研　究　速　報

構造物を伝わる曲げ波の伝搬性状に関する研究

Study on the Propagation Properties of Bending Waves in Structures

山　崎　　徹*・大　野　進　一**

Toru YAMAZAKI and Shinichi OHNO

1. は　じ　め　に

固体伝搬音を低減するには，構造物内の振動エネルギの伝搬性状を把握することが重要である．振動エネルギは波動によって伝えられ，結合部などの不連続部に達するとその一部が反射されるために結合部を透過する振動エネルギは減少する．この現象は反射率，透過率などによって特徴付けられ，これらの値が分かると結合部での振動エネルギの減少の予測や，希望の減少特性を持つ結合部形状の設計などに役立てることができる．半無限はりの理想的な状態での結合部の透過率を算出する式は，波動的解析を用いてCremerらによって与えられている[1]．しかし，結合状態が理想的と考えられる構造物は少なく，Cremerらが示していない結合部形状についても透過率を見積もる必要があり得る．

そこで本報では，有限-有限はりを用いてそれと同じ結合部形状を持つ無限-無限はりの結合部での反射率，透過率を求めるための式を導出する．次に，導出した式の妥当性を確認するため，Cremerらが与えている形状の結合部での透過率を導出した式とCremerらの式を用いて求め，比較検討を行う．ただし，波動としては放射音の寄与度の大きい曲げ波だけを考慮する．

2. 無限-無限はり

最初に，無限-無限はりの結合部での反射率，透過率を求めるCremerらの式を示す．

図1に示すような二つの半無限はりからなる断面変化のあるはりの結合部を考える．はり1の $x<0$ から入射波 $\hat{a}e^{-jk_1x}$ が結合部に入射すると，その一部は反射波 $\hat{b}e^{jk_1x}$ となり，残りは透過波 $\hat{u}e^{-jk_2x}$ となってはり2を $x>0$ の方向へ伝わる．その際，結合部からはり1側，2側にそれぞれ減衰波 $\hat{d}e^{k_1x}$, $\hat{p}e^{-k_2x}$ が生じる．減衰波は結合部などの不連続部から離れるにつれ指数関数的に減衰する波動である．

したがって，それぞれのはりの曲げ変位は，

$$y_1(x,\,t) = (\hat{a}e^{-jk_1x} + \hat{b}e^{jk_1x} + \hat{d}e^{k_1x})\,e^{j\omega t} \tag{1}$$

$$y_2(x,\,t) = (\hat{u}e^{-jk_2x} + \hat{p}e^{-k_2x})\,e^{j\omega t} \tag{2}$$

と表すことができる．なお，^は複素数を示す．

一方，結合部での反射係数 $\hat{r}$，透過係数 $\hat{t}$ はそれぞれの波の振幅の比より

$$\hat{r} = \frac{\hat{b}}{\hat{a}},\quad \hat{t} = \frac{\hat{u}}{\hat{a}} \tag{3}$$

と定義され，結合部での変位，回転角，モーメント，せん断力の連続条件より以下のように求まる．

$$\hat{r} = \frac{2\varphi(1-\kappa^2) - j\kappa(1-\varphi)^2}{\kappa(1+\varphi)^2 + 2\varphi(1+\kappa^2)} \tag{4}$$

$$\hat{t} = \frac{2(1+\kappa)(1+\varphi)}{\kappa(1+\varphi)^2 + 2\varphi(1+\kappa^2)} \tag{5}$$

$$\text{ただし，}\ \kappa = \frac{k_2}{k_1},\quad \varphi = \frac{k_2^2 B_2}{k_1^2 B_1} \tag{6}$$

k_1：はり1の曲げ波数，k_2：はり2の曲げ波数

B_1：はり1の曲げ剛性，B_2：はり2の曲げ剛性

それゆえに，無限-無限はりの結合部での振動エネルギの反射率 R_{inf}，透過率 T_{inf} は反射，透過係数よりそれぞれ

$$R_{inf} = |\hat{r}|^2,\quad T_{inf} = 1 - R_{inf} = \kappa\varphi\,|\hat{t}|^2 \tag{7}$$

と表すことができ，この式がCremerらの示した式である．

なお，各はりの x 軸の正方向，負方向に伝搬する波はそれぞれ進行波，後退波と呼ばれ，この二つの波は合わせて伝搬波とも呼ばれる．

*東京大学工学部

**東京大学生産技術研究所　第2部

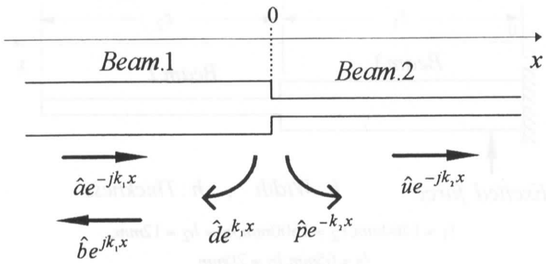

Fig. 1　Case of Infinite Beam

3. 有限-有限はり

次に，有限長のはりからなる有限-有限はりの場合について検討する．ここでいう結合部での反射，透過係数とは，結合部の形状が同一な無限-無限はりの場合の値であり，この値を求めることが本報の目的である．そのために，有限-有限はりと無限-無限はりの関係を明らかにする．

図2(a)に示すような有限長のはりからなる断面変化のあるはりの結合部を考える．この場合，無限-無限はりとは異なり，はり2に後退波 $\hat{v}e^{jk_2x}$ が生じる．また，はり1，2の結合端の他端で減衰波 $\hat{c}e^{-k_1x}$，$\hat{q}e^{k_2x}$ も生じるので，各はりの曲げ変位は，

$$y_1(x,\ t) = (\hat{a}e^{-jk_1x} + \hat{b}e^{jk_1x} + \hat{c}e^{-k_1x} + \hat{d}e^{k_1x})\,e^{j\omega t} \tag{8}$$

$$y_2(x,\ t) = (\hat{u}e^{-jk_2x} + \hat{v}e^{jk_2x} + \hat{p}e^{-k_2x} + \hat{q}e^{k_2x})\,e^{j\omega t} \tag{9}$$

と表せる．さらに，減衰波が十分に減衰しているFar-Fieldでは，式(8)，(9)は，

$$y_1(x,\ t) = (\hat{a}e^{-jk_1x} + \hat{b}e^{jk_1x})\,e^{j\omega t} \tag{10}$$

$$y_2(x,\ t) = (\hat{u}e^{-jk_2x} + \hat{v}e^{jk_2x})\,e^{j\omega t} \tag{11}$$

と簡単にできるので，以下はFar-Fieldについて扱うことにする．

はり1の結合端以外の端から定常的に波動が伝搬してくると，図2(a)のような定常状態になるまで，同図(b)に示すように結合部等で反射，透過が繰り返される．そのため(a)に示したそれぞれの伝搬波は，無限-無限はりの結合部での反射，透過係数 $\hat{r}_1$，$\hat{r}_2$，$\hat{t}_1$，$\hat{t}_2$，はり2の結合端の他端での反射係数 $\hat{r}_l$，はり1の進行波 $\hat{a}e^{-jk_1x}$ を用いて，無限級数的に以下のように表せる[3),4)]．

$$\hat{b}e^{jk_1x} = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{t}_1\hat{t}_2\hat{r}_l e^{-j2k_2l_2}}{1-\hat{r}_l\hat{r}_2 e^{-j2k_2l_2}}\right)\hat{a}e^{jk_1x} \tag{12}$$

$$\hat{u}e^{-jk_2x} = \frac{\hat{t}_1}{1-\hat{r}_l\hat{r}_2^{-j2k_2l_2}}\hat{a}b^{-jk_2x} \tag{13}$$

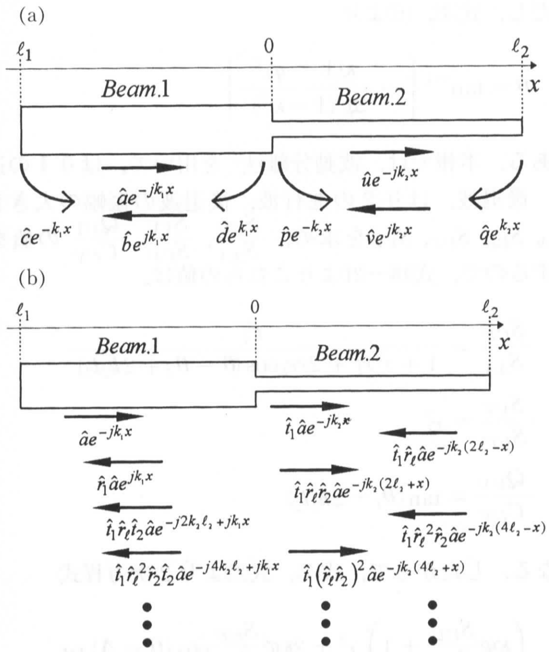

Fig. 2　Case of Finite Beam

$$\hat{v}e^{jk_2x} = \frac{\hat{t}_1}{1-\hat{r}_l\hat{r}_2 e^{-j2k_2l_2}}\hat{a}e^{-jk_2x} \tag{14}$$

これらの式は，有限-有限はりの定常状態での波動と，本報で求めたい無限-無限はりの結合部での反射，透過係数との関係を表しており，この関係から有限-有限はりの定常状態での伝搬波が分かれば，反射，透過係数を求めることが可能となる．

さらに，ひとつの結合部での反射，透過係数の関係はCremerらの式(4)，(5)より

$$\hat{r}_2 = -\hat{r}_1{}^*,\quad \hat{t}_2 = \kappa\varphi\hat{t}_1 \tag{15}$$

ただし，＊は複素共役．

であるので，反射，透過係数を大きさと位相で，

$$\hat{r}_1 = re^{j\theta},\quad \hat{r}_2 = re^{j(\pi-\theta)},\quad \hat{t}_1 = t,\quad \hat{t}_2 = \kappa\varphi t \tag{16}$$

$$\hat{r}_l = r_l e^{j\theta_l} \tag{17}$$

と表し，式(12)〜(14)に考慮すると，各伝搬波の振幅値比は以下のように表せる．

$$\frac{\hat{b}}{\hat{a}} = re^{j\theta} + \frac{\kappa\varphi t^2 r_l e^{j(\theta_l-2k_2l_2)}}{1-rr_l e^{j(\pi-\theta+\theta_l-2k_2l_2)}} \tag{18}$$

$$\frac{\hat{u}}{\hat{a}} = \frac{t}{1-rr_l e^{j(\pi-\theta+\theta_l-2k_2l_2)}} \tag{19}$$

$$\frac{\hat{v}}{\hat{u}} = r_l e^{j(\theta_l-2k_2l_2)} \tag{20}$$

研　究　速　報

ただし，式(4)，(6)より

$$\theta = \tan^{-1}\left\{-\frac{\kappa(1-\varphi)^2}{2\varphi(1-\kappa^2)}\right\} \tag{21}$$

である．本報では，波動分離法[2]を用いて，はり1の進行波，後退波，はり2の進行波，後退波の振幅の大きさ，S_{AA}, S_{BB}, S_{UU}, S_{VV}を求め，$\frac{S_{UU}}{S_{AA}}$, $\frac{S_{VV}}{S_{UU}}$, $\frac{Q_{UV}}{C_{UV}}$の値を計算するので，式(18)〜(21)よりこれらの値は，

$$\frac{S_{UU}}{S_{AA}} = \frac{t^2}{1 + r^2 r_l^2 + 2rr_l\cos(\theta - \theta_l + 2k_2 l_2)} \tag{22}$$

$$\frac{S_{VV}}{S_{UU}} = r_l^2 \tag{23}$$

$$\frac{Q_{UV}}{C_{UV}} = \tan(\theta_l - 2k_2 l_2) \tag{24}$$

となる．したがって，式(7)，式(22)より2次方程式

$$\left(\kappa\varphi\frac{S_{UU}}{S_{AA}}+1\right)r^2 + 2\kappa\varphi\frac{S_{UU}}{S_{AA}}\cos(\theta-\Delta)\,r_l r + \kappa\varphi\frac{S_{UU}}{S_{AA}} - 1 = 0 \quad ただし，\Delta = \theta_l - 2k_2 l_2 \tag{25}$$

が得られ，この方程式の各係数は全て波動分離法を用いて求められるため，1つの未知変数rについて解くことができる．その結果，次の式から無限-無限はりの結合部での反射率，透過率が有限-有限はりを用いて求めることが可能となる．

$$R_{cal} = r^2, \quad T_{cal} = 1 - r^2 \tag{26}$$

また，式(22)，(23)は，無限-無限はりの反射率，透過率が分かれば，はり1，2の各波の大きさが分かることも示しているので，図3に示す断面変化のある片持ちはりを用いて，$\kappa\varphi\frac{S_{UU}}{S_{AA}}$の値を以下の三つの方法で求めた．

(1)実験値：Experimental value
はり毎にその中点近傍に2個の加速度ピックアップを設置しスペクトルを計測し，波動分離法より求めた値．

(2)解析値：Analytical value
変位の厳密解をラプラス変換を用いて求め，加速度スペクトルを算出し，実験と同様に波動分離法を用いて求めた値．

(3)予測値：Predicted value
無限-無限はりの反射率，透過率をCremerらの式から求め，式(22)より求めた値．

結果を図4に示すが，三つの値とも非常によく一致しており，先に述べたように無限-無限はりの反射率，透過率

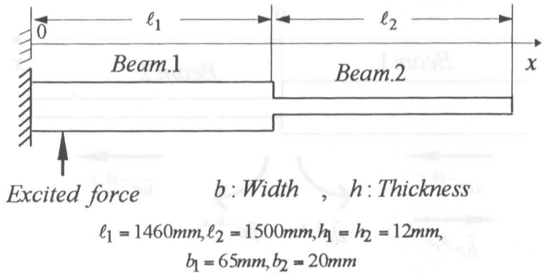

Fig. 3　Configuration of the beam with a change in section.

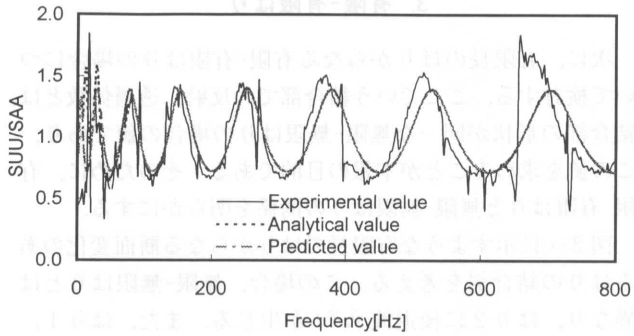

Fig. 4　Ratio of propagating waves in Beam. 1 and Beam. 2

を用いて有限-有限はりの各波の振幅の大きさが予測可能である．また，ラプラス変換を用いて求めた厳密解が妥当であることも確認できるので，以下の議論は，ラプラス変換による厳密解を用いて行う．

4. 透過率の算出

本章では，第3章で導出した式(26)を確認するため，第2章に示したCremerらの式(7)から求めた透過率と比較する。

図3に示す断面変化のある片持ちはりの場合において，はり1，2の厚さを共に12 mmとし，幅の比を1/100から100まで変化させた際の透過率の解析結果を図5に示す．結果はどの幅の比においても，式(26)の結果とCremerらの式とが非常によく一致している．このことは，本報で導出した式と波動分離法を用いることによって，Cremerらが示していない形状の場合の結合部，あるいは形状としてはCremerらが示しているのと同じでも，例えば溶接などの欠陥があって実際的には異なる結合部での透過率を同一の結合部を有する有限-有限はりの計測データから求めることができるということを意味している．また，図6に幅比0.31の場合の周波数に対する透過率の解析結果を示すが，どの周波数でも式(26)から求めた透過率がCremerらの式と一致しており，本報で導出した式の妥当性が確認できる．

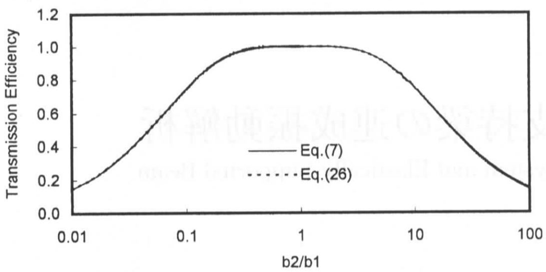

Fig. 5　Comparison of Eq. (7) and Eq. (26) at 795Hz

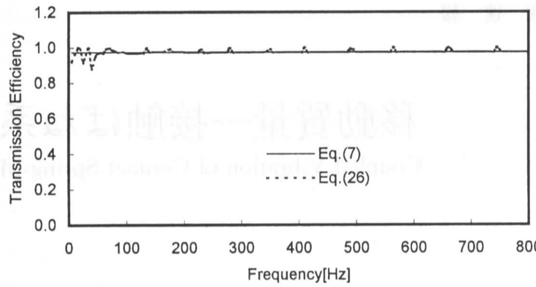

Fig. 6　Comparison of Eq. (7) and Eq. (26)

5. 結　　論

本報では，無限-無限はりの結合部での反射率，透過率を有限-有限はりを用いて求める手法について検討を行い，以下の結論を得た．

1）無限-無限はりの結合部での反射率，透過率を有限の同じ形状の結合部を有する有限-有限はりを用いて求めるための式を導出した．

2）Cremer らが与えている形状の結合部を持つはりの場合について，導出した式を用いて求めた透過率と Cremer らの式から求まるものを比較することで，導出した式の妥当性を確認した．

以上により，Cremer らが示していない形状の結合部や，溶接などのための理想的とは言えない結合部での反射率，透過率を実際の構造物の値を計測することによって求めることが可能となった．

（1995年７月13日受理）

参　考　文　献

1)　L. Cremer , M. Heckl and E.E. Ungar, 1973, “Structure-borne Sound”, Berlin: Springer-Verlag.

2)　P. David Taylor, CETIM, Senlis (France) 1990, “Measurement of Structural Intensity ,Reflection Coefficient, and Termination Impedance for Bending Waves in Beams.”

3)　Hugin, C.T. and Ohlrich, M., CETIM, Senlis (France) 1993, “Prediction of Transmitted Power in Multiple Beam Spans.”

4)　J.L. Horner and G. White, Int. J. Mech. Sci. Vol. 32, No. 3, pp.215-223, 1990, “Prediction of Vibrational Power Transmission Through Jointed Beams.”