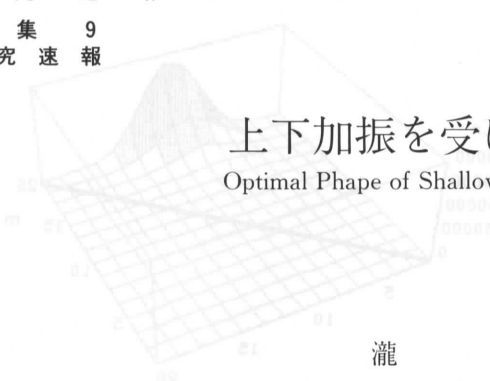


研 究 速 報
特 集 9
研 究 速 報



上下加振を受ける偏平アーチの最適形状

Optimal Phape of Shallow Arches under Up-and-Down Ground Motion

瀧 論*・半 谷 裕 彦**
Satoshi TAKI and Yasuhiko HANGAI

1. は じ め に

偏平構造物の動的安定に関する研究は、1954年の Hoff & Bruce¹⁾をはじめとして、これまでに膨大な量の研究が行われてきた^{2),3)}。最近では地震時の動的安定を調査するため、偏平構造物の周期荷重下での動的座屈の解析が行われている^{4),5)}。これらの研究は構造物の肉厚等の断面形状が一定という条件のもとで、動的座屈を扱ったものである。

偏平構造物の断面形状が変化するとき、肉厚が厚くなると剛性が大きくなるため、自重や雪荷重などの外力に対して座屈耐力は大きくなる。しかし地震時における基礎からの上下加速度入力に対しては、必ずしも肉厚の厚い偏平構造物の方の動的座屈が発生しにくい、とはいえない。これは肉厚が厚くなるにしたがい、剛性だけでなく質量も増加するためである。

そこで上下動の加速度に対して動的座屈の発生しにくい最適断面形状、すなわち剛性と質量の兼ね合いの最適な形状を求めることを、本研究の目的とする。

2. 基礎方程式とステップ荷重に対する動的座屈

本研究で用いるピン支持で正弦半波の形状をした偏平アーチを図1に示す。この基礎方程式はハミルトンの原理を用いて次式のように求められる。

$$E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{E \int_0^l \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx}{\int_0^l \frac{1}{A(x)} dx} \quad (1)$$

$$\cdot \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho A(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_g}{\partial t^2} \right) - p = 0$$

ここに、 w, w_0, w_g, t はそれぞれ、上下方向の変位、初期形状、地盤の変位、時間を、また、 ρ, A, I, E, l, p はそれぞれ単位長さあたりの質量、部材の断面積、断面二次モーメント、ヤング定数、スパン長、外力を示す。アーチの幅 b は一様とし、厚さ $h(x)$ を次式で表されるように仮定する。

$$h(x) = h_0 + \alpha_s h_0 \sin \frac{x\pi}{l} = h_0 \left(1 + \alpha_s \sin \frac{x\pi}{l} \right) \quad (2)$$

ここに α_s はアーチの形状を表すパラメータであり、以下「肉厚係数」とよぶ。 α_s による形状の違いを図2に示す。次に変位と外力は下向きに正として、基礎式を次式のように無次元化する(図3)。

$$\xi = \frac{x\pi}{l} \quad \tau = \frac{t}{\sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_0} \left(\frac{l}{\pi} \right)^2}} \quad \eta = \frac{w}{k_0} \quad Q = \frac{p}{EI_0 k_0 \left(\frac{\pi}{l} \right)^4} \quad (3)$$

$$\eta_0 = \frac{w_0}{k_0} \quad \eta_g = \frac{w_g}{k_0}$$

ここに k_0 はアーチ端部での回転半径で次式で与えられる。

$$k_0 = \sqrt{\frac{I_0}{A_0}} \quad (4)$$

次に、変位 ξ 、外力 Q 、初期形状 η_0 、地動加速度 $\partial^2 \eta_g / \partial \tau^2$ を次式のようにおく。

$$\eta = \sum_{n=1}^N D_n(\tau) \sin n\xi$$

*清水建設(株)

**東京大学生産技術研究所 第5部

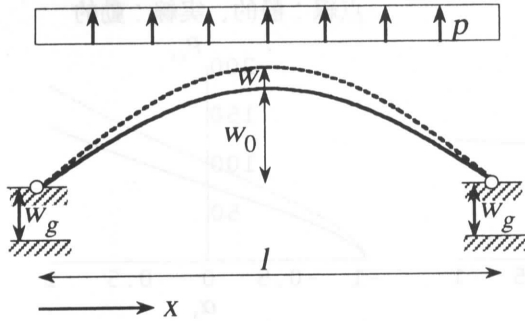


図1 偏平アーチ：モデル図

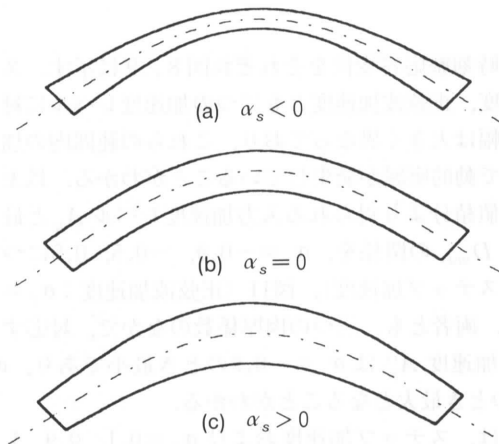


図2 偏平アーチの形状

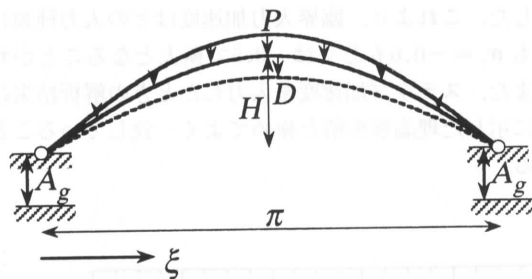


図3 離散化後のモデル

$$Q = \sum_{m=1}^N P_m(\tau) \sin m\xi \quad (m = 1, 3, \dots)$$

$$\eta_0 = H \sin \xi$$

$$\frac{\partial^2 \eta_g}{\partial \tau^2} = A_g(\tau) \quad (5)$$

そして変形モードが1モードのみからなる、すなわち $N = 1$ とし Galerkin 法で離散化すると次式が得られる。

$$\left(1 + \frac{8\alpha_s}{3\pi}\right) \frac{\partial^2 D_1}{\partial \tau^2} + \left(\frac{H^2}{2c_s} \gamma_s\right) D_1$$

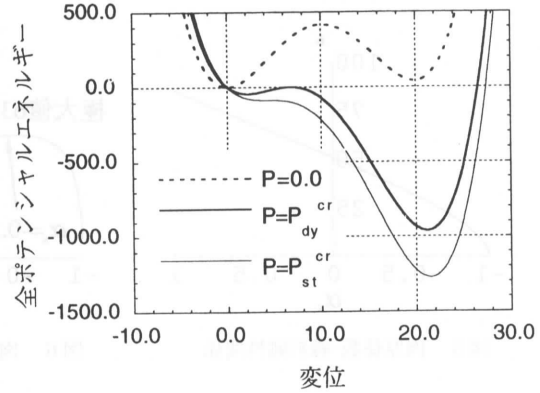


図4 全ポテンシャルエネルギー

$$-\frac{3H}{4c_s} D_1^2 + \frac{1}{4c_s} D_1^3 = P_1 + \left(\frac{4}{\pi} + \alpha_s\right) A_g \quad (6)$$

ここに γ_s および c_s は α_s のみで定まる定数であり次式で表される。

$$\gamma_s = 1 + \frac{8}{\pi} \alpha_s + \frac{9}{4} \alpha_s^2 + \frac{32}{15\pi} \alpha_s^3 \quad (7)$$

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha_s^2}} \left(1 - \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\alpha_s}{\sqrt{1-\alpha_s^2}}\right)\right) \quad (8)$$

式(6)の右辺で第1項は自重や風・雪荷重などを、第2項は基礎の加速度が A_g である地震荷重を意味する。ここで「臨界入力加速度」を偏平アーチに動的座屈を発生させる最小な基礎の加速度と定義し、以下 A_g^{cr} と表す。

このときの全ポテンシャルエネルギーは

$$\Pi = \frac{1}{2} \left(\frac{H^2}{2c_s} + \gamma_s\right) D_1^2 - \frac{H}{4c_s} D_1^3 + \frac{1}{16c_s} D_1^4 - \left(\frac{4}{\pi} + \alpha_s\right) A_g D_1 \quad (9)$$

で与えられる。図4に荷重を変化させたときの Π の様子を描く。 $\Pi = 0$ かつ $\partial \Pi / \partial D_1 = 0$ のとき動的座屈が、 $\partial \Pi / \partial D_1 = 0$ かつ $\partial^2 \Pi / \partial D_1^2 = 0$ のとき静的座屈が発生する。前者を利用してステップ入力加速度（以下、ステップ加速度という）に対する臨界入力加速度レベル $A_g^{cr}|_{step}$ を求めると次式のように得られる。

$$A_g^{cr}|_{step} = \frac{H^3 + 18c_s H \gamma_s + (H^2 - 6c_s \gamma_s)^{\frac{3}{2}}}{27c_s \left(\frac{4}{\pi} + \alpha_s\right)} \quad (10)$$

無次元化ライズ H を $H=10$ とし、肉厚係数 α_s と線形剛性の関係を図5に、 α_s と(10)式による $A_g^{cr}|_{step}$ の関係を図6に示す。また全ポテンシャルエネルギーを利用して

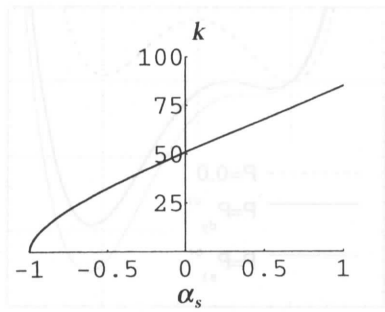


図5 肉厚係数-線形剛性関係

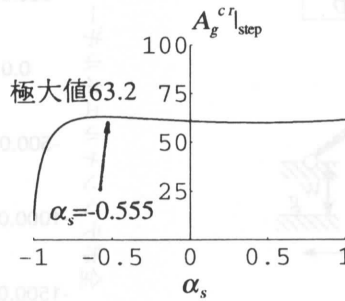


図6 肉厚係数-臨界加速度関係

点線：静的、実線：動的

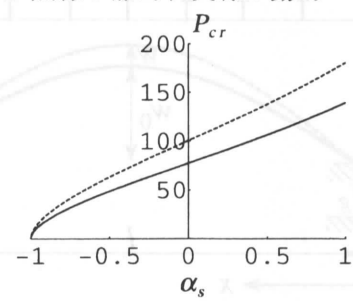


図7 肉厚係数-座屈荷重関係

得られる α_s と静的・動的座屈荷重を図7に示す。図6, 7より座屈荷重は α_s と共に大きくなるが, $A_g^{cr}|_{step}$ は $\alpha_s = -0.555$ で極大値63.2をもっていることがわかる。いいかえると, $\alpha_s = -0.555$ がステップ加速度に対する最適形状となる。

3. 正弦波加速度に対する動的座屈

本節では周期性をもつ外力として正弦波加速度を採用する。理論解は得られないので, 直接数値積分することにより臨界加速度 $A_g^{cr}|_{step}$ を求める。数値積分法としてNewmark- β 法を用いる。ここで偏平アーチの固有振動数 f_0 (f_0 は α_s の関数) に対する正弦波加速度の励起振動数 f の比 (f/f_0) を「振動数係数」と定義し, α_f で表す。正弦波加速度の励起振動数 f の選択は, 振動数係数 α_f をパラメータとしてあたえる。また2.の結果との比較のためにステップ加速度に対する数値解析も行う。

数値解析例として肉厚係数 $\alpha_s = -0.5$ について, ステップ加速度および $\alpha_f = 1.1$ の正弦波加速度で加振した

ときの時刻歴応答変位をそれぞれ図8, 9に示す。ステップ加速度, 正弦波加速度とも二つの加速度レベルに対する応答振幅は大きく異なり, これらの範囲内の加速度レベルで動的座屈が発生していることがわかる。以上にのべた数値積分より得られる入力加速度レベル A_g と最大応答変位 D_{max} の関係を, $\alpha_s = -0.9, -0.5, 0.5$ について, 図10 (ステップ加速度), 図11 (正弦波加速度: $\alpha_f = 1.1$) に示す。両者とも, 三つの肉厚係数のなかで, 対応する臨界入力加速度 A_g^{cr} は $\alpha_s = -0.9$ のとき最小であり, $\alpha_s = -0.5$ のとき最大となることがわかる。

図12は, ステップ加速度および $\alpha_f = 0.1, 0.9, 1.1$ である正弦波加速度に対して, α_s と臨界入力加速度の関係を示したものである。ここで α_s は $-0.9 \sim 0.9$ を0.1刻みで解析した。これより, 臨界入力加速度はどの入力種類についても $\alpha_s = -0.6$ もしくは -0.5 で極大となることがわかる。また, ステップ加速度を入力したときの解析結果は, 10式に示した理論解析解と極めてよく一致していることがわかる。

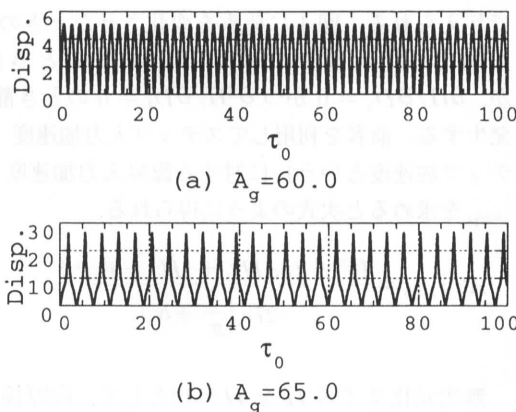


図8 時刻歴応答変位
(H = 10 : $\alpha_s = -0.5$: ステップ加速度)

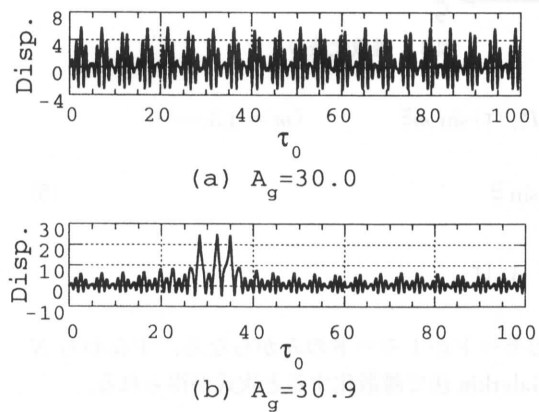


図9 時刻歴応答変位
(H = 10 : $\alpha_s = -0.5$: 正弦波加速度 : $\alpha_f = 1.1$)

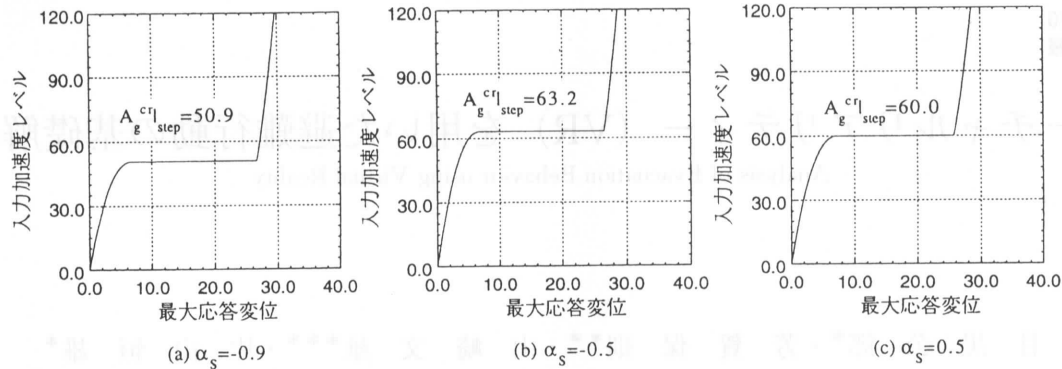


図10 入力加速度レベル-最大応答変位 (H=10:ステップ加速度)

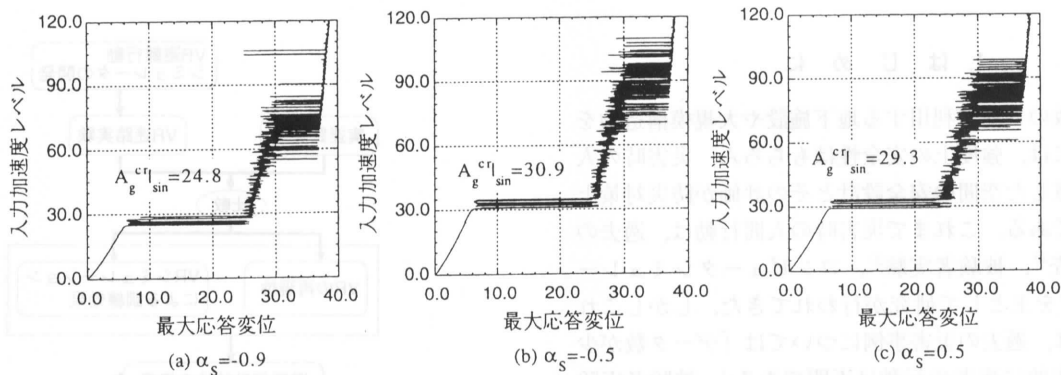


図11 入力加速度レベル-最大応答変位 (H=10:正弦波加速度: alpha_1 = 1.1)

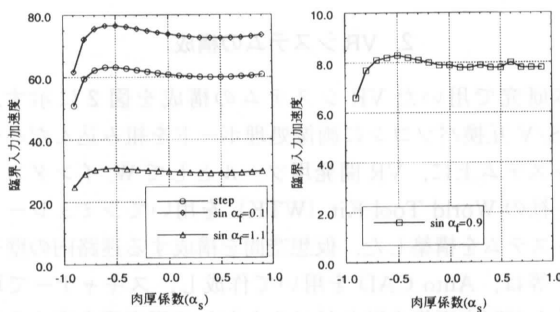


図12 肉厚係数-臨界地動(入力)加速度

4. おわりに

本研究では、基礎を上下方向に加振したときの、臨界入力加速度を求め、これに最適形状を得た。しかしながら、既往の研究⁶⁾によれば、無次元化ライズ H が $H > 4.08$ の範囲では変形に逆対称モードが発生することがのべられている。本研究で用いた $H = 10$ のモデルでは変形を1モードのみ ($N = 1$) と仮定しているため、この現象を反映

していない。今後、逆対称の変形モードも考慮したうえで
の検討が必要である。(1995年8月9日受理)

参考文献

- 1) Hoff, N. J. and Bruce, V. G.: Dynamic analysis of the buckling of laterally loaded flat arches, Quarterly Journal of Mathematics and Physics, vol. 32, 1954.
- 2) Lindberg, H. E. and Florence, A. L.: Dynamic Pulse Buckling, Martinus Nijhoff Publishers, 1987.
- 3) Simitses, G. J.: Dynamic stability of suddenly loaded structures, Springer-Verlag, 1990.
- 4) 金, 田波, 半谷: 上下動を受ける偏平E.P. シェルの動的軸対称座屈, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 1990, pp. 263-268.
- 5) 瀧, 半谷: 上下動を受ける偏平アーチの動的座屈解析, 日本建築学会大会(関東) 学術講演梗概集 1993, pp. 1443-1444.
- 6) Hsu, C. S.: Equilibrium Configurations of a Shallow Arch of Arbitrary shape and Their Dynamic Stability Character, International Journal for Nonlinear Mechanics, Vol. 3, 1968, pp. 113-136.