として BEC は長らく科学者の注目を集めてきた．

2.2 では BEC の特徴を捉える上で重要な概念を，ボゴリューボフの理論によって概説する．2.3 では相互作用のある BEC の系で，便利なボゴリューボフ準粒子という概念を導入する．2.4 では扱う系が 2 次元系になったときに現れる相転移条件の変化を，超流動の説明を交え紹介する．

## 2.1 理想気体の BEC

まずは系が熱平衡状態にあるときに従う統計を考える．この系が熱平衡状態にあると考えたとき，グランドカノニカル分布をとるとする．グランドカノニカル分布とは，扱う系が熱と粒子を供給する熱浴に接しているとするモデルである．このとき注目する系がエネルギー固有状態  $i$  にあるとき，対応するエネルギー固有値を  $E_i$ ，そこに存在している粒子数を  $N_i$  と表記する．グランドカノニカル分布において系が  $i$  をとる確率は，

$$p_i^{(\beta,\mu)} = \frac{1}{\Xi(\beta,\mu)} \exp[-\beta E_i + \beta \mu N_i] \quad (2.1)$$

となる．この式において  $\beta = 1/k_B T$  であり ( $k_B$  はボルツマン定数)， $\mu$  は熱浴の化学ポテンシャルと呼ばれる量である． $\Xi$  は大分配関数と呼ばれる規格化定数であり，以下の式で表される．

$$\Xi(\beta,\mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp[-\beta E_i + \beta \mu N_i] \quad (2.2)$$

である．なお，以上の表式では，同種粒子に対して「区別はしない」という量子力学的な扱いをしている．

ここで量子理想気体をこの統計に当てはめてみる．量子論による各々の量子が

それぞれ離散的なエネルギーしかとらないという結論を使ったとき,  $i, E_i, N_i$  をそれぞれ,

$$i \rightarrow (n_1, n_2, \dots), E_i \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j n_j, N_i \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} n_j \quad (2.3)$$

と読み換える．このとき  $n_j$  は  $j$  番目のエネルギー準位に存在している粒子数,  $\epsilon_j$  は  $j$  番目のエネルギー準位にある一粒子が持つエネルギーを指す．この表現を用いて大分配関数を書くと,

$$\Xi(\beta, \mu) = \sum_{(n_1, n_2, \dots)} \exp[-\beta \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j n_j + \beta \mu \sum_{j=1}^{\infty} n_j] = \sum_{(n_1, n_2, \dots)} \prod_{j=1}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)n_j} \quad (2.4)$$

となる．この式は,  $n_1$  の和を先に取り出して,

$$\Xi(\beta, \mu) = \sum_{n_1} e^{-\beta(\epsilon_1 - \mu)n_1} \sum_{n_2, n_3, \dots} \prod_{j=2}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)n_j} \quad (2.5)$$

と変形することができ, この作業を繰り返していくと,

$$\Xi(\beta, \mu) = \left( \sum_{n_1} e^{-\beta(\epsilon_1 - \mu)n_1} \right) \left( \sum_{n_2} e^{-\beta(\epsilon_2 - \mu)n_2} \right) \dots = \prod_{j=1}^{\infty} \left( \sum_n e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)n} \right) = \prod_{j=1}^{\infty} \Xi^{(j)}(\beta, \mu) \quad (2.6)$$

という形に収まる．最後は積の中の量を  $\Xi^{(j)}(\beta, \mu)$  と呼ぶことにした．

ここで  $\Xi^{(j)}(\beta, \mu)$  をボース粒子の場合とフェルミ粒子の場合にわけて評価しておく．量子論においてすべての粒子はボース粒子とフェルミ粒子のどちらかに属し, 前者は同じ状態を持つ粒子が同じエネルギー準位に複数存在することができるが, 後者は同じ状態を持つ粒子は一つのエネルギー準位に1つしか存在できない．ボース粒子の場合,  $n$  は0以上のすべての粒子について足すから,

$$\Xi^{(j)}(\beta, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)n} = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}} \quad (2.7)$$

と評価できる．フェルミ粒子の場合は,  $n$  は0か1しかとらないため,

$$\Xi^{(j)}(\beta, \mu) = \sum_{n=0}^1 e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)n} = 1 + e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)} \quad (2.8)$$

となる．

次に一粒子エネルギー固有状態の占有数  $n_j$  を求める． $n_j$  に対応する物理量を  $\hat{n}_j$

とする． $\hat{n}_j$  がとる期待値を計算すると，

$$\langle \hat{n}_j \rangle_{\beta, \mu} = \frac{1}{\Xi(\beta, \mu)} \sum_{n_1, n_2, \dots} n_j \exp[-\beta \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k n_k + \beta \mu \sum_{k=1}^{\infty} n_k] = \frac{1}{\Xi(\beta, \mu)} \sum_{n_1, n_2, \dots} n_j \prod_{k=1}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)n_k} \quad (2.9)$$

式 2.1 と同様に和を独立にとるように  $\sum$  が計算でき， $n_j$  以外は  $\Xi(\beta, \mu)$  とキャンセルされるが，和の中の  $n_j$  は  $j = k$  のときのみ 0 から  $\infty$  まで足しあげられる．よって

$$\langle \hat{n}_j \rangle_{\beta, \mu} = \frac{1}{\Xi^{(j)}(\beta, \mu)} \sum_{n_j} n_j e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)n_j} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \log \Xi^j(\beta, \mu) \quad (2.10)$$

となる．最後の変形はボース粒子，フェルミ粒子双方について成り立つ（式 2.1，式 2.1 参照）．

ここで期待値を具体的に求める．ボース粒子については，

$$\langle \hat{n}_j \rangle_{\beta, \mu} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \log \Xi^j(\beta, \mu) = \frac{e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}} = \frac{1}{e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)} - 1} \quad (2.11)$$

フェルミ粒子については，

$$\langle \hat{n}_j \rangle_{\beta, \mu} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \log \Xi^j(\beta, \mu) = \frac{e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}}{1 + e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}} = \frac{1}{e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)} + 1} \quad (2.12)$$

という結果になる．式 2.1 をボース粒子がとるボース分布関数と呼び，式 2.1 をフェルミ粒子がとるフェルミ分布関数と呼ぶ．以後，前者を  $f_B(\epsilon)$ ，後者を  $f_F(\epsilon)$  と書き表すことにする．

ここでどのようなときに BEC が起こるのかを考えてみる．一般に 3 次元系内の自由粒子がとる一粒子状態密度は  $\nu(\epsilon) = c \sqrt{\epsilon}$  ( $c$  は系の体積と自由粒子の質量で決まる定数) で与えられる．単位体積あたりの粒子数密度を求めると，

$$\begin{aligned} \rho(\beta, \mu) &= \int_0^{\infty} d\epsilon \nu(\epsilon) f_B(\epsilon) = c \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} \\ &= c\beta^{-3/2} \int_0^{\infty} du \frac{u^{1/2}}{e^{-\beta\mu} e^u - 1} = c\beta^{-3/2} \eta(\beta\mu) \end{aligned} \quad (2.13)$$

となる．ただし， $u = \beta\epsilon$  と変数変換し，

$$\eta(x) = \int_0^{\infty} du \frac{u^{1/2}}{e^{-x} e^u - 1} \quad (2.14)$$

と定義した．ここで  $x \leq 0$  とした．ボース分布関数の定義から， $\mu \leq \epsilon_1$  ( $\epsilon_1$  は一粒子基底状態のエネルギー固有値) という制限が設けられ， $\epsilon_1$  は多くの系で 0 とみなしてよいからである．

しかし，実は  $\rho$  を評価するときに

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_B(\epsilon_j)}{V} \rightarrow \int_0^{\infty} d\epsilon \nu(\epsilon) f_B(\epsilon) \quad (2.15)$$

としたのには  $f_B/V$  が総和の  $\rho$  に比べて十分に小さいことが必要である．詳細は省くが  $j \geq 2$  のときは  $f_B/V$  は十分に小さくなるが， $j = 1$  のときには計算過程において，

$$f_B = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j - \mu)} - 1} \leq \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j - \epsilon_1)} - 1} \quad (2.16)$$

という評価が行えない為， $j = 1$  の占有数だけ別個に扱う必要がある．

もう一度  $\rho$  を計算しなおすと，

$$\rho(\beta, \mu) = \frac{\langle \hat{n}_1 \rangle_{\beta, \mu}}{V} + \int_0^{\infty} d\epsilon \nu(\epsilon) f_B(\epsilon) \quad (2.17)$$

となる．第二項の積分の下限は  $\epsilon_2$  だが実質的に 0 として構わない．2.1 と同様に積分すると，

$$\frac{\langle \hat{n}_1 \rangle_{\beta, \mu}}{V} + c\beta^{-3/2} \eta(\beta\mu) \quad (2.18)$$

さて  $\eta(\beta\mu)$  は常に正値を取る単調増加関数で  $\eta(0) \simeq 2.315157$  と評価できる． $\eta(\beta\mu) = c^{-1}\beta^{3/2}\rho$  として， $\beta$  と  $\rho$  をあげる，つまり低温，高密度を設定してみると， $c^{-1}\beta^{3/2}\rho \nearrow 0$  で  $\beta\mu \nearrow 0$  となる．これは  $\mu \nearrow 0$  を意味し，

$$\frac{\langle \hat{n}_1 \rangle_{\beta, \mu}}{V} + c\beta^{-3/2} \eta(0) \quad (2.19)$$

としてよい．これは

$$\frac{\langle \hat{n}_1 \rangle_{\beta, \mu}}{V} = \rho - c\beta^{-3/2} \eta(0) \quad (2.20)$$

と変形できる．

この式は最低エネルギー準位を体積に比例する粒子数が占めることを示し，BEC の特徴を端的に表している．凝縮現象は物質の様相が，あるパラメーターの境目で突如として変わる相転移現象として捉えられ，その転移点を  $\rho$  を一定に保ち， $\beta$  を変化させる設定で求めることができる．式 2.18 から式 2.19 のへの転移は  $c^{-1}\beta_c^{3/2}\rho = \eta(0)$



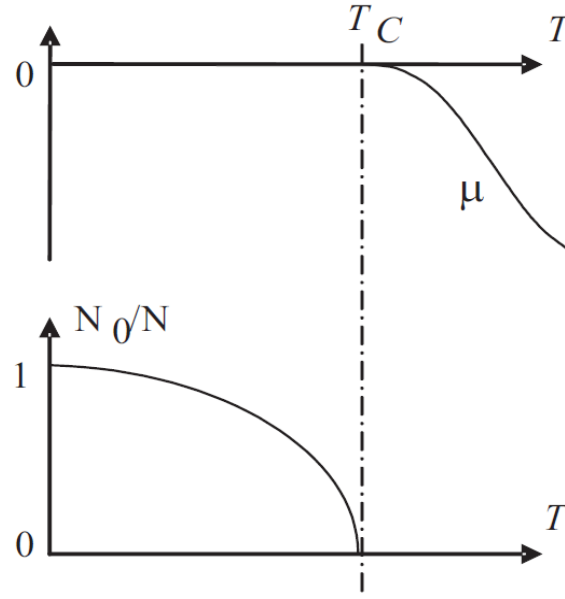


図 2.1:  $\rho_0(T)$  and  $\mu$  v.s.  $T$  for a 3D bose gas with given density  $n$

という条件で起こると考えられ ( $\beta_c$  は転移点の逆温度) ,

$$\beta_c = \left( \frac{c\eta(0)}{\rho} \right)^{2/3} \quad (2.21)$$

と表せる .  $\beta_c$  を使って低温領域での最低準位に存在する粒子数密度  $\rho_1(\beta)$  を求めると , 2.20 より

$$\rho_1(\beta) = \rho - c\beta^{-3/2}\eta(0) = \rho \left( 1 - \frac{1}{\beta^{3/2}} \frac{c\eta(0)}{\rho} \right) = \rho \left\{ 1 - \left( \frac{\beta_c}{\beta} \right)^{3/2} \right\} \quad (2.22)$$

となる .  $\beta = 1/(k_B T)$  から転移温度  $T_c$  と  $\rho_1(T)$  の関係は以下のように要約できる .

$$\rho_1(T) = \begin{cases} 0, & (T \geq T_c) \\ \rho \left( 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right), & (T \leq T_c) \end{cases} \quad (2.23)$$

図 2.1 に温度を横軸にとったときの基底準位粒子密度と化学ポテンシャルの変化を示す . ここで 3 次元空間内の質量  $m$  を持った自由粒子を例にしよう . 転移温度での基底準位の密度は ,

$$\rho_0(T_c) = \left( \frac{mk_B T_c}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \eta(0) \right) \quad (2.24)$$

と計算できる．最右辺の第二項は約 2.612 であり，第一項は熱的ド・ブロイ波長，

$$\lambda_T(T) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}} \quad (2.25)$$

の逆数の 3 乗であり，

$$\rho_0(T_c) = 2.612/\lambda_{T_c}^3 \quad (2.26)$$

と書き直せる．式 2.26 は BEC が粒子間隔が熱的ド・ブロイ波長と同程度になったときに起こることを意味している．一般に  $d$  次元での BEC の転移密度は

$$\rho_0(T_c) \propto \lambda_T(T_c)^{-d} \quad (2.27)$$

転移温度は，

$$T_c \propto 2\pi\hbar^2 \rho_{0,T_c}^{-2/d} m^{-1} \quad (2.28)$$

で表される．

energy の 1 を 0 に

order parameter

## 2.2 ボゴリューボフによる BEC の理論

現代において，BEC を体系づける枠組みとしてボゴリューボフによるものが ([12][13][14]) 使われることが多い．以下，このボゴリューボフの理論に沿って BEC に特徴を示す．

まずは相互作用をしないボース粒子に第二量子を施す． $i$  番目の状態に存在する粒子についての消滅演算子を  $\hat{a}_i$ ，生成演算子を  $\hat{a}_i^\dagger$  とする．このとき，この演算子は以下のボース交換関係に従う．

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] = \delta_{ij} \quad (2.29)$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \quad (2.30)$$

また  $i$  にあるすべての粒子数を表す演算子  $\hat{N}_i$  は  $\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$  と記述できるため系のハミルトニアンは，

$$\hat{H} = \sum_i (\epsilon_i - \mu) \hat{N}_i = \sum_i (\epsilon_i - \mu) \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \quad (2.31)$$

と書き表せる．

BEC において， $\hat{a}_0/\sqrt{V}$ ， $\hat{a}_0^\dagger/\sqrt{V}$  という演算子をここで考える．これらの演算子の交換関係は

$$[\frac{\hat{a}_0}{\sqrt{V}}, \frac{\hat{a}_0^\dagger}{\sqrt{V}}] \xrightarrow{V \rightarrow \infty} 0, \quad (2.32)$$

となり， $V$  を大きくとることで 0 に近づく．これは両演算子が  $V$  を大きくした極限で「交換する」ことを意味し， $c$ -数のように振舞うことを示す．次に両演算子の積の期待値をとると，

$$\langle \frac{\hat{a}_i}{\sqrt{V}} \cdot \frac{\hat{a}_i^\dagger}{\sqrt{V}} \rangle = \frac{N_0}{V} \quad (2.33)$$

となり，以下のように振幅が  $\sqrt{N_0/V}$ ，任意の位相  $\phi$  をとる演算子が極限で現れる．

$$a_0 \approx \sqrt{N_0}e^{-i\phi}, \quad a_0^\dagger \approx \sqrt{N_0}e^{i\phi} \quad (2.34)$$

たとえば， $\Omega$  で表される基底状態に  $a_0$ ， $a_0^\dagger$  を作用させると，

$$a_0|\Omega\rangle = \sqrt{N_0}e^{-i\phi}|\Omega\rangle, \quad a_0^\dagger|\Omega\rangle = \sqrt{N_0}e^{i\phi}|\Omega\rangle \quad (2.35)$$

となる．これは基底状態に  $N_0$  個という巨大な数の粒子数があることを意味している．このように，基底状態への演算子を  $c$ -数に置き換える方法をボゴリューボフ近似と呼ぶ．

この近似を使って，有限で均一な系でのボース場の演算子  $\Psi(\mathbf{r})$  を考える．

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_i \hat{a}_i e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}} = \frac{a_0 e^{i\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}} + \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{i \neq 0} \hat{a}_i e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}} = \Psi_0(\mathbf{r}) + \Psi_T(\mathbf{r}) \quad (2.36)$$

$\mathbf{r}$  は空間座標を， $\mathbf{p}_i$  は状態  $i$  の運動量を示している． $\Psi_0(\mathbf{r})$  は  $a_0$  を使って基底状態を表し， $\Psi_T(\mathbf{r})$  はそれ以外の励起状態の重ねあわせで表されている．この演算子を使うと一体の密度行列の非対角要素が計算できる．

$$\begin{aligned} \rho_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \langle \Psi^\dagger(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}) \rangle = \langle \Psi_0^\dagger(\mathbf{r}') \Psi_0(\mathbf{r}) \rangle + \langle \Psi_T^\dagger(\mathbf{r}') \Psi_T(\mathbf{r}) \rangle \\ &= \langle \frac{N_0}{V} e^{i\mathbf{p}_0 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \rangle + \langle \frac{1}{V} \sum_{i \neq 0} \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \rangle e^{i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}_i} \rangle \end{aligned} \quad (2.37)$$

ここでも基底状態の項と励起状態の項が分かれて書き表されている．第二項に現れる励起状態は，項の振幅自体が  $V \rightarrow \infty$  で消滅してしまい，系に寄与する影響は小さくなる．一方，第一項，基底状態は  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  に関係なく，一定の値  $\frac{N_0}{V} = n_0$  を

とり ( $n_0$  は粒子数の密度である) ,  $\rho_1(r-r') \approx |\Psi_0|^2 = n_0$  という近似が成り立つ .  
これは巨視的に距離の離れた場所でも同じ状態が現れるという有限で均一な系が出来上がっていることを意味し , この BEC の重要な特徴を「非対角長距離秩序」 ( off-diagonal long range order, ODLRO ) と呼ぶ .

## 2.3 相互作用のある系での BEC

これまで相互作用をしない理想気体を使って BEC の特徴を見てきた . しかし , 現実の系では粒子間で何らかの相互作用が働くのが普通である . この節では相互作用を含めた系での BEC を考える .

相互作用がある系でのハミルトニアンを書き下してみる .

$$\hat{H} = \sum_p (\epsilon_p - \mu) \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \frac{1}{2V} \sum_{p,k,q} U_q \hat{a}_{p+q}^\dagger \hat{a}_{k-q} \hat{a}_k \hat{a}_p \quad (2.38)$$

ここでは第二項の  $U_q$  が相互作用ポテンシャルを示しており , 同じ相互作用を二回足し上げること防ぐため  $1/2$  をかけている . この式では「3体以上の粒子による」相互作用を無視している . この近似には粒子の密度が低いという  $n|a|^3 \ll 1$  で表される仮定が含まれる ( $a$  は気体の散乱長) .  $\hat{a}_0^\dagger, \hat{a}_0$  を  $\sqrt{N}$  で置き換えるというボゴリューボフ近似を行い ,  $n_0 = N_0/V$  とすると ,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= \frac{1}{2} n_0^2 U_0 V + \sum_{p \neq 0} [(\epsilon_p - \mu) + n_0 U_0 + n_0 U_p] \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p \\ &+ \sum_{p \neq 0} \frac{n_0 U_p}{2} (\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{-p} + \hat{a}_p \hat{a}_{-p}) \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= \sum_{p,q \neq 0} \frac{\sqrt{n_0} U_q}{2\sqrt{V}} (\hat{a}_{p+q}^\dagger \hat{a}_q \hat{a}_{-p}^\dagger + \hat{a}_{p+q} \hat{a}_{-q} \hat{a}_p) + \sum_{p,q \neq 0} \frac{U_q}{2V} \hat{a}_{p+q}^\dagger \hat{a}_{k-q}^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_p \\ &+ \hat{a}_{p+q}^\dagger \hat{a}_{k-p}^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_p \end{aligned} \quad (2.41)$$

$\hat{H}_0$  は 2.38 式の第一項と  $k=0$  をまとめた項 ,  $\hat{H}_1$  はそれ以外の項を指す .  $n_0$  が一定のとき  $V \rightarrow \infty$  で  $\hat{H}_1 \rightarrow 0$  となる一方 ,  $\hat{H}_0$  は  $n_0$  のオーダーに留まるため , ここからは  $\hat{H}_0$  のみを議論する .

ここで  $\hat{H}_0$  に対して「ボゴリューボフ変換」と呼ばれる対角化を行う .  $\hat{b}_p$  と  $\hat{b}_p^\dagger$  と

いう演算子を導入する．この演算子は以下のようにして  $\hat{a}_p, \hat{a}_p^\dagger$  と関係付けられる．

$$\hat{a}_p = u_p \hat{b}_p - v_p^* \hat{b}_{-p}^\dagger, \quad \hat{a}_p^\dagger = u_p^* \hat{b}_p^\dagger - v_{-p} \hat{b}_{-p} \quad (2.42)$$

ここで  $u_p = u_{-p}, v_p = v_{-p}$  , そして  $|u_p|^2 - |v_{-p}|^2 = 1$  ならば , 以下の交換関係が成り立つ．

$$[\hat{b}_i, \hat{b}_j] = 0, [\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad (2.43)$$

対角化の結果は以下ようになる．

$$\hat{H}_0 = E_0 + \sum_p \omega(p) \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p \quad (2.44)$$

$$\omega(p) = \sqrt{\varepsilon_p^2 + 2n_0 U_p \varepsilon_p} \quad (2.45)$$

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_p [\omega(p) - \varepsilon_p - n_0 U_p] + \frac{n_0^2 U_0 V}{2} \quad (2.46)$$

$$u_p = \left( \frac{\varepsilon_p + n_0 U_p}{2\omega(p)} + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \quad (2.47)$$

$$v_{-p} = \left( \frac{\varepsilon_p + n_0 U_p}{2\omega(p)} - \frac{1}{2} \right)^{1/2} \quad (2.48)$$

$E_0$  は  $\hat{b}_p |vac\rangle = 0$  で定義される  $|vac\rangle$  のエネルギーを指し ,  $\hat{b}_p^\dagger |vac\rangle$  は  $\omega(p)$  の固有エネルギーを持った状態への励起を意味している．

2.45 式は「ボゴリューボフ分散」と呼ばれ , ほとんどの粒子が基底準位に落ちているため  $\varepsilon_p \ll n_0 U_p$  として二次以上の項を落とすと ,

$$\omega(p) \approx \sqrt{2n_0 U_p \varepsilon_p} \approx \sqrt{2n_0 U_0 \varepsilon_p} = \sqrt{2n_0 U_0 \frac{p^2}{2m}} = |p| \sqrt{\frac{n_0 U_0}{m}} \quad (2.49)$$

と近似できる．この分散は  $u_c = \sqrt{n_0 U_0 / m}$  の音速を持つフォノンの分散と一致している．このフォノンと似た振る舞いをする粒子を「ボゴリューボフ準粒子」と呼ぶ．

## 2.4 超流動状態と2次元系でのBEC

ボゴリューボフ準粒子の重要な特徴として「超流動」が挙げられる． $v_s = p_0 / m$  の速度を持つ凝縮体を考える．壁との摩擦は準粒子のエネルギー励起がBEC気

体のエネルギーを下げるときにのみ発生する．この励起をガリレイ変換によって  $\omega'(\mathbf{p}) = \omega(\mathbf{p}) + \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{p}$  と書き下すと  $\omega'(\mathbf{p}) > 0$  がすべての  $\mathbf{p}$  に対して成り立つとき，そこには自発的なエネルギーの散逸はなくなり，系は摩擦のない超流動状態にある．ランダウの超流動条件は，

$$v_s < v_c = \min_p \frac{\omega(\mathbf{p})}{p} \quad (2.50)$$

であり，2.49 式で表される分散を持つ BEC は  $v < v_c$  のときこの条件を満たす．

BEC の秩序パラメータ  $|\Psi_0|e^{i\theta}$  はガリレイ変換によって不変ではなく，位相因子である  $e^{i\theta}$  が変化する．均一な系では  $|\Psi_0|$  は一定であり，位相因子は以下のように変換できる．

$$S = -\frac{\mu t}{\hbar} \rightarrow S = \frac{1}{\hbar} \left[ m\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{r} - \left( \frac{1}{2}m\mathbf{v}_s^2 + \mu \right) t \right] \quad (2.51)$$

故に，超流動速度は位相因子の gradient に比例する．

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla S \quad (2.52)$$

超流動は BEC の大きな特徴であるが，均一ではない系での BEC は超流動を引き起こさない，また2次元系では BEC ではないにも関わらず超流動状態をとることがある．

2次元系では熱的ゆらぎが長距離秩序を壊し  $T > 0$  では BEC が実現しないことが厳密に証明されている ([15], [16])．しかし，位相ゆらぎは必ずしも超流動状態を壊すわけではなく，2次元系では量子渦がその役目を担う．この考え方は Kosterlitz-Thouless 転移という新しい相転移の概念を生む．

$$k_B T_{KT} = n_s \frac{\pi \hbar^2}{2m^2} \quad (2.53)$$

はその転移温度条件である ( $n_s$  は超流動の密度)．熱的ド・ブロイ波長を使うと，

$$n_s \lambda_{T_c}^2 = 4 \quad (2.54)$$

とも書ける． $T_{KT}$  以上の温度では，量子渦が摩擦を生み出し  $n_s$  と量子渦の個数は指数関数的に減ってしまう． $T_{KT}$  以下では，一個の量子渦は対を作ることでエネルギー的に安定し，二点間でコヒーレントな経路が存在する凝縮体が現れる．ここで  $n_s$  は0以外の値をとる．

超流動状態はボゴリューボフ理論で記述することができ， $\omega(\mathbf{p})$  は式 2.45 と同じ

形をとる．ランダウの議論によれば，全体の密度を  $n$ ，常流動の密度を  $n_s$  すると，

$$n = n_n + n_s \quad (2.55)$$

$$n_n = \int d^2p \rho(p) \omega(p) \left[ -\frac{f_{BE}(\omega(p, T, \mu = 0))}{\omega p} \right] \quad (2.56)$$

と書き下せる．ここで  $\rho(p)$  は状態密度である．

2次元空間でのBECは，ボース粒子が  $U \sim r^\eta$  のポテンシャル中にあるとき転移温度に変化が現れる．このとき，状態密度は  $\rho(E) \sim \varepsilon^{2\eta}$  になり，転移温度は

$$k_B T_c^{2D} \sim (n/m)^{\eta/(2+\eta)} \quad (2.57)$$

となる． $L = S^2$  の系において，このとき凝縮している粒子数密度は，

$$n_c = \frac{2}{\lambda_t^2} \ln\left(\frac{L}{\lambda_t}\right) \quad (2.58)$$

となる．この条件は  $T_c > 0$  で達成することができる．

## 第 3 章

# 半導体微小共振器中のエキシトン・ポ ラリトン



量子井戸に共振器構造を組み合わせることによって、フォトンとエキシトンの強結合状態を作り、「エキシトン・ポラリトン」という準粒子を生み出すことができる。本章ではエキシトン・ポラリトンの理論的背景を説明する。3.1 ではエキシトンの物理の紹介をし、3.2 で微小共振器構造を説明したあと、3.3 でエキシトン・ポラリトンの物理を説明する。

## 3.1 量子井戸中のエキシトン・ポラリトン

### 3.1.1 Wannier-Mott Exciton

半導体中の電子の物理は通常、電子によって満たされた「価電子帯」とそこから一定のエネルギー量だけ隔てた場所にある、空の「伝導帯」を想定して考察される。ここで一つの電子がエネルギーを持ち伝導帯に持ち上がったとする。このとき、電子と、価電子帯に残った電子の穴「正孔」の対が相互作用の弱い準粒子を作る。この準粒子を「エキシトン (exciton)」と呼ぶ。エキシトンの正孔を陽子のように見立てると、水素原子と同様の構造を持つことがわかる。しかし、正孔と電子の有効質量の比は、陽子と電子の有効質量に比べて小さい。また固体内では強いスクリーニングの効果が働くため、GaAs 中のエキシトンの束縛エネルギーは水素原子の  $10^{-3}$  ほどの大きさになる。これはエキシトンのボーア半径  $10^2 \text{ \AA}$  ほどになり結晶中のいくつかの格子にまたがることを意味する。この特徴を持つエキシトンを「Wannier-Mott Exciton」と呼び、これから主に扱う対象とする。

バンド構造をもった系のハミルトニアンは以下のように書ける。

$$\hat{H} = \int d^3x \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{H}_0(\mathbf{x}) \hat{\psi}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y}) \hat{V}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{\psi}(\mathbf{x}) \hat{\psi}(\mathbf{y}) \quad (3.1)$$

$\hat{H}_0$  は一つの電子についてのハミルトニアン、 $\hat{V}(\mathbf{x}) = e^2/\epsilon|\mathbf{x}|$  はスクリーニング・クーロン・ポテンシャルである。 $\hat{\psi}$  は固有関数  $\psi_{kj}(\mathbf{x})$  によって以下のように展開される場の演算子である。

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \sum_{j=c,v;k} \hat{a}_{kj} \psi_{kj}(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

$$\psi_{kj}(\mathbf{x}) = u_{kj}(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) / \sqrt{N} \quad (3.3)$$

ここで  $j = c, v$  は伝導帯 (conduction band)、価電子帯 (valence band) を指し、 $u_{kj}(\mathbf{x})$  はブロッホ関数、 $N$  は格子数を指す。また、 $\hat{a}_{kj}$  はフェルミ粒子の交換関係

を満たす電子の消滅演算子である． $\hat{a}_{kv}^\dagger$  を使うと，正孔の消滅演算子  $\hat{b}_{-k}$  を定義できる．

$$\hat{a}_{kv}^\dagger = \hat{b}_{-k} \quad (3.4)$$

そしてここからは伝導帯中の電子を単に  $\hat{a}_{kc} = \hat{a}_k$  と書くことにする．以上を踏まえると 3.1.1 式は非保存項を無視すると以下のように書き下せる．

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum E_e(k) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum E_h(k) \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \\ & + \frac{1}{2} \sum V_{(k1c)(k2c)(k3c)(k4c)} \hat{a}_{k1}^\dagger \hat{a}_{k2}^\dagger \hat{a}_{k3} \hat{a}_{k4} + \frac{1}{2} \sum V_{(-k1v)(-k2v)(-k3v)(-k4v)} \hat{b}_{k1}^\dagger \hat{b}_{k2}^\dagger \hat{b}_{k3} \hat{b}_{k4} \\ & - \sum (V_{(k1c)(k3v)(k2v)(k4c)} - V_{(k1c)(k3v)(k4c)(k2v)}) \hat{a}_{k1}^\dagger \hat{b}_{k2}^\dagger \hat{b}_{k3} \hat{a}_{k4} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$E_e$  ,  $E_h$  はそれぞれ電子と正孔の分散でバンドギャップ  $E_g$  と，それぞれの有効質量  $m_e$  ,  $m_h$  を使って，

$$E_e(k) = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} \quad (3.6)$$

$$E_h(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_h} \quad (3.7)$$

と書ける． $V_{(k1i)(k3j)(k2m)(k4n)}$  ( $i, j, m, n = c, v$ ) はクーロン力による電子正孔間の交換相互作用を表している．

$$V_{(k1i)(k3j)(k2m)(k4n)} = \langle k1i, k2j | \hat{V} | k3m, k4n \rangle \quad (3.8)$$

だが，この式で表される  $V$  は一つの格子間内では極めて緩やかにしか変化しない．そこで次の近似式を導入する．

$$V_{kc-l'v-k'vlc} = \frac{1}{V^2} \int d^3x d^3y \exp[i(l-k) \cdot x + i(l'-k') \cdot y] \frac{e^2}{\epsilon |x-y|} \quad (3.9)$$

今，電子正孔対の一般的な波動関数を考える．

$$|p\rangle = \sum C_{kk'} \hat{a}_k^\dagger \hat{b}_{k'}^\dagger |vac\rangle \quad (3.10)$$

ここで  $|vac\rangle$  は価電子帯が電子で満たされ伝導帯には一つの電子も入っていない状態を指す．シュレディンガー方程式から，確率振幅  $C_{kk'}$  に関する以下の式が立て

られる．

$$(E_e(k) + E_h(k') - E)C_{kk'} - \sum_{ll'} (V_{kc-l'v-k'vlc} - V_{kc-l'v-lc-k'v})C_{ll'} = 0 \quad (3.11)$$

この式を 3.9 式を使ってフーリエ変換すると「Wannier 方程式」が成立する．

$$\hat{H}_{exc}\phi(\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_h) = E\phi(\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_h) \quad (3.12)$$

ここでは，

$$\hat{H}_{exc} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla_e - \frac{\hbar^2}{2m_h}\nabla_h + E_g - \frac{e^2}{\epsilon|\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_h|} \quad (3.13)$$

である．エキシトンの波動関数を  $C_{kk'}$  を使って書くと，

$$\phi(\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_h) = \sum C_{kk'} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_e + i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}_h) \quad (3.14)$$

となる．

ここでエキシトンの質量中心を

$$\mathbf{R} = \beta_e \mathbf{x}_e - \beta_h \mathbf{x}_h \quad (3.15)$$

として ( $\beta_e = m_e/M, \beta_h = m_h/M, M = m_e + m_h$ ) ,  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_e - \mathbf{x}_h$  に関する式として 3.13 式と 3.14 式を書き直すと，それぞれ

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m_r}\nabla_r - \frac{e^2}{\epsilon_0 r} + \varepsilon_{exc,n} \right) \phi_n(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.16)$$

$$\phi(\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_h) = \phi_n(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}) / \sqrt{V} \quad (3.17)$$

となる．この式は  $m_r = m_e m_h / M$  の質量でクーロン力が  $\epsilon_0$  で減衰される水素原子の運動と考えることができる．とすれば，容易に以下の式が立てられる．

まずはエキシトン全体のエネルギー，

$$E(k, n) = E_g - \varepsilon_{exc,n} + \frac{\hbar^2 K^2}{2M} \quad (3.18)$$

そして 1s にあるエキシトンの束縛エネルギー，

$$E_B^{3D} = \varepsilon_{exc,1} = \frac{\hbar^2}{2m_r a_B^2 n^2} \quad (3.19)$$

そして 1s にあるときのボーア半径 ,

$$a_B^{3D} = \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{e^2 m_r} \quad (3.20)$$

ここでエキシトンの生成演算子  $\hat{e}_{K,n}^\dagger$  を求めておこう .  $|p\rangle = \hat{e}_{K,n}^\dagger |vac\rangle$  を使うと ,

$$\hat{e}_{K,n}^\dagger = \sum_{k,k'} \delta_{K,k+k'} \phi_n(\beta_h k - \beta_e k') \hat{a}_k^\dagger \hat{b}_{k'}^\dagger \quad (3.21)$$

となる .  $\phi_n(k)$  は  $\phi_n(x)$  のフーリエ変換である . この式を使って交換子を求めると ,

$$[\hat{e}_{K',n'}, \hat{e}_{K,n}] = 0 \quad (3.22)$$

$$[\hat{e}_{K',n'}^\dagger, \hat{e}_{K,n}^\dagger] = 0 \quad (3.23)$$

$$[\hat{e}_{K',n'}, \hat{e}_{K,n}^\dagger] = \delta_{KK'} \delta_{nn'} - O(n_{exc} a_B^3) \quad (3.24)$$

となり ,  $n_{exc} \ll a_B^{-3}$  でエキシトンがボース粒子として振舞うことになる . これは粒子密度を低く保つか , ボーア半径を大きくすることで達成される .

### 3.1.2 光学遷移

電子正孔対が生成されるとき , 周りの電磁場と相互作用がおきる . 価電子帯の電子が伝導帯に遷移する確率は「フェルミの黄金律」

$$W_{cv} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{f,i} |\langle f | \hat{H}_I | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) \quad (3.25)$$

で表される .  $i$  は初期状態 ,  $f$  は最終状態を指し ,  $\hbar\omega$  はフォトンのエネルギー ,  $\hat{H}_I$  は双極子相互作用を表している . この式の中の行列要素を求めることを考える .

$$M = |\langle f | \hat{H}_I | i \rangle| = \delta_{\sigma, j_e - j_h} \int_V \chi_{ck_e}^*(\mathbf{r}) u_{ck_e}^*(\mathbf{r}) e \mathbf{r} \cdot \mathbf{E} u_{vk_h}(\mathbf{r}) \chi_{vk_h}(\mathbf{r}) \quad (3.26)$$

$\sigma$  は偏光 ,  $j$  は角運動量 ,  $\chi$  は包絡関数 ,  $u$  はブロッホ関数を表している . 一単位区画で  $u$  が一定なのに対し ,  $\chi$  がでわずかしか変化しないという仮定をする . こ

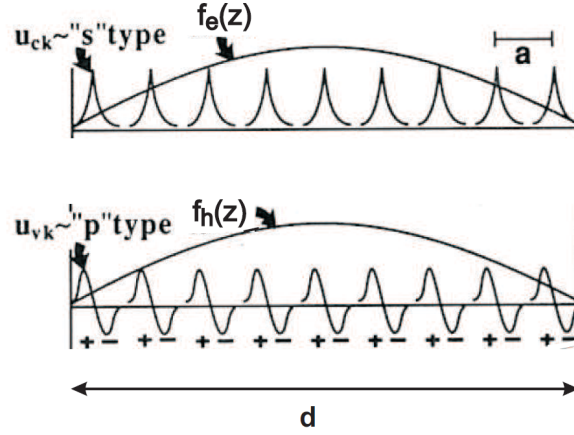


図 3.1: Bloch and envelope functions of electrons and holes in a QW

ここで  $\int_V$  を単位区画  $\Omega_i$  の和として近似すると,

$$\begin{aligned}
 M &\approx \delta_{\sigma, j_e - j_h} \sum_{\mathbf{R}_i} \int_{\Omega_i} d\mathbf{r}' [\chi_{ck_e}^*(\mathbf{r}' + \mathbf{R}_i) u_{ck_e}^*(\mathbf{r}' + \mathbf{R}_i) e\mathbf{r}' \cdot \mathbf{E} u_{vk_h}(\mathbf{r}' + \mathbf{R}_i) \chi_{vk_h}(\mathbf{r}' + \mathbf{R}_i)] \\
 &\approx \delta_{\sigma, j_e - j_h} \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{R}_i} \Omega_{\chi_{ck_e}}^*(\mathbf{R}_i) \chi_{vk_h}(\mathbf{R}_i) \\
 &\quad \left[ \int_{\Omega} d\mathbf{r}' u_{ck_e}^*(\mathbf{r}') e\mathbf{r}' \cdot \mathbf{E} u_{ck_h}(\mathbf{r}') + e\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{E} \int_{\Omega} d\mathbf{r}' u_{ck_e}^*(\mathbf{r}') u_{ck_h}(\mathbf{r}') \right] \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

図 3.1 から見て取れるように  $u_{ck_e}$  が s 波対称性を,  $u_{vk_h}$  が p 波対称性を有していることを考慮すると, 最終的に

$$M \approx \left[ \int_V d\mathbf{r} \chi_{ck_e}^*(\mathbf{r}) \chi_{vk_h}(\mathbf{r}) \right] \delta_{\sigma, j_e - j_h} \left[ \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} d\mathbf{r}' u_{ck_e}^{\dagger}(\mathbf{r}') u_{ck_h}(\mathbf{r}') e\mathbf{r}' \cdot \mathbf{e} \right] \left( \frac{2\pi\omega}{\epsilon\hbar V} \right)^{1/2} \quad (3.28)$$

が得られる.

エキシトン・光子結合を特徴付けるパラメータとしてエキシトン振動子強度  $f$  を考える.  $f$  は原子の振動子強度と同様に,

$$f = \frac{2m^*\omega}{\hbar} |\langle u_v | \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} | u_c \rangle|^2 \frac{V}{\pi a_B^3} \quad (3.29)$$

と定義できる. 光学遷移行列要素  $M$  は  $f$  を使って簡潔に

$$M = \frac{\pi e^2 f}{\epsilon m^* V} \Gamma \quad (3.30)$$

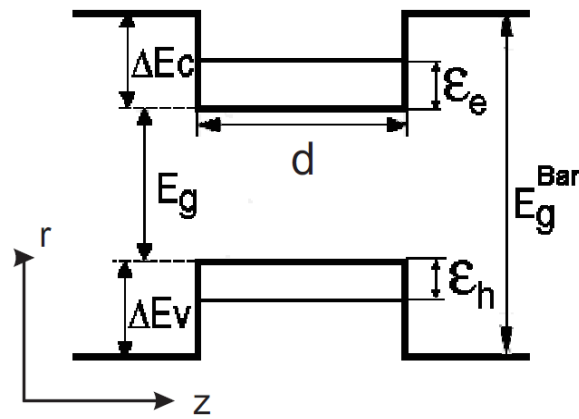


図 3.2: Quantum Well

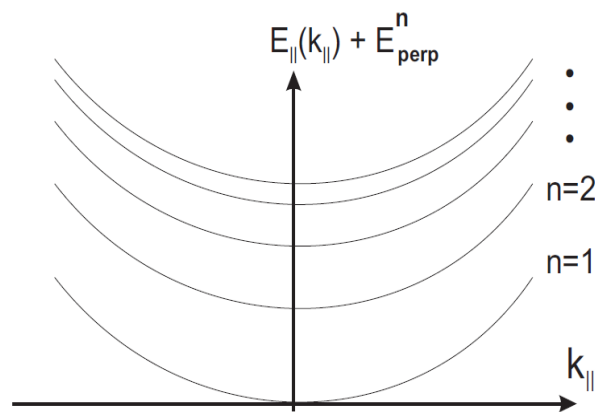


図 3.3: Discrete energy bands in a QW

と表せる． $\Gamma$  は式 3.28 の最初の三項をまとめた形で，選択則と半導体の構造に依存している．

### 3.1.3 量子井戸中の 2 次元エキシトン

分子線エピタキシー法 (Molecular Beam Epitaxy; MBE) の発展によって，原子一個分の精度で結晶を成長させることが可能になった．この技術により量子井戸 (Quantum-Well; QE) と呼ばれる構造を作ることによって，エキシトンを二次元平面内に閉じ込めることができる．量子井戸はバンド・ギャップがエキシトンのボーア半径ほどに小さい薄い半導体を，バンド・ギャップが大きい半導体で挟み込んだ形を持つ (図 3.2)．この構造内ではエキシトンは量子井戸の結晶成長方向 (以下  $z$  方

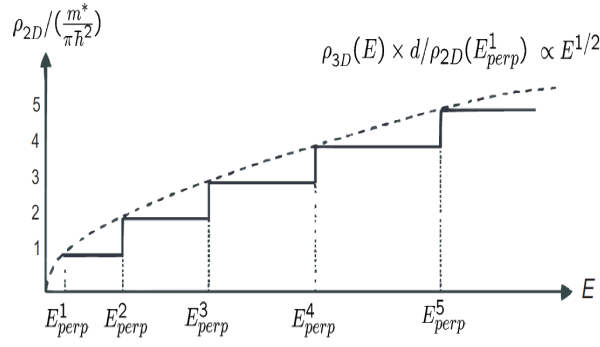


図 3.4: Energy density of states in 3D and 2D

向と記述する)に垂直な平面内しか動けない．そしてエネルギー準位は図??のように離散化する．これは3次元系でのエネルギー状態密度が $\propto E^{1/2}$ なのに対し，2次元系でのそれがステップ型の関数になるからである(図3.4)．

量子井戸の形成はバンド構造にも変化をもたらす．GaAs基板の場合，正孔はp波の波動関数を持ち $L = \pm 1$ の軌道角運動量と $S = \pm \frac{1}{2}$ のスピンを持つ．3次元系と2次元系の比較を図3.5に示す．3次元系では，正孔は2重に縮退した「軽い正孔」のバンドと2重に縮退した「重い正孔」のバンドを持つ．軽い正孔は $m_{lh}^{3D} = m_e/(\gamma_1 + 2\gamma_2)$ の質量を持ち，全角運動量は $J = \pm 1/2$ ，重い正孔は $m_{hh}^{3D} = m_e/(\gamma_1 - 2\gamma_2)$ の質量を持ち，全角運動量は $J = \pm 3/2$ である( $\gamma_{1,2}$ はLuttinger parameterと呼ばれる値である)．3次元系では $k = 0$ での軽い正孔と重い正孔の縮退が解け，重い正孔のバンドが伝導帯に近づき，新たに $m_{hh||} = m_e/(\gamma_1 - \gamma_2)$ の有効質量を持った分散をとる．

われわれの実験では，バンド間の混合は量子井戸の束縛が強いため無視してよく，もっぱら最低準位の電子バンドと重い正孔バンドを考える，

### 3.1.4 QW エキシトンの束縛エネルギー

2次元系におけるエキシトンのボーア半径は3次元系の式3.20の半分になり，束縛エネルギーは式3.19の4倍になる．さらに正確な値はQWの厚さを考慮に入れて導出することができるが([17])，ここからは強く束縛された，比較的小さい運動量で動くエキシトンについて考えることにする．そこで以下の近似を導入する．

1. 電子と正孔は $z$ 方向に矩形のポテンシャル $V_e$ ， $V_h$ を感じる．

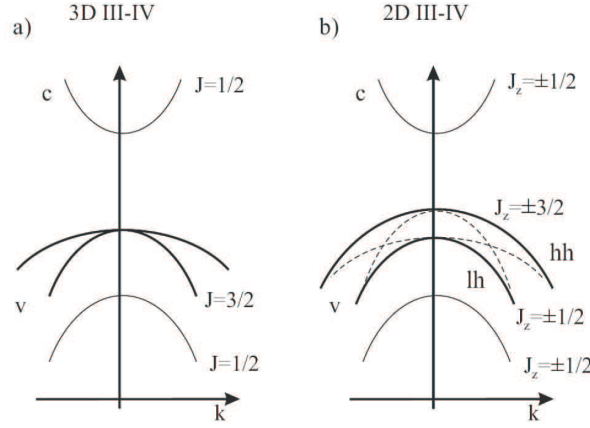


図 3.5: Band structures for III-IV semiconductors in (a)bulk and (b)QW.

2. 伝導帯と価電子帯は放物線として扱う．
3. 高い価電子帯との混合はないとする．
4. 電子と正孔のサブバンドとの混合はないとする．

とすると，エキシトンの波動関数は以下の要素に分解できる．

$$\phi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) = f_e(z_e)f_h(z_h)g(r, Z), \quad Z = |z_e - z_h| \quad (3.31)$$

ここで， $f_e$ ， $f_h$  はそれぞれ電子と正孔の縦方向の波動関数を表し， $g(r, Z)$  は電子正孔対の波動関数を指す．この関数は以下の運動方程式を満たす．

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dz_e} \left( \frac{1}{m_{e\perp}} \frac{d}{dz_e} \right) + V_e(z_e) \right] f_e(z_e) = \varepsilon_e f_e(z_e) \quad (3.32)$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dz_h} \left( \frac{1}{m_{h\perp}} \frac{d}{dz_h} \right) + V_h(z_h) \right] f_h(z_h) = \varepsilon_h f_h(z_h) \quad (3.33)$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2u_{\parallel}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) - \frac{e^2}{\epsilon_0(r^2 + Z^2)^{1/2}} \right] g(r, Z) = \varepsilon_r(Z) g(r, Z) \quad (3.34)$$

そして，エキシトンの束縛エネルギーは

$$E_B^{2D} = \int dz_e dz_h |f_e(z_e)|^2 |f_h(z_h)|^2 \varepsilon_r(z_e - z_h) \quad (3.35)$$

GaAs で作った量子井戸を AlAs の障壁層で挟み込んだ場合の例をいくつか図 3.6 に示す． $d$  が大きいときはエキシトンは量子井戸中に強く束縛されいるが， $d$



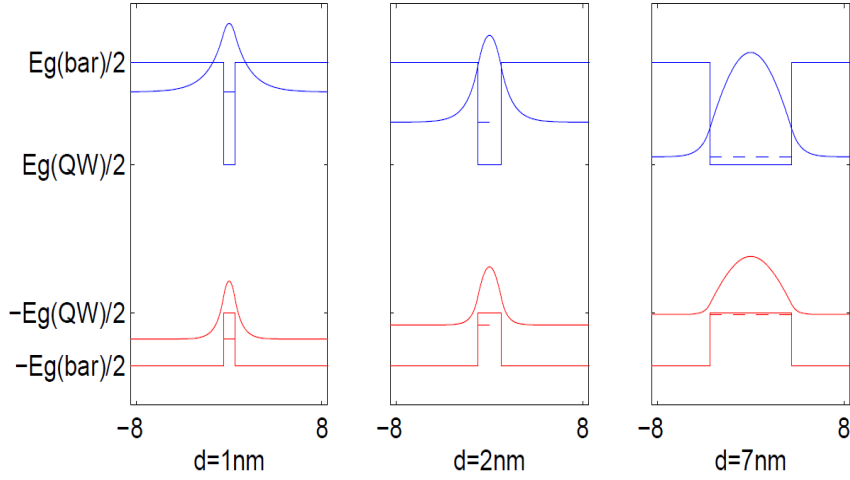


図 3.6:  $f_e$  and  $f_z$  for GaAs/AlAs QWs.

が小さくなると，エキシトンの波動関数は量子井戸の外に染み出していく．ここで電子の波動関数は正孔よりも大きな広がりを持っている．

### 3.1.5 量子井戸エキシトンの光学遷移

三次元系のエキシトンに比べ，量子井戸中のエキシトンの場合，光学遷移が重要な特徴となる．式 3.28 に現れた運動量保存則は  $z$  方向の運動が制限を受けるため，異なる形になる．包絡関数は，

$$\chi_{ck_e}(\mathbf{r}) = f_e(z) \exp(i\mathbf{k}_{e\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}) \quad (3.36)$$

$$\chi_{ck_h}(\mathbf{r}) = f_h(z) \exp(i\mathbf{k}_{h\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}) \quad (3.37)$$

となり，式 3.28 は，

$$\int_V d\mathbf{r} \chi_{ck_e}^*(\mathbf{r}) \chi_{vk_h}(\mathbf{r}) = \int_z dz f_e^*(z) f_h(z) \int_S d\mathbf{r}_{\parallel} \exp[i(\mathbf{k}_{h\parallel} - \mathbf{k}_{e\parallel}) \cdot \mathbf{r}_{\parallel}] \quad (3.38)$$

という形になる．右辺の二つ目の積分は量子井戸内の運動量保存則を表している．量子井戸内のエキシトンは，任意の  $z$  方向運動量  $k_{\perp}$  と同じ平面内運動量  $k_{\parallel}$  と結合する．

重い正孔は軌道角運動量を持つため，軌道角運動量の保存から TE モード ( Transverse Electric Mode, TE Mode) としか結合しない．また，軽い正孔は 1/3 の確率で

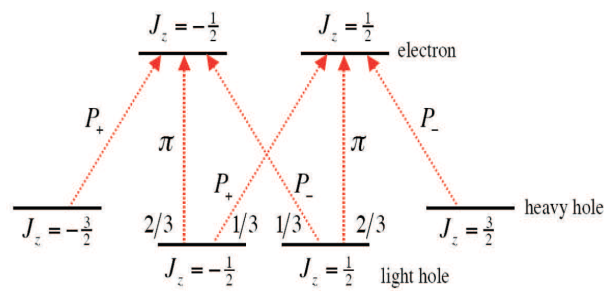


図 3.7: Optical transitions between electrons and holes that conserve total angular momentum.

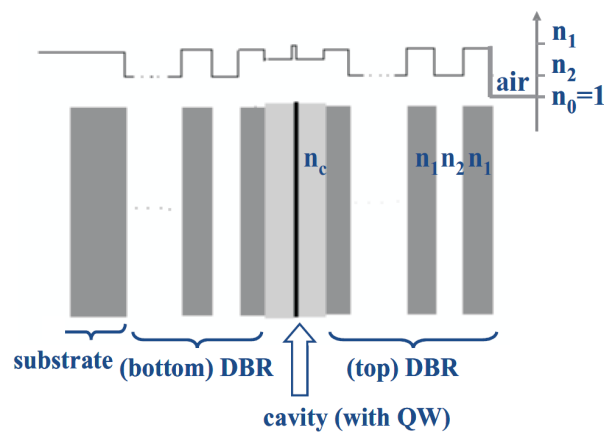


図 3.8: Sketch of a semiconductor  $\lambda/2$  microcavity

TE モードと,  $2/3$  の確率で TM モードと結合する．その様子を図 3.7 に示す．

## 3.2 半導体微小共振器

### 3.2.1 DBR 反射器

図 3.8 は DBR ( Distributed Bragg Reflectors ) と呼ばれる反射鏡に両端を挟まれた  $\lambda_c/2$  の厚さを持った共振器の模式図である．DBR は  $\lambda_c/4$  の厚さを持った高い屈折率を持つ層と低い屈折率を持った層が交代で張り合わされた構造を持っている．DBR の中ではそれぞれの層で反射した光が干渉し, 高い反射率を持つ「ストップ・バンド」という波長帯が存在する ( 3.9 ) ．

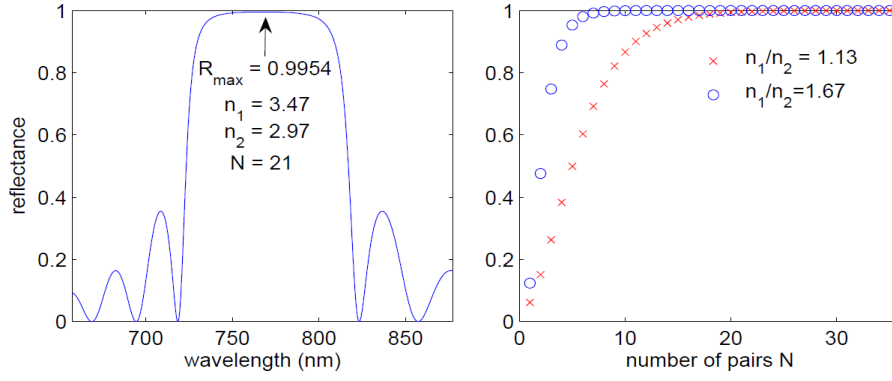


図 3.9: (a)Reflection spectra of a typical DBR.(b) $R_{\max}^{2N}$  vs. N

$n_1, n_2$  を  $N$  層ずつ配置した場合，ストップ・バンド内での最も高い反射率は，

$$R_{\max}^{2N} = \left( \frac{1 - \frac{n_c}{n_t} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^{2N}}{1 + \frac{n_c}{n_t} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^{2N}} \right)^2 \quad (3.39)$$

で表される． $n_t$  は基板の屈折率である．次に  $n_1$  の屈折率を持った  $N+1$  層， $n_2$  の屈折率を持った  $N$  層で構成される DBR を考えてみる．同様にストップ・バンド内での最も高い反射率を考えると，

$$R_{\max}^{2N+1} = \left( \frac{1 - \frac{n_c}{n_1} \frac{n_t}{n_1} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^{2N}}{1 + \frac{n_c}{n_1} \frac{n_t}{n_1} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^{2N}} \right)^2 \quad (3.40)$$

式 3.40 は光が入ってくる面「トップ・DBR」の反射率，式 3.58 はトップ・DBR とは逆の側にある「ボトム・DBR」の反射率を表しており（トップ・DBR において  $n_t = 1$ ），双方で  $n_1 > n_2$  のとき最大値をとる． $R_{\max}$  は以下のように近似できる．

$$R_{\max}^{2N} \approx 1 - \frac{4n_c}{n_t} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^{2N} \quad (3.41)$$

$$R_{\max}^{2N+1} \approx 1 - \frac{4n_c n_t}{n_1^2} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^{2N} \quad (3.42)$$

共振器の厚さが  $\lambda_c/2$  のとき， $\lambda_c$  の周りに共振が発生する． $\lambda_c$  で急峻になる透過率  $T$  は以下の式で表される．

$$T = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2 + 4 \sqrt{R_1 R_2} \sin^2(\phi/2)} \quad (3.43)$$

$\phi$  は共振器内でフォトンが往復する際の位相シフトを指す．

共振器の重要なパラメーターとして  $Q$  値がある．

$$Q = \frac{\lambda_c}{\Delta\lambda_c} \approx \frac{\pi(R_1 R_2)^{1/4}}{1 - (R_1 R_2)^{1/2}} \quad (3.44)$$

$\Delta$  は共振の幅を指す．共振器が  $\lambda/2$  のとき  $Q$  値はフォトンが共振器から出て行くまでに往復する回数を指している．図 3.10(a) に  $Q = 4000$  のときの反射率を示す．図 3.10(b) は共振 TE モードの電磁場  $|E(z)|^2$  を示している．金属でできた共振器と違い，場が DBR の中にまで深く浸透していることがわかる．共振器の有効長は以下の式で定義できる．

$$L_{eff} = L_c + L_{DBR} \quad (3.45)$$

$$L_{DBR} = \frac{\lambda_c}{2n_c} \frac{n_1 n_2}{|n_1 - n_2|} \quad (3.46)$$

### 3.2.2 共振器分散関係

平面 DBR は電磁場を  $z$  軸方向に閉じ込めることができる． $z$  軸に対して  $\theta$  の角度でフォトンを入射させたとき， $\lambda_c / \cos \theta$  で共振が起こる．このときの分散関係は以下の式で表される．

$$E_{cav} = \frac{\hbar c}{n_c} \sqrt{k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2} \quad (3.47)$$

ここで  $k_{\perp} = n_c \frac{2\pi}{\lambda_c}$  である．平面内の波数  $k_{\parallel}$  と入射角  $\theta$  には以下の関係がある．

$$k_{\parallel} = n_c \frac{2\pi}{\lambda_c} \tan[\sin^{-1}(\frac{\sin \theta}{n_c})] \stackrel{k_{\parallel} \ll k_{\perp}}{\approx} \frac{2\pi}{\lambda_c} \theta \quad (3.48)$$

この近似を用いると共振器内の分散関係も以下のように整理できる．

$$\begin{aligned} E_{cav} &\approx \frac{\hbar c k_{\perp}}{n_c} \left(1 + \frac{k_{\perp}^2}{2k_{\parallel}^2}\right) \\ &= E_{cav}(k_{\parallel}=0) + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2(2\pi\hbar/\lambda_c c)} \\ &= E_{cav0} + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_{cav}} \end{aligned} \quad (3.49)$$

ここで共振器中のフォトンの有効質量を

$$m_{cav} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_c c} \quad (3.50)$$

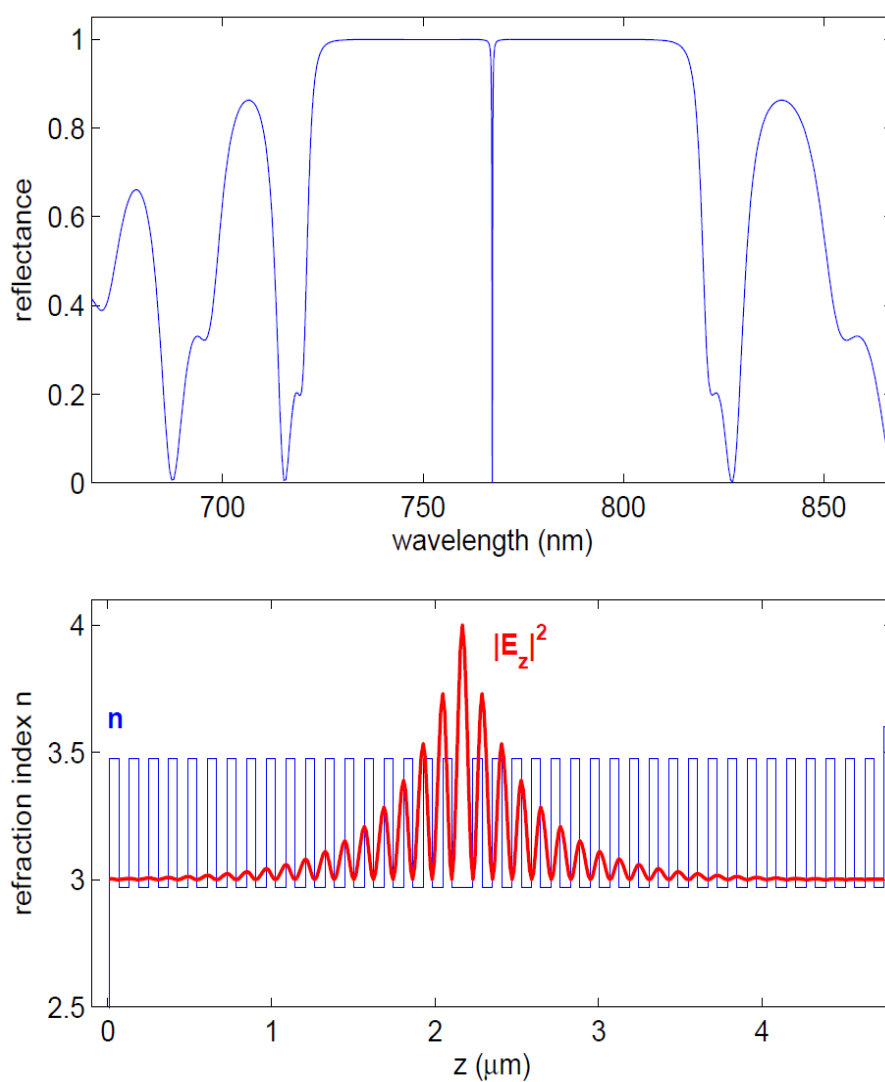


图 3.10: (a) Reflectance of an empty  $\lambda/2$  microcavity. (b) The cavity structure and field intensity distribution  $|E_z|^2$  of the resonant TE mode.

とした．図 3.11 に  $\theta$  を変化させたときの反射率の変化， $k_{\parallel}$  に対する共振器の分散関係の例を示す．

### 3.3 エキシトン・ポーラリトン

量子井戸中の  $J = 1$  の重い正孔が作るエキシトンが，閉じ込められた電磁場と相互作用したときのことを考える．エキシトンとフォトンがエネルギーを交換し合うレートがエキシトンとフォトンが崩壊したりデコヒーレンス状態に陥るレートを優に越えたとき，系全体は準粒子「エキシトン・ポーラリトン」が運動するものとして振舞うことになる．回転波近似を使うと系のハミルトニアンは，

$$\begin{aligned}\hat{H}_{pol} &= \hat{H}_{cav} + \hat{H}_{exc} + \hat{H}_I \\ &= \sum E_{cav}(k_{\parallel}, k_c) \hat{a}_{k_{\parallel}}^{\dagger} \hat{a}_{k_{\parallel}} + \sum E_{exc}(k_{\parallel}) \hat{e}_{k_{\parallel}}^{\dagger} \hat{e}_{k_{\parallel}} + \sum \hbar \Omega (\hat{a}_{k_{\parallel}}^{\dagger} \hat{e}_{k_{\parallel}} + \hat{a}_{k_{\parallel}} \hat{e}_{k_{\parallel}}^{\dagger})\end{aligned}\quad (3.51)$$

$\hat{a}_{k_{\parallel}}^{\dagger}$  は平面内に  $k_{\parallel}$ ， $z$  方向に  $k_c = k \cdot \hat{z}$  の波数を持った光子の生成演算子， $\hat{e}_{k_{\parallel}}$  は平面内に  $k_{\parallel}$  の波数を持ったエキシトンの生成演算子である． $\hbar \Omega$  は光子遷移行列要素  $M$  (式 3.30) によって得られる，エキシトンと光子の双極子相互作用である．ここでは  $k_{\parallel}$  のモードにあるとき  $M$  は 0 にはならないという条件を使った．以上のハミルトニアンは，

$$\hat{p}_{k_{\parallel}} = X_{k_{\parallel}} \hat{e}_{k_{\parallel}} + C_{k_{\parallel}} \hat{a}_{k_{\parallel}} \quad (3.52)$$

$$\hat{q}_{k_{\parallel}} = -C_{k_{\parallel}} \hat{e}_{k_{\parallel}} + X_{k_{\parallel}} \hat{a}_{k_{\parallel}} \quad (3.53)$$

という変換によって対角化することができて，

$$\hat{H}_{pol} = \sum E_{LP}(k_{\parallel}) \hat{p}_{k_{\parallel}}^{\dagger} \hat{p}_{k_{\parallel}} + \sum E_{UP}(k_{\parallel}) \hat{q}_{k_{\parallel}}^{\dagger} \hat{q}_{k_{\parallel}} \quad (3.54)$$

と書ける．ここで  $(\hat{p}_{k_{\parallel}}, \hat{p}_{k_{\parallel}}^{\dagger})$   $(\hat{q}_{k_{\parallel}}, \hat{q}_{k_{\parallel}}^{\dagger})$  はそれぞれ新しく導入された準粒子の生成消滅演算子である．前者をロウワー・ポーラリトン (Lower Polariton，以下 LP)，後者をアッパー・ポーラリトン (Upper Polariton，以下 UP) という固有状態に対応させる．ポーラリトン  $k_{\parallel}$  を持ったエキシトンと光子の重ねあわせ状態であり，エキシトン，光子ともにボース粒子であるため，エキシトン・ポーラリトンもボース

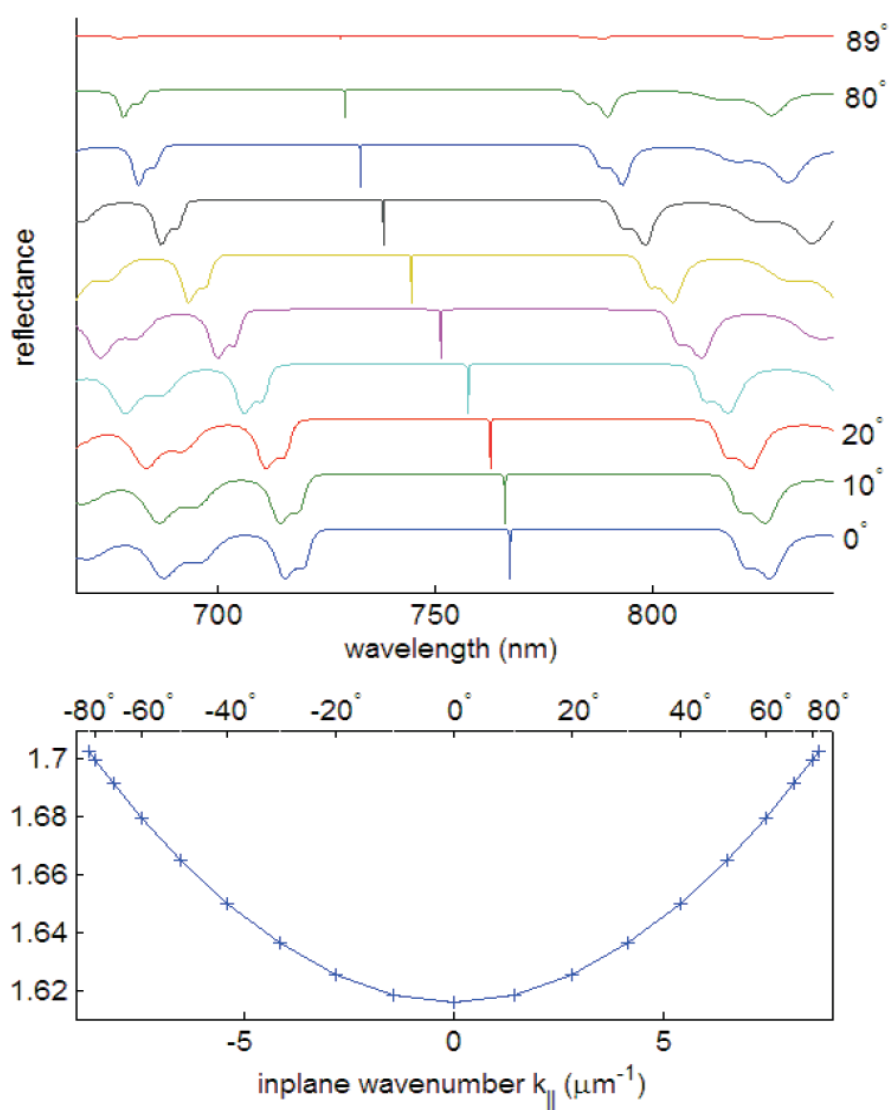


図 3.11: (a) Incidence angle  $\theta$  dependence of the cavity reflectance. (b) Cavity dispersion  $E_{cav}$  v.s.  $k_{||}$  or  $\theta$

粒子となる． $X_{k_{\parallel}}$  と  $C_{k_{\parallel}}$  はエキシトンと光子の確率振幅を表しており，

$$|X_{k_{\parallel}}|^2 + |C_{k_{\parallel}}|^2 = 1 \quad (3.55)$$

の関係を満たしている．ここで  $\Delta E(k_{\parallel}) = E_{exc}(k_{\parallel}) - E_{cav}(k_{\parallel}, k_c)$  とすると，

$$|X_{k_{\parallel}}|^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\Delta E(k_{\parallel})}{\sqrt{\Delta E(k_{\parallel})^2 + 4\hbar^2\Omega^2}} \right) \quad (3.56)$$

$$|C_{k_{\parallel}}|^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\Delta E(k_{\parallel})}{\sqrt{\Delta E(k_{\parallel})^2 + 4\hbar^2\Omega^2}} \right) \quad (3.57)$$

$\Delta E = 0$  のときに  $|X|^2 = |C|^2 = 1/2$  となり LP，UP とともにエキシトンと光子が半分ずつ含まれる状態になる．

$E_{LP,UP}$  は  $E_{exc,cav}$  と

$$E_{LP,UP}(k_{\parallel}) = \frac{1}{2} \left[ E_{exc} + E_{cav} \pm \sqrt{4\hbar^2\Omega^2 + (E_{exc} - E_{cav})^2} \right] \quad (3.58)$$

いう関係を持つ．UP と LP は最低でも  $E_{UP} - E_{LP} = 2\hbar\Omega$  のエネルギー差を持ち，この値は「ラビ分裂 (Rabi Splitting)」と呼ばれる． $\Delta E$  を変化させたとき， $E_{cav}$  と  $E_{exc}$  が交叉する場所では，この分裂によって  $E_{UP}$  と  $E_{LP}$  が交わらない，いわゆる「反交叉」という現象が起きる．この現象はエキシトンと光子の強結合の著しい特徴である． $|E_{cav} - E_{exc}| \gg \hbar\Omega$ ，つまり  $\Delta E$  が大きくなるときには  $E_{UP}$ ， $E_{LP}$  はそれぞれ  $E_{cav}$ ， $E_{exc}$  に接近し，エキシトン・ポーラリトンという準粒子を導入する意味合いは小さくなる．

式 3.58 を用いると， $k_{\parallel} \ll k_{c\parallel}$  のときのポーラリトンの分散関係を表す以下の近似式が導ける．

$$E_{LP,UP}(k_{\parallel}) \approx E_{LP,UP}(0) + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_{UP,LP}} \quad (3.59)$$

ここでエキシトン・ポーラリトンの有効質量  $m_{UP,LP}$  を導入した．それぞれ，

$$\frac{1}{m_{LP}} = \frac{|X|^2}{m_{exc}} + \frac{|C|^2}{m_{cav}} \quad (3.60)$$

$$\frac{1}{m_{UP}} = \frac{|C|^2}{m_{exc}} + \frac{|X|^2}{m_{cav}} \quad (3.61)$$

で定義する．LP の有効質量を概算してみる．

$$m_{LP}(k_{\parallel} \sim 0) \approx \frac{m_{cav}}{|C|^2} \sim 10^{-4} m_{exc} \quad (3.62)$$



これはエキシトンの有効質量  $m_{exc}$  に比べて,  $m_{LP}$  がきわめて小さいことを意味しており, BEC の転移温度 (式 2.28) が質量に反比例することから, 高温での BEC がエキシトン・ポーラリトンに期待できる.

$k_{\parallel} \gg k_{c\parallel}$ ,  $E_{cav}(k_{\parallel}) - E_{exc}(k_{\parallel}) \gg \hbar\Omega$  のとき, UP, LP の分散はそれぞれ光子とエキシトンの分散に近づき, LP の有効質量は  $m_{LP}(k_{\parallel} \gg k_{c\parallel}) \sim m_{exc}$  とエキシトンの有効質量に近づく.  $\Delta$  を変化させたときのそれぞれの分散関係を図 3.12 に示す.

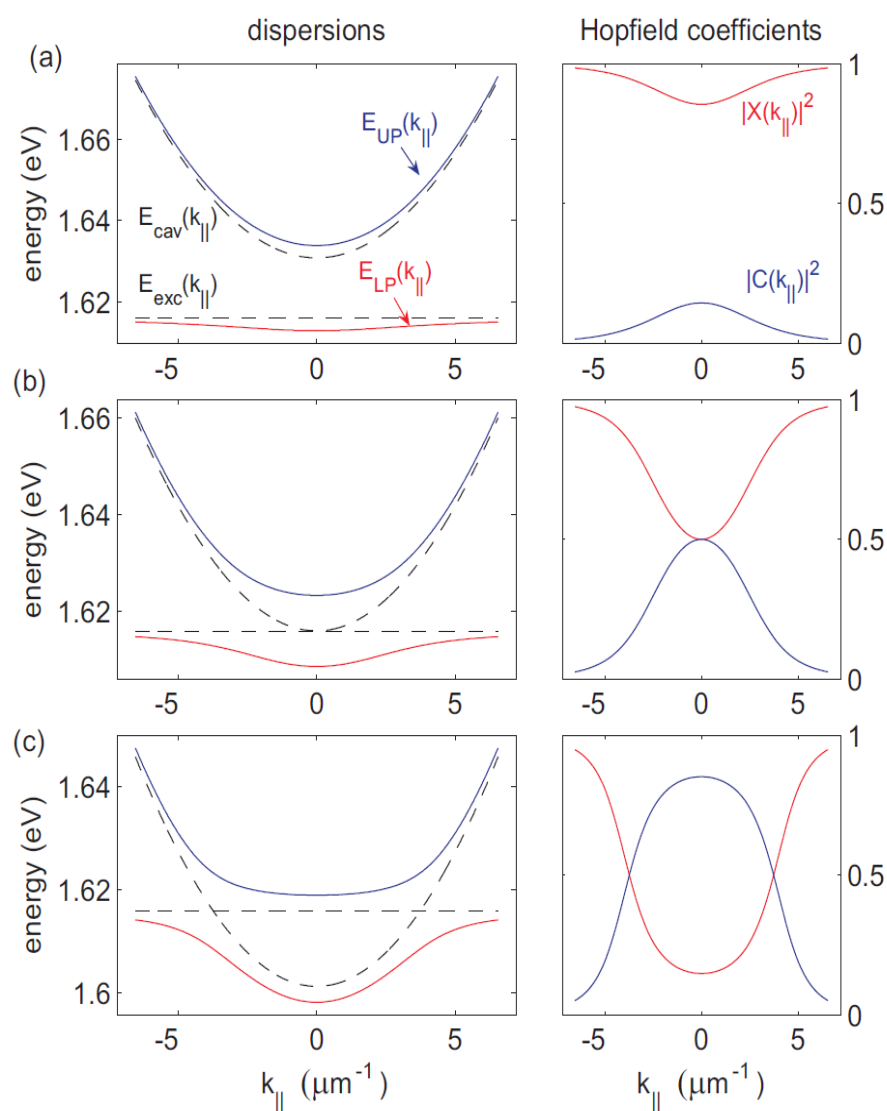


図 3.12: Polariton dispersions and corresponding Hopfield coefficient at (a)  $\Delta = 2\hbar\Omega$ , (b)  $\Delta = 0$ , and (c)  $\Delta = -2\hbar\Omega$

## 第 4 章

### p軌道ボース・アインシュタイン凝縮

本章では、本研究の目的である p 軌道上にある BEC をつかった物理について概説する。4.1 では原子気体の p 軌道 BEC を扱った Congjun Wu らの研究について概説する。4.2 ではその議論をふまえ本研究の目的である単一の場所にトラップされたエキシトン・ポラリトンがとる状態を議論する。

## 4.1 原子気体による p 軌道ボース・アインシュタイン凝縮

カリフォルニア大学の Congjun Wu らは原子気体の凝縮体を光格子にトラップし、高軌道上の凝縮体が起こす物理について理論的に研究している ([18])。以下、その研究を紹介する。

原子気体 BEC を用いて量子多体系の物理を観測する試みは、超流動からモット絶縁体への相転移を発生させる理論 ([19][20] と実験 [8]) など、既に実現されているものもあり、近年注目を集めている。こうした手法を使うと、人工的な量子多体系を作り出すことによって固体物理の一般的なモデルを構築し再現することが可能になるだけでなく、原子気体を用いた全く新しい物理系を作り上げることができる。

酸化マグネシウムや電気伝導性酸化物などの金属から絶縁体への転移や超流動状態は、s 軌道よりも高い p, d, f 軌道上の電子の振る舞いが、物性を決める上で本質的な役割を果たしているといわれている。軌道運動の自由度が持つ異方性が、他の軌道のスピン、電荷と相互作用することで、強相関電子系という興味深い現象を引き起こしているのである。

ボース粒子を格子状に並べたとき、格子が形成するポテンシャルは調和振動子型と仮定することができ、

$$\omega_b = \sqrt{4V_0^b E_R^b} \quad (4.1)$$

ここで  $V_0^b$  は 3 次元光格子のポテンシャルの深さ、 $E_R^b$  はレーザーの波長と原子の質量から決まる反跳エネルギーを示す。周期的格子構造を作ると、ボース粒子の波動関数は  $\Phi_n^b(x)$  で表される Wannier 関数を基底に展開できる。ここで  $n$  はブロッホ関数量子数で、 $n = (000)$  は s バンド、 $n = (100), (010), (001)$  は p バンドと呼ばれるエネルギー固有状態を作り出す。p バンドは三重に縮退しており、それぞれを  $p_\mu$  ( $\mu = x, y, z$ ) と指定する。s バンドと p バンドのエネルギー差は  $\hbar\omega_b$  と等しい。p バンドにある凝縮体は観測されているが、準安定状態にある凝縮体は一定の時間が経つと最低準位に落ち込んでしまう。

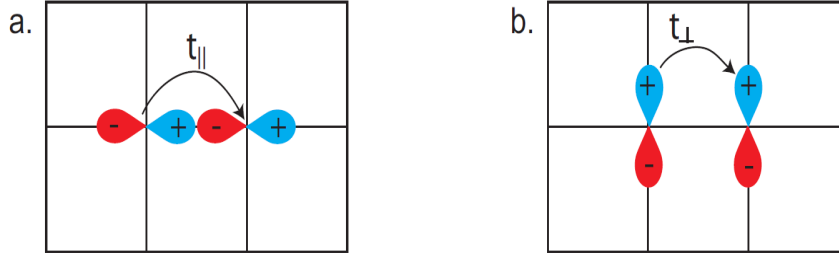


図 4.1: (Color online) Anisotropic hopping matrix elements of  $p$ -orbital bosons on a cubic lattice. The ' $\pm$ ' symbols indicate the sign of two lobes of  $p$ -orbital wavefunction.

p バンドにあるボース粒子の振る舞いは, p バンド・ボース・ハバード模型によって以下のように記述される.

$$\hat{H} = \sum_{r,\mu\nu} [t_{\parallel}\delta_{\mu\nu} - t_{\perp}(1 - \delta_{\mu\nu})](b_{\mu,r+ae_{\nu}}^{\dagger}\hat{b}_{\mu r} + h.c.) + \frac{1}{2} \sum_r [\hat{n}_r^2 - \frac{1}{3}\hat{L}_r^2] \quad (4.2)$$

ここで  $a$  は格子定数,  $\hat{b}_{\mu r}$ ,  $\hat{b}_{\mu r}^{\dagger}$  は格子位置  $r$  に  $p_{\mu}$  ( $\mu, \nu = x, y, z$ ) という状態にあるボース粒子の生成消滅演算子である.  $\hat{n}$  は

$$\hat{n}_r = \sum_{\mu} \hat{b}_{\mu r}^{\dagger} \hat{b}_{\mu r} \quad (4.3)$$

で定義される密度演算子であり,  $\hat{L}$  は,

$$\hat{L}_{\mu r} = -i \sum_{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \hat{b}_{\nu r}^{\dagger} \hat{b}_{\lambda r} \quad (4.4)$$

で定義される角運動量演算子である. この模型は格子位置の横方向と縦方向へのホッピング行列要素である  $t_{\parallel}$  と  $t_{\perp}$  によって決定される.  $U$  は 2 つのボース粒子間の  $s$  波散乱による斥力項を表している.

量子化学において  $t_{\parallel}$  は  $\sigma$  結合,  $t_{\perp}$  は  $\pi$  結合と呼ばれている. ハミルトニアン の定義から  $t_{\parallel}$ ,  $t_{\perp}$  は正である. トンネル効果による波動関数の広がりから  $t_{\parallel} \gg t_{\perp}$  という関係が認められる (図 4.1).

式 4.2 の相互作用は強磁性的 ( $H > 0$ ) であり, これは同じ場所にいるボース粒子が最大角運動量を得るために同じ軌道方向を向くことを意味している. この現象は縮退した電子殻にスピンの揃った電子が入る「フントの規則」と類似している.

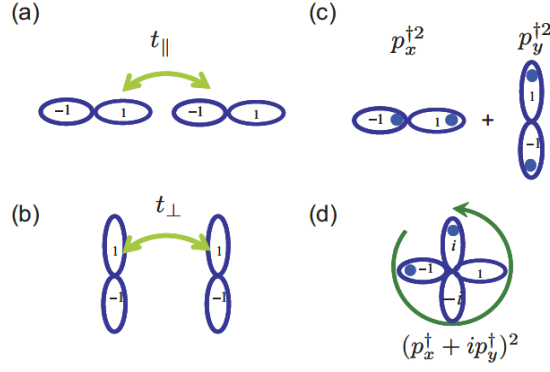


図 4.2: The p-orbital bonding patterns:(a) the  $\sigma$ -bonding(b) $\pi$ -bonding(c)OAM singlet (d)OAM doublets

## 4.2 単一トラップされたエキシトン・ポラリトンの p 軌道 BEC

次に話をそのままエキシトン・ポラリトン BEC の系に移し，系のハミルトニアンが実際にどのような状態を作り出すのかを考えてみる．x 軸方向を向いた p 軌道にあるエキシトン・ポラリトンの生成演算子を  $p_x^\dagger$ ，y 軸方向を向いた p 軌道にあるエキシトン・ポラリトンの生成演算子を  $p_y^\dagger$ ，とすると，2 つの軌道にそれぞれ粒子が存在する状態，

$$\frac{1}{2}(p_x^\dagger p_x^\dagger + p_y^\dagger p_y^\dagger)|0\rangle \quad (4.5)$$

よりも，2 つの軌道が重ね合わさった状態，

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(p_x^\dagger \pm ip_y^\dagger)^2|0\rangle \quad (4.6)$$

に縮退した 2 粒子が入る方を，フントの規則は要請する．それはエネルギー的観点から見ると， $V = g\delta(r_1 - r_2)$  という相互作用が働いたときに， $U = g \int dr^2 |\Psi_{p_{xy}}(r)|^4$  としたときに前者が  $\frac{4}{3}U$ ，後者が  $\frac{2}{3}U$  のエネルギーを持つことに由来している．

これを図に示すと 4.2 となる．

単一の箇所にはトラップされたエキシトン・ポラリトン BEC の p 軌道は以下に説明するような，マイケルソン干渉計を使った方法で観測できることが予想される (4.3)．この方法で得られるのは単一トラップの周りにできた回転する位相の情報である．

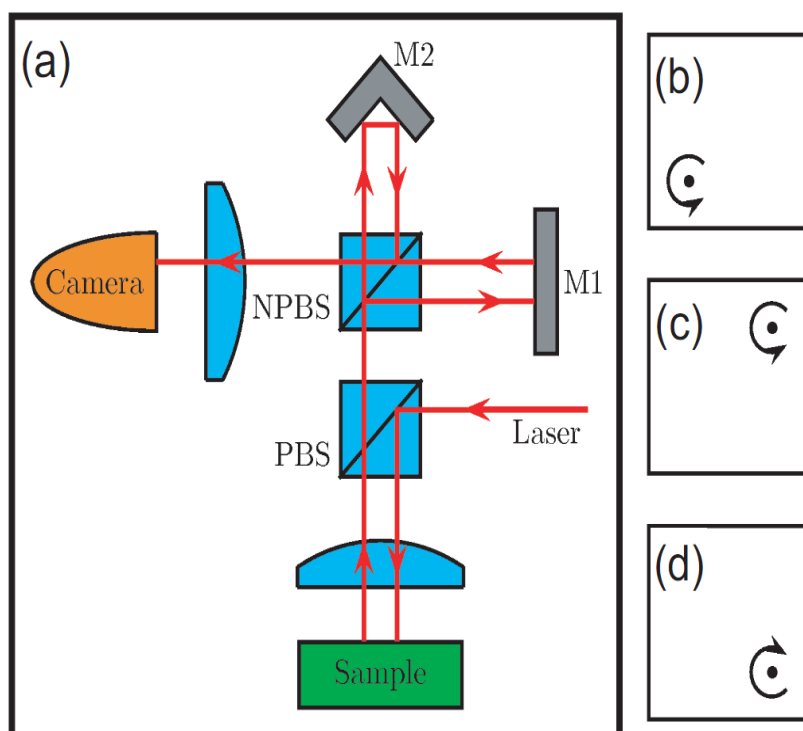


図 4.3: (a) Schematic of a Michelson interferometer imaging setup. (b-d) Illustration of real-space imagings of a single vortex.

レーザーによってサンプル内にエキシトン・ポラリトンを生成し，そこから漏れ出した光子をビーム・スプリッターによって，2つの行路に分ける．一つ目の行路は反射鏡 (M1) で跳ね返った位相情報を，もう一方の行路は，直角プリズムもしくはリトロ・リフレクター (M2) で跳ね返った位相情報をカメラに入れる．回転する位相情報がサンプルから発せられたときを考える．図 4.3(b) は M1 からの画位相情報，(c) は M2 にリトロ・リフレクターを置いた場合の位相情報がそのまま反映された形，(d) は M2 に直角プリズムを置いたときに位相回転方向が逆になった形である．2つの行路から来る位相情報を重ね合わせるとき，出来上がったときにできる干渉縞は異なった形になる．これは単一トラップが確かに回転する位相情報， $p$  軌道の情報を持っていることを意味している．

## 第 5 章

### 実験:単一トラップされたBECのp軌道の観測



## 5.1 実験系

本章では実験に使ったサンプルを 5.1.1 で説明し，5.1.2 で実験系を概説する．5.2 で実験結果を示し，5.3 で今後の計画を説明する．

### 5.1.1 使用したサンプル

使ったサンプルは 12 の量子井戸が  $\lambda/2$  の厚さの GaAs 基板に配置されている．量子井戸は 7nm の GaAs が 3nm の障壁層 AlAs によって隔てられた構造で，4 つの組が 3 つ，共振器内にできる電磁場の腹に相当するところに重ねて置かれている．トップ DBR は 17.5 組の  $\lambda/4$  の  $\text{Ga}_{0.8}\text{Al}_{0.2}\text{As}$  と AlAs で構成される．接平面層は  $\text{Ga}_{0.8}\text{Al}_{0.2}\text{As}$ ．ボトム DBR は 21 組の  $\lambda/4\text{Ga}_{0.8}\text{Al}_{0.2}\text{As}$  と AlAs．こちらも接平面層は  $\text{Ga}_{0.8}\text{Al}_{0.2}\text{As}$  である．4K で共振器内の光子寿命は 2ps，ヘビー・ホール・エキシトンは 1.615eV で共振し， $\Delta = 0$  のときに 14.9meV のラビ分裂が発生する．図 5.1 に使用したサンプルの模式図を示す．

### 5.1.2 実験系

図 5.2 に実験系の概要を示す．ウエハー上に直径 7  $\mu\text{m}$  の円形以外の部分に金属層 (20nm Au/ 3nm Ti) を蒸着する．これによって円形内に 200 $\mu\text{eV}$  のポテンシャルが出来上がる．これは金属を蒸着した場所としていない場所とで，共振器内閉じ込められる光子の持つ波長，すなわちエネルギーに変化ができることに由来している．

また使ったのは，サンプルのレッド・デチューニングと呼ばれる領域である．レッド・デチューニングとは  $\Delta$  が大きな値を持つエキシトン・ポラリトンを生成するサンプル上の位置を意味しており，このとき，LP は小さな有効質量を持つ．小さな有効質量を持つ LP は急峻な分散を描き，そこに現れる第二準位は基底準位よりも高いエネルギーを持つ．その為，はっきりした p 軌道の出現が狙えると期待できるからである．

このサンプルにレーザーを当てエキシトン・ポラリトンを生成し，そこから漏れてくる光子を検出する．エキシトン・ポラリトンの持つエネルギーと量子井戸平面内の運動量は，保存則によって光子に保存されるため，光子の解析はそのままエキシトン・ポラリトンの解析につながる．

光子の解析は，ニア・フィールド (Near Field) と呼ばれる実空間をそのまま結

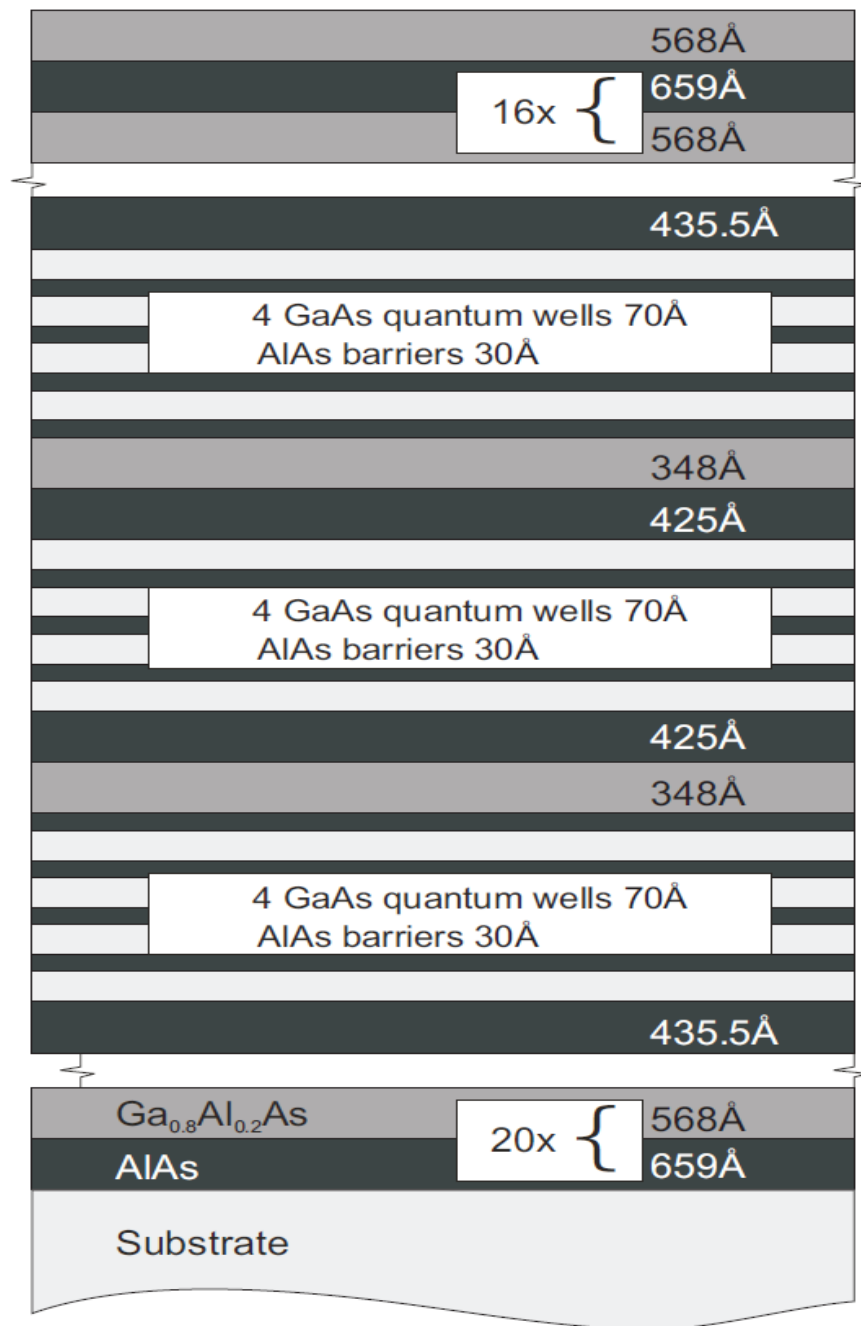


図 5.1: Sketch of the sample

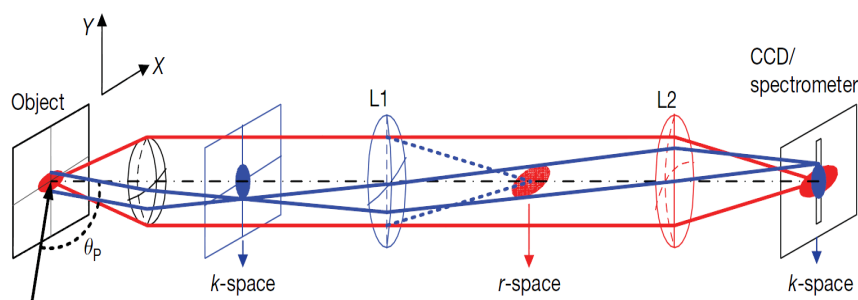


図 5.2: Imaging and spectroscopy of exciton-polariton distribution in coordinate and momentum space

像させる方法と、ファー・フィールド (Far Field) と呼ばれる運動量空間を結像させる方法がある。この系では、レンズを出し入れすることによって、CCD に写る映像をニア・フィールドとファー・フィールドに切り替えることができる。

## 5.2 実験結果

図 5.2 ~ 5.2 に実験結果を示す。キャプションに書かれているのは、注入したレーザーの  $1\text{cm}^2$  あたりの強度である。96mW のあたりで BEC 状態への転移が見えたように思えるが、続く図 5.9 を見ると、閾値付近でエネルギーピークが 6meV の飛び上がりが見える。これは、[21] で指摘されているように、複合的な原因で LP が BEC への転移を通り越して、フォトン・レージングを起こしているという疑いが強い。つまり、現れた LP の分散関係が光子の分散関係に近づき強結合状態が解消し、実験自体が BEC の枠組みに入らないことになる。

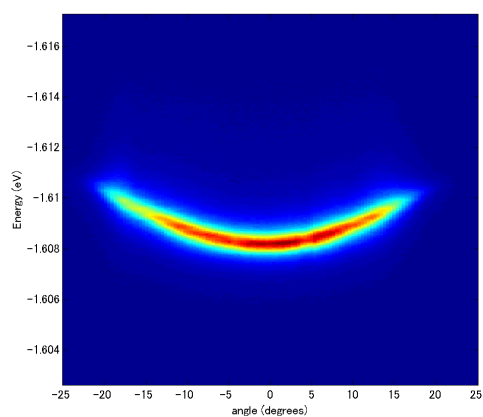


図 5.3: 8mW

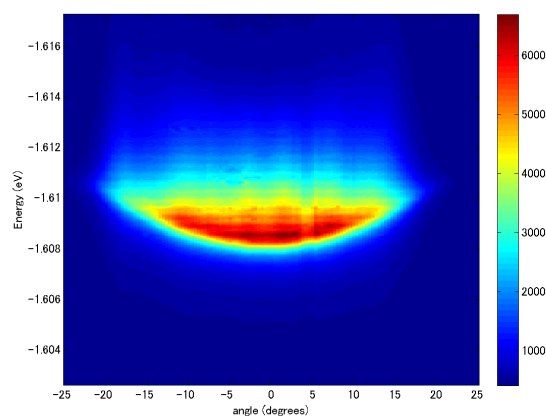


図 5.4: 67mW

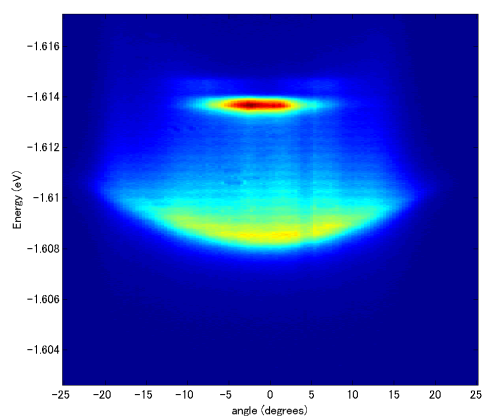


図 5.5: 96mW

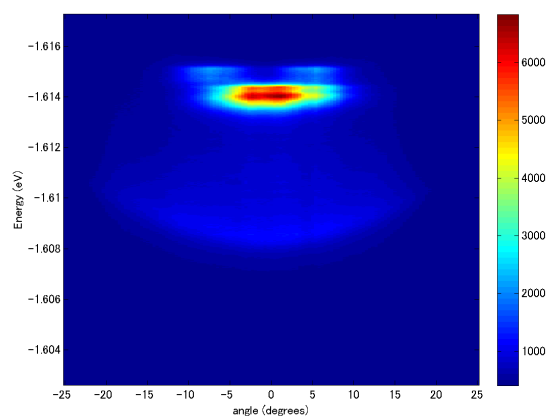


図 5.6: 120mW

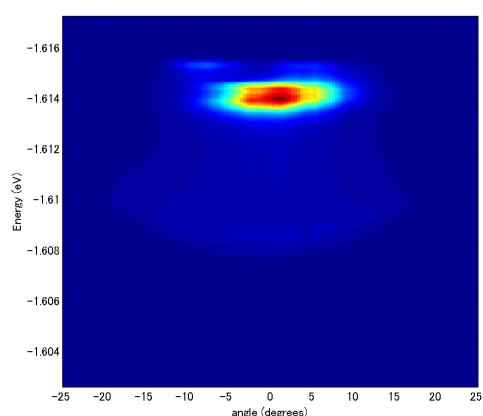


図 5.7: 163mW

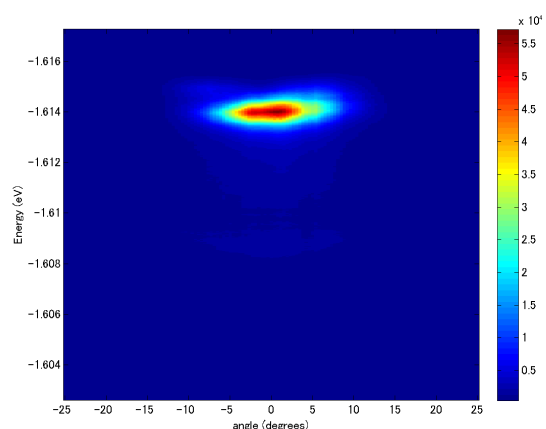


図 5.8: 200mW

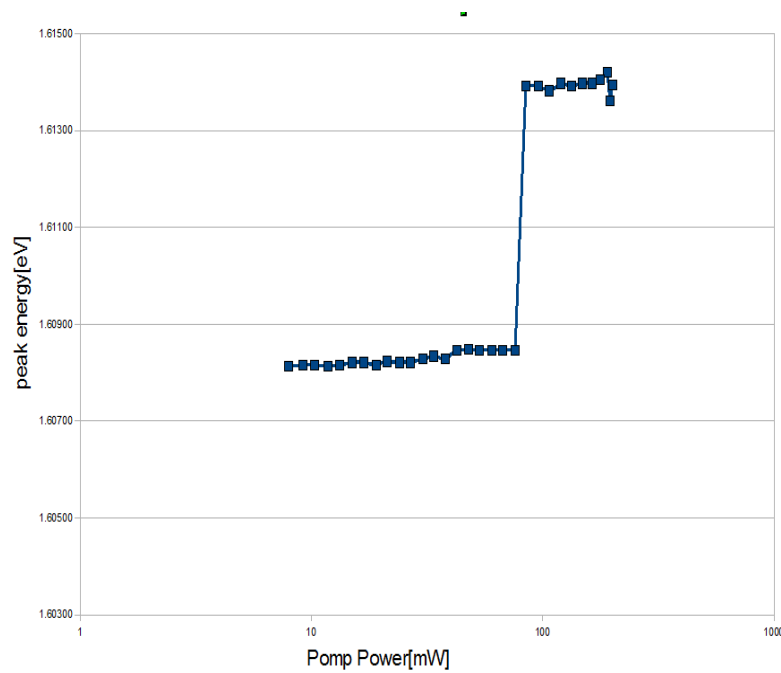


図 5.9: Pump power v.s. Peak energy of exciton-polariton

### 5.3 今後の予定

今回の実験で使用したサンプルでは  $200\mu\text{eV}$  という低いポテンシャル井戸しか作れていなかったため、高いエネルギーを持つ p 軌道を安定して存在させることが困難であった。現在、製作しているサンプルは、トラップ以外の部分の DBR を削りだしピラーという構造を作ることによって、数 meV の深いポテンシャルを実現することが可能となる。図 5.11 に pillar の SEM 写真とポテンシャルの変化を示す。

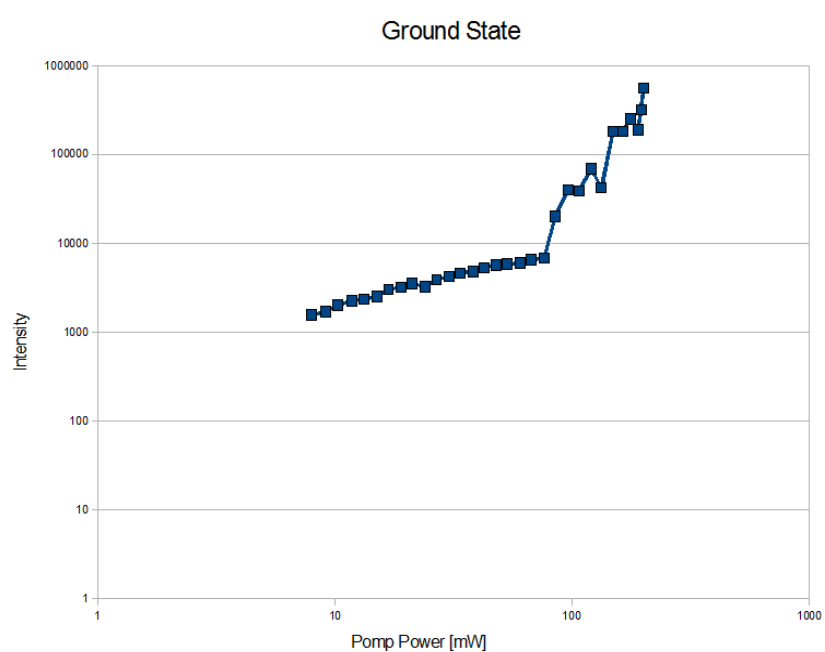
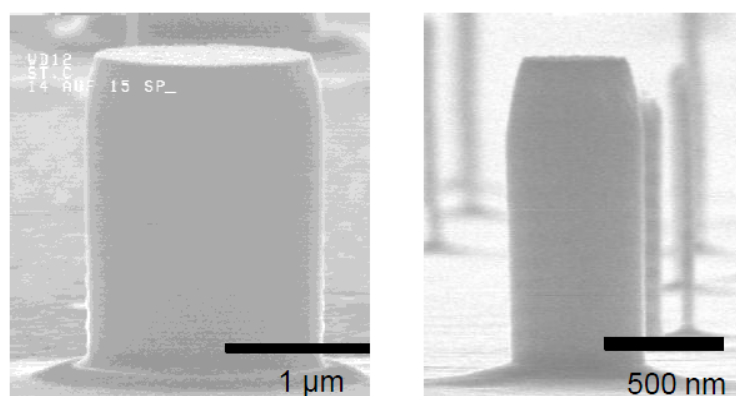


図 5.10: Pump power v.s. Intensity(a.u.) of exciton-polariton



SEM images of etched pillars

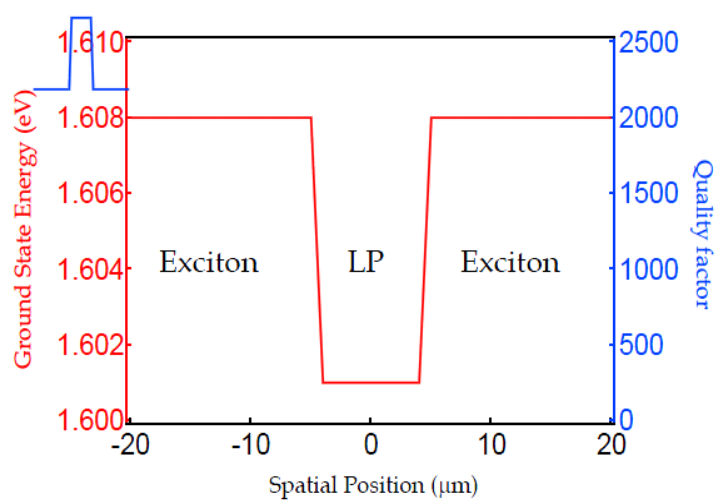


図 5.11: Exciton-Polariton Trap with Strong Confinement

## 第 6 章

### 結論



本論分では、2章でBECの基礎的な理論について概説し、3章でエキシトン、エキシトン・ポラリトンの振る舞いをまとめた。4章では、本研究の最終的な目的であるp軌道BECについて、最近の研究を絡め紹介した。5章で実際に行った実験について説明した。

本研究の目的であった単一トラップされたエキシトン・ポラリトンのp軌道の観測は、サンプル自体がフォトン・レージングを起こさなかったという結果に終わった。しかし、現在、エキシトン・ポラリトンを深いポテンシャルによって閉じ込めるサンプルを作製中であり、それを使って同様の実験をする計画である。

## 参考文献

- [1] F. London. The  $\lambda$ -phonemenon of liquid helium and the bose-einstein degeneracy. *Nature* 141, 643, 1938.
- [2] Ensher J. R. Matthews M.R. Wieman C. E. Cornell E. A. Anderson, M. H. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science* 269, 198, 1995.
- [3] K. B. et al. Davis. Bose-einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Phys. Rev. Lett.* 75, 3969, 1995.
- [4] Sackett C A. Tollett J. J., Hulet R. G. Bradley, C. C. Evidence of bose-einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. *Phys. Rev. Lett.* 75, 1687, 1995.
- [5] Mandel O. Esslinger T. Hansch T. W. Bloch I. Greiner, G. Quantum phase transition from a superfluid to a mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature* 415, 6867, 2002.
- [6] Nishioka M. Ishikawa A., Arakawa Y. Weisbuch, C. Observation of the coupled exciton-photon mode splitting in a semiconductor quantum well microcavity. *Phys. Rev. Lett.* 69, 1992.
- [7] G. Santori C. Bloch J., Yamamoto Y. Deng. H., Weihs. Dynamic condensation of polaritons in a semiconductor microcavity. *Science* 298, 2002.
- [8] Mandel O. Esslinger Hansch T. Bloch I. Greiner, M. Quantum phase transition from a superfluid to a mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature* 415, 39, 2002.
- [9] A. Einstein. Quanttentheorie des einatomigen idealen gases. zweite abhandlung. *Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss.* 1925, 3, 1925.

- [10] J. Allen and A. Misner. Flow of liquid helium. *Nature* 141,75, 1938.
- [11] P. Kapitza. Viscosity of liquid helium below the  $\lambda$ -point. *Nature* 141, 74, 1938.
- [12] N. Bogolubov. On the theory of superfluidity. *J. Phys.* 11, 23, 1947.
- [13] S. T. Beliaev. Energy-spectrum of a non-ideal bose gas. *Sov. Phys. JETP* 34, 299, 1958.
- [14] L. P. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect bose gas. *Sov. Phys. JETP* 13, 451, 1961.
- [15] Wagner H. Mermin, N. D. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-or-two dimensional isotropic heisenberg models. *Phys. Rev. Lett.* 17 1133, 1966.
- [16] P. Hohenberg. Existence of long-range order in one and two dimensions. *Phys Rev* 158 383, 1967.
- [17] J. Leavitt, R. Little. Simple method for calculating exciton binding energies in quantum-confined semiconductor structures. *Phys Rev B* 42 11774, 1990.
- [18] Wu C. W. Liu, W. V. Atomic matter of nonzero-momentum bose-einstein condensation and orbital current order. *Phys. Rev. A* 74 13607, 2006.
- [19] Weichman P. B. Grinstein G. Fisher D. S. Fisher, M. P. A. Boson localization and the superfluid-insulator transition. *Phys. Rev. B* 40,546, 1989.
- [20] Bruder C. Cirac J. Gardiner C. Zoller P. Jaksch, D. Cold bosonic atoms in optical lattices. *Phys. Rev. Lett.* 81,3108, 1998.
- [21] Senellart P. Lemaitre A. Bloch J. Bajoni, D. Photon lasing in gaas microcavity: Similarities with a polariton condensate. *Phys. Rev. B* 76 201305, 2007.