

移動質量—接触ばね系と弾性支持梁の連成振動解析

Coupled Vibration of Contact Spring-Moving Mass System and Elastically Supported Beam

柳 允善*・ 曄 道佳明*・ 須田 義大*・ 大野 進一*

Yunseon RYU, Yoshiaki TERUMICHI, Yoshihiro SUDA and Shinichi OHNO

1. はじめに

鉄道におけるレール上に発生する波状摩耗は、騒音と振動問題を引き起こすだけでなく、保守管理におけるコストの増大を招くという観点からも、回避すべき問題である。この波状摩耗の発生メカニズムを解明するためには、レールと車輪から成る振動系の解析がその一手段であると考えられる。しかしながら、この振動系は、移動を伴う集中質量系と分布定数系との連成振動となること、接触部においては塑性変形、摩耗を伴うことが考えられることなどから、その取り扱いには一般に難しい。

この種の振動解析としては、コルゲーションの発生および成長に関して、1自由度系での円筒接触において理論的ならびに実験的に検討がなされている¹⁾。また、鉄道のレールあるいは橋梁をモデルとして、移動質量と梁から成る系について、移動質量の重力の効果²⁾、集中質量系と分布定数系との連成振動における系の固有特性³⁾などが調べられている。さらに、車両通過時の車両ならびに橋梁の挙動についても解析的あるいは数値的に議論されている^{4)~6)}が、これらにおいては、移動質量が梁の質量に比べて充分小さく、またばね—質量系の固有振動数が梁の固有振動数に比べて充分低い。今後は、これらの多角的な検討をふまえて、より統合的な系の取り扱いが望まれる。

本報では、より実的な系を解析するために、レールと車輪の接触部に作用する接触力の変化について基礎的知見を得ることが有効であると考え、レールと車輪から成る系に生じる上下方向の連成振動問題を取り上げる。このとき、車輪の質量はレールに比べて無視できず、レールと車輪の間に仮定される Hertzian 接触ばね⁷⁾を介して、その慣性力がレールに作用する。この系では、移動質量—接触ばね系の固有振動数が、梁の低次の固有振動数と近い値となる

ことが特徴の一つである。そして、両端を枕木によって弾性支持されるレールを Timoshenko 梁と仮定し、その上を質量および接触ばねで構成される集中質量系が移動するモデル⁸⁾を考え、この系について、まず系の固有振動について検討した後、質量移動時の過渡応答を有限要素法を用いた数値シミュレーションにより求め、質量および梁の挙動を検討する。

レール上のコルゲーションの発生および成長過程について、そのメカニズムを解明するためには、車輪が繰り返しレールを通過することなどの考慮が不可欠と考えられるが、ここではその第一段階として、車輪およびレールから成る系の固有振動数の変化、ならびに二つの枕木に支持されるレール上を車輪が通過する際の車輪およびレールの挙動を、特に接触ばねの影響に着目して考察する。

2. 座標系と運動方程式

座標系と解析モデルを Fig. 1 に示す。梁の左端を原点 O として、梁の軸方向を x とする。梁の変位は、静的平衡状態から梁の鉛直下向きに $u(x,t)$ で表す。また、移動質量の静的平衡状態からのばねの伸縮量を $z(t)$ とする。

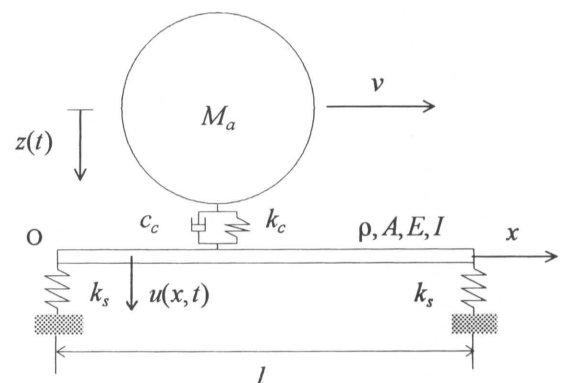


Fig. 1 Coordinate System and Analytical Model

*東京大学生産技術研究所 第2部

Fig. 1で、 l は梁の長さ、 EI は梁の曲げ剛性、 ρA は梁の単位長さ当たりの質量、 k_s は支持ばね定数、 C は梁の粘性減衰係数、 M_a は移動質量、 k_c は接触ばね定数、 C_c は移動質量-接触ばね系の粘性減衰係数、 v は走行速度を表し、質量は図の右向きに移動する。ここで、時間の代表値として梁の基本固有周期 $1/\omega_b$ 、長さの代表値として、静的状態で質量が梁中央部にあるときの最大撓み量 φ_{st} を考え、 $\tau = \omega_b t$, $u^* = u/\varphi_{st}$, $z^* = z/\varphi_{st}$ なる無次元量を導入する。さらに、 $\xi = x/l$ なる座標を考えれば、系を支配する運動方程式は無次元形式で以下の様に表される。(以降、無次元量を示す*は省略する。)

$$\frac{\partial^4 u(\xi, \tau)}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 u(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} + 2\gamma \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \mu \left\{ P - \frac{d^2 z(\tau)}{d\tau^2} \right\} \delta(\xi - \kappa \tau) \dots\dots(1)$$

境界条件は

$$\frac{\partial^3 u(0, \tau)}{\partial \xi^3} = -\omega_s^2 u(0, \tau), \quad \frac{\partial^3 u(1, \tau)}{\partial \xi^3} = \omega_s^2 u(1, \tau) \dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial^2 u(0, \tau)}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u(1, \tau)}{\partial \xi^2} = 0 \dots\dots(3)$$

$$\frac{d^2 z(\tau)}{d\tau^2} + 2\gamma_c \left\{ \frac{dz(\tau)}{d\tau} - \frac{du(\kappa \tau, \tau)}{d\tau} \right\} + \omega_c^2 \{ z(\tau) - u(\kappa \tau, \tau) \} = 0 \dots\dots(4)$$

ここで、式(1)-(4)の中に示される無次元パラメータは以下の通りである。

$$\omega_b = \sqrt{\frac{EI}{\rho Al^4}}, \quad \omega_c = \sqrt{\frac{k_c}{M_a}} / \omega_b, \quad \omega_s = \sqrt{\frac{l^3 k_s}{EI}} / \omega_b$$

$$\gamma = \frac{c}{2\sqrt{\rho AEI}}, \quad \gamma_c = \frac{C_c}{2\sqrt{k_c M_a}}$$

$$\kappa = \frac{v}{\omega_b l}, \quad \mu = \frac{M_a}{\rho Al}, \quad P = \frac{g}{\omega_b^2 \varphi_{st}}$$

ここで、 ω_b , ω_c はそれぞれ単純支持梁および移動質量-接触ばね系の固有振動数、 κ は質量の移動速度、 μ は梁と移動質量-接触ばね系の質量比、 P は質量の重力をそれぞれ示しており、 δ はディラックのデルタ関数を表す。

また、移動質量と弾性支持梁の間に線形 Hertzian 接触ばねを仮定する。Hertzian 接触ばねは、外力が変位の3/2乗に比例するので、外力と変位の増分で線形化すると、

$$k_c = \frac{dF}{dY}, \quad F = GY^{3/2} \dots\dots(5)$$

のように与えられる。ここで、 F は外力、 Y は変位、 G は Hertzian 剛性である。

3. 固有振動

本報で扱う振動系において、接触ばねの影響を検討するために本節および次節の質量移動時の数値シミュレーションでは、接触ばねを考慮しない、即ち、移動質量の重力の効果のみを考えた場合との比較検討を行う⁹⁾。

接触ばねを考慮しないとき、梁の運動方程式は以下の様に示される。

$$\frac{\partial^4 u(\xi, \tau)}{\partial \xi^4} + \{1 + \mu \delta(\xi - \kappa \tau)\} \frac{\partial^2 u(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} + 2\gamma \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \mu P \delta(\xi - \kappa \tau) \dots\dots(6)$$

Fig. 2は、接触ばねを考慮しない系の質量の位置による固有振動数の変化を示している。横軸は質量の位置を示す。

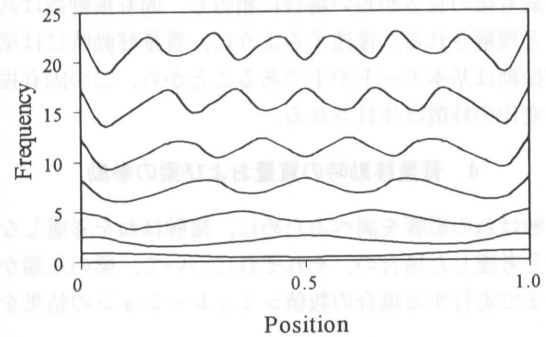


Fig. 2 Variations of Natural Frequencies Depending on Positions of Concentrated Mass

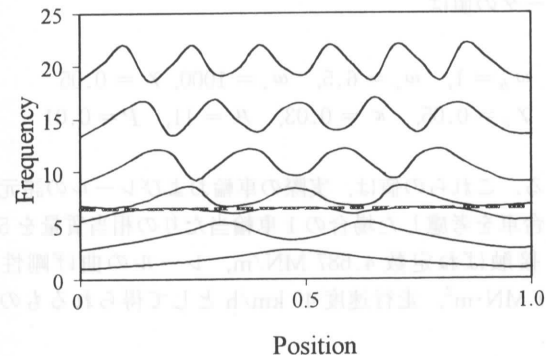


Fig. 3 Variations of Natural Frequencies Depending on Positions of Spring-Mass System

研究速報

移動質量は梁に集中質量として作用し、質量の位置によってその前後の梁の長さが増えるため、その長さの2乗に反比例する傾向で固有振動数が変化している。梁の基本固有振動数（最低次の固有振動数）に着目すると、移動質量が梁の中央部に近づくほど、梁の基本固有振動数は低くなる。

一方、Fig. 3は、接触ばねを考慮した場合の、質量の位置による系の固有振動数の変化を示している。図中の点線は移動質量-接触ばね系のみの固有振動数 ω_b を示す。移動質量が梁の中央部に近づくほど、梁の基本固有振動数は高くなる。

基本固有振動数の変化において、接触ばねを考慮した場合としない場合との差異については以下の様に考えられる。接触ばねを考慮しない場合には、質量が中央部にあるとき、基本固有振動数は質量が付加された分だけその慣性により低下することが直観的に理解される。しかしながら、接触ばねがある場合には、この系では車輪の質量がレールの質量に比べて充分大きいため、梁は質量の位置でばねによって支持された状態と等価であると考えられる。したがって、質量の位置での梁の運動が拘束され、節となるような振動モードとなるために、梁の中央部に質量がある場合が最も梁の長さが短い場合に相当し、固有振動数は高くなると理解される。後述するように、質量移動時には梁の固有振動は基本モードが主であることから、この固有振動数の変化の特徴は注目される。

4. 質量移動時の質量および梁の挙動

接触ばねの影響を調べるために、接触ばねを考慮しない場合と考慮した場合の、それぞれについて、梁の左端から右端まで走行する場合の数値シミュレーションの結果を求めた。

初期条件として、弾性支持梁および移動質量は、共に静的平衡状態から運動を始めると仮定する。用いた無次元パラメータの値は

$$\omega_b = 1, \quad \omega_c = 6.5, \quad \omega_s = 1000, \quad \gamma = 0.05 \\ \gamma_c = 0.05, \quad \kappa = 0.03, \quad \mu = 11, \quad P = 0.01$$

である。これらの値は、実際の車輪およびレールの諸元から、台車を考慮した場合の1車輪当たりの相当質量を500 kg、接触ばね定数4,687 MN/m、レールの曲げ剛性を4.841 MN·m²、走行速度40 km/hとして得られるものである。

Fig. 4は接触ばねを考慮しない場合の梁の振動を示している。質量が梁の中央付近まで移動し、蓄えられたポテン

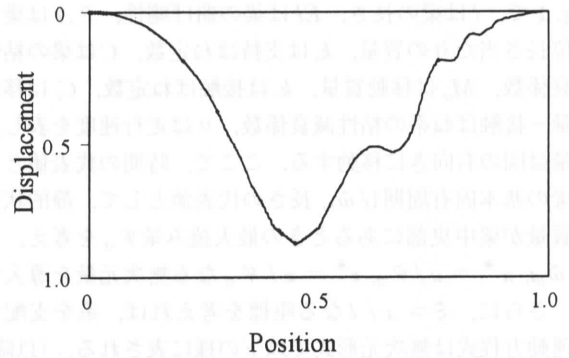
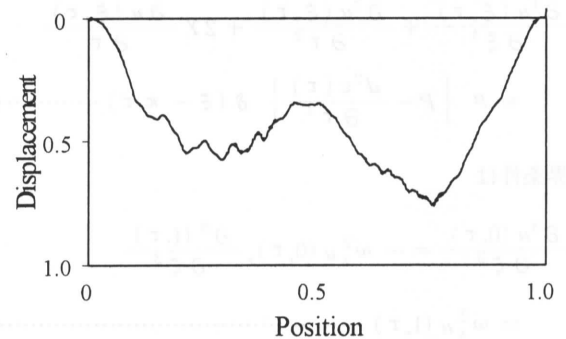
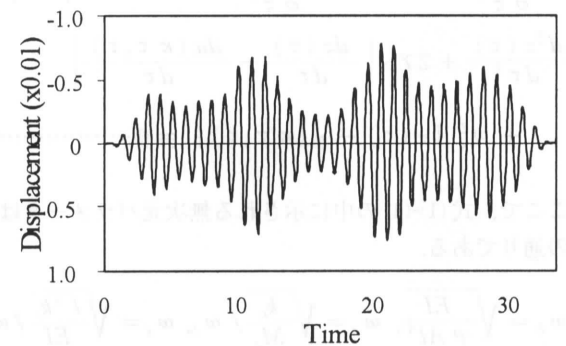


Fig. 4 Vibration of Beam at Contact Point with Concentrated Mass



(a) Vibration of Beam at Contact Point with Spring-Mass System

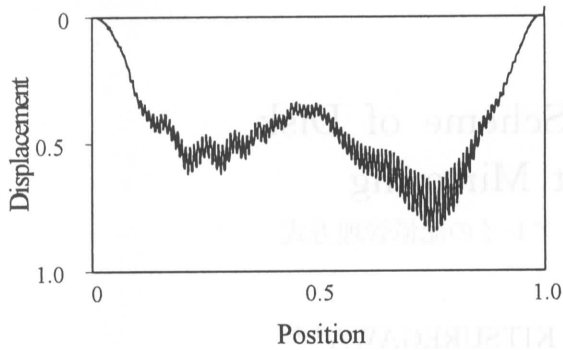


(b) Vibration of Spring-Mass System

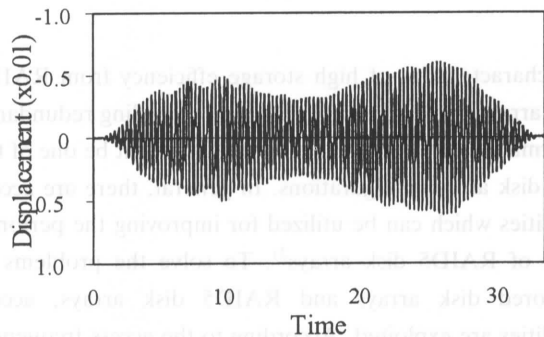
Fig. 5 Vibration of Beam and Spring-Mass System

シャルエネルギーが最大になった後、復元力の作用によって梁の基本固有振動が顕著になっている。

一方、接触ばねを考慮した場合の梁と移動質量の振動をFig. 5 (a), (b)に示す。梁は、式(1)と式(4)に示されるように、移動質量-接触ばね系と連成して振動する。移動質量-接触ばね系は、梁の振動による接触ばねの復元力によって励振され、励振された移動質量-接触ばね系の振動は、梁についてみかけの外力として作用する。接触ばねを



(a) Vibration of Beam at Contact Point with Spring-Mass System



(b) Vibration of Spring-Mass System

Fig. 6 Vibration of Beam and Spring-Mass System ($\omega_c = 20$)

考慮しない場合 (Fig. 4) と比較するとき, Fig. 5(a) に示される結果は, 質量が梁の中央にある場合を境に2つの大きなピークがあるという特徴を持つ。

また, 梁の振動は質量が梁の中央に移動するまでは基本固有振動数が支配的であるが, 中央部を通過した付近では, 質量の振動の影響が現れている。このとき質量の振動は Fig. 5(b) に示されるように最も顕著になっており, 式(1)の右辺第2項を介して梁の振動に影響を与えていることが確認される。

このように梁の振動数には質量の影響が現れているが, 質量の振動数には梁の影響が現れていない。これは, 式(1)の右辺第1項および式(2)の左辺第5項に示されるように, 梁については質量に加速度, 即ち慣性力が影響するのに対し, 質量には梁の変位が影響することに起因している。この比較検討の為に, Fig. 6(a),(b) に $\omega_c = 20$ の場合, 即ち, 移動質量—接触ばね系の固有振動数が梁の基本固有振動数に比べて充分高い場合の梁および質量の振動の様子を示す。Fig. 5(b) と比較して質量の振幅はあまり変わらないにもかかわらず, 振動数が高いために, 梁への質量の影響が大きく現れていることが確認される。

5. おわりに

本報では, 鉄道車輪およびレールをモデル化した梁および移動質量—接触ばね系の連成振動について, 接触ばねの影響という観点から梁および移動質量それぞれの挙動を調べた。これにより, 移動質量—接触ばね系と梁との連成振動は, 接触ばねを考慮しない場合と比較して, 固有振動数の変化ならびに質量移動時の挙動において共に異なる特徴を有し, 車輪およびレールから成る系の振動解析にあたっては, 接触ばねを考慮した解析が必要であることが示された。そして, この特徴の主たるものとして, 次のことを明らかにした。

- 1) 質量走行中に顕著となる梁の基本モードの固有振動については, その固有振動数は質量が中央部にあるときに最も高くなる。
- 2) 梁および移動質量の連成振動においては, 質量の振動は梁の振動に影響を与えるが, 梁の振動は質量の振動数にはほとんど影響を与えない。

波状摩耗の発生については次々に通過する車輪の振動の影響が予測される。今後は, 本報の知見を基に, 梁とその上を繰り返して通過する質量との接触力の成長について議論を進めていく予定である。 (1995年7月5日受理)

参考文献

- 1) 須田義大, 他2名, コルゲーションの成長・減衰機構の研究, 日本機械学会論文集 54-499, C(1985), 544.
- 2) 吉村彰芳, 他1名, 移動荷重による軌道の振動の解析, 鉄道総研報告書, 8-9, (1994), 31.
- 3) S. Kukla, B. Posiadala, Free Vibrations of Beams with Elastically Mounted Masses, Journal of Sound and Vibration, 175-4, (1994), 557.
- 4) 吉沢正昭, 他2名, はりとその上を走行するばね質量系との振動, 日本機械学会論文集 50-457, C(1984), 1570.
- 5) J. Hino, T. Yoshimura, K. Koshino, A Finite Element Method Prediction of the Vibration of a Bridge Subjected to a Moving Vehicle Load, Journal of Sound and Vibration, 96-1, (1984), 45.
- 6) Y.H. Lin, M.W. Tretheway, Finite Element Analysis of Elastic Beams Subjected to Moving Dynamic Loads, Journal of Sound and Vibration, 136-2, (1990), 323.
- 7) R.J. Roark, W.C. Young, Formulas for Stress and Strain, 5th Ed., McGraw-Hill, (1975), 517.
- 8) T. Dahlberg, Vehicle-Bridge Interaction, Vehicle System Dynamics 13, (1984), 87.
- 9) S. Timoshenko, D.H. Young, Vibration Problems in Engineering, John Wiley & Sons, (1974), 448.