特　集　2

竹光信正元客員助教授と乱流の数値計算

Former Guest Associate Professor Nabumasa Takemitsu and Numerical Simulation of Turbulence

吉 澤　　徵*
Akira YOSHIZAWA

竹光信正博士は1986年客員部門「多次元数値情報処理工学部門」の発足とほぼ同時期に助教授に就任し，1989年３月まで在職した．本来なら同博士が自ら本部門への寄与を記すべきであるが，1990年７月の悲しむべきカナダでの輪禍によりこれがかなわず，氏に代わり筆者が当時の同僚として，また友人としてその業績の一端を以下に紹介することとする．

1. 数値計算法について

本部門がその任を果たした10年間は乱流研究にとっても激動の10年であった．乱流研究では，ある時期までは実験・観測的手法が主要研究手段であり，理論的手法としては基礎方程式になんらかの統計操作を施し，その解の研究から乱流現象を理解しようとする方向が取られていた．しかし，1980年代からのスーパー・コンピューターを筆頭とする計算機ハードウエアの目覚ましい進展は，この状況を一変し，数値実験的手段の重要性を一段と高めた．特に，それまでに理論的研究から予測された事項，また提案されたモデルがこれよってその適否が明確にされ，淘汰されることになった．

この事情をわが国の乱流研究の視点から見ると，東京大学を始めとする大型計算機センターにスーパー・コンピューターが設置され，稼働し始めたのも1980年代であった．特に，日本製スーパー・コンピューターの進歩は著しく，計算機費用の負担を除くと大学研究者に等しく開放されている上記大型計算機センター体制は，数値計算的研究の超大国であった米国を近い将来凌ぐものではないかと感じさせるほどであった．しかし，ほどなくこれに危機感を抱いた米国ではスーパー・コンピューター・ネットワークが整備され，米国にとっての危機感は杞憂に終わったことは記憶に新しい所である．

竹光博士が数値解析法，特に流体方程式の計算アルゴリズムの研究に入ったのは，わが国にスーパー・コンピューターが登場するかなり以前からであった．また，それ以後もスーパー・コンピューターを駆使しての大規模計算よりは，高精度の能率のよい計算法の開発に全精力を傾けていた．現在わが国でもこの方面の研究で成果を挙げている研究者は少なくないが，同博士はその先陣を切った一人といっても過言ではないであろう．その一例として，流体計算でよく現われる

$$\Delta f \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f = RF\{f\} \tag{1}$$

を考える．ここで，$F\{f\}$ は f に関して非線形汎函数であり，R は流れを特徴付ける無次元数であり，理工学現象では大きな数となることが多い．

式 (1) を数値的に解くもっとも単純なものとして，空間領域を格子状に分解し，差分近似する方法がある．説明を分かりやすくするために，２次元の場合を考え，空間の任意の１点 A のまわりに４点 B，C，D，E を取る．格子間隔 h とすると，式 (1) は

$$\frac{f_B + f_C + f_D + f_E - 4\,f_A}{h^2} = R[F\{f\}]_A \tag{2}$$

と近似され，

$$f_A = \frac{f_B + f_C + f_D + f_E}{4} - \frac{1}{4}h^2 R[F\{f\}]_A \tag{3}$$

となる．式 (3) は f_A について非線形であるため，直接解くことができない．これを解くもっとも単純なものは右辺第２項の f_A を適当に設定し，繰り返し計算によって解を求めようとするものである．しかし，R が非常に大きいときは，たとえ h がかなり小さくとも摂動項が大きくなるため，繰り返し計算が収束しない．このため，繰り返し計算で新しく得られた f_A を $[f_A]_N$，前回のものを $[f_A]_O$ とし，

*東京大学生産技術研究所第１部
竹光信正元客員助教授在任期間：昭和61～63年度

$$f_A = \omega[f_A]_N + (1-\omega)[f_A]_0 \qquad (4)$$

と書く．Rがあまり大きくないときは，ωを1よりずっと小さくすることによって式（2）の収束解が得られるが，Rが大きくなるにつれてこの方法も破綻する．

もし，式（3）右辺のRを含む項からf_Aに比例する項を抜き出して左辺のf_Aと併せれば，分母分子にRが入り，たとえRがかなり大きくなっても収束解を得られることになる．式（3）をなんらかの方法で線形化し，多元の連立1次方程式の逆行列を求めるという視点では，前者の方法では対角成分が非対角成分に比べて大変小さくなり，逆行列が求めにくい形をしている．他方，後者では少なくとも対等にすることができ，計算の効率化，高精度化を図ることが可能となる．

現在では，この考えはきわめて自然に見える．しかし，流体方程式に対してこれを明白に組み込んだ計算スキームを一流雑誌（Journal of Comoputational Physics）に発表したのは，筆者の知るかぎり日本では竹光博士が最初であったと思う．特に，ほとんど独学に近い形で計算スキームの研究をせざるを得なかったために，成果を得るに多大の時間を要した．その結果，同博士はなかなか研究機関に職を見つけることができなかった．客員助教授在任時，竹光博士はこの方法を一層整備，発展させ，以下に述べる乱流モデル研究に適用した．これらの研究が認められ，カナダにおける応用数学に関する会議に招待講演者として赴き，彼の地でさゆり夫人と共に輪禍で一命を落としたことは神の戯れとしか筆者には今なお理解できない．

2. 乱流モデルについて

計算機が発達したとはいえ，すべての流体運動が基礎方程式の単なる数値計算で理解できるわけではない．むしろごく限られた一部のものに関し精度の高い数値情報が得られ始めているに過ぎないのである．工学上重要な流れをこのような方法で解析することは，現在はもちろん遠い将来まで期待できない．このため，基礎方程式になんらかの平均ないし粗視化操作を加え，小さな乱れの成分を切り捨てその影響をいわゆる「乱流モデル」として残すことが必要となる．どの程度の成分までモデル化するかによって多様な乱流モデルが構成されることになる．

乱流モデルの中でもっとも基本的なものは，アンサンブル平均操作に基づき，かつ単位質量当たりの乱流エネルギー（k）とその単位時間当たりの散逸率（ϵ）を用いるk-ϵ乱流モデルである．工業製品の精度向上という視点では，このモデルは不満足な点を多々含むが，乱流モデルの根幹をなす概念が散りばめられている．筆者が主要研究課題の一つとしている天体磁場の生成・維持機構の研究では，k-ϵモデルに匹敵するものが構成できれば飛躍的な成果が得られるものと思われる．

上述の乱流モデルは，**U**を平均流速，Pを平均圧力として，

$$\frac{DU_i}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}\cdot\nabla\right)U_i$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu_T\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right)\right], \qquad (5)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{U} = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{1}{2}\nu_T\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)^2 - \varepsilon + \nabla\cdot\left(\frac{\nu_T}{\sigma_K}\nabla k\right) \qquad (7)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{C_{\varepsilon 1}}{2}\frac{\varepsilon}{k}\nu_T\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)^2 - C_{\varepsilon 2}\frac{\epsilon^2}{k} + \nabla\cdot\left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\nabla\epsilon\right) \qquad (8)$$

となる．ν_Tはわゆる渦粘性率であり，

$$\nu_T = C_\nu\frac{k^2}{\varepsilon} \qquad (9)$$

と表現される．式（7）-（9）でσ_k，C_ν等はモデル定数である（その詳細はここでは必要としない）．

壁面が平面で近似でき，かつ分子粘性（ν）の効果が直接現われない領域で式（5）-（9）を考える．このとき，本モデルはA，Bを定数として

$$\frac{U}{u_\tau} = A\ln y^+ + B, \qquad (10)$$

$$\frac{k}{{u_\tau}^2} = \frac{1}{C_\nu}, \qquad (11)$$

$$\frac{\varepsilon}{{u_\tau}^4/\nu} = \frac{A}{y^+} \qquad (12)$$

というきわめて簡潔な特殊解を有している．ここで，Uは壁面に沿う流れの平均速度，u_τは壁面での流体摩擦力と関係する速度で摩擦速度とよばれている．さらに，y^+は平面からの距離yをνとu_τで無次元化した量であり，

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \qquad (13)$$

で定義される．

乱流モデルの研究では，式（10）-（12）はモデル（5）-（9）の一特殊解という以上の役割を演じている．分子粘性効果により流速が零となるきわめて壁面近傍まで格子分割を行うことは，幾何学的条件が複雑となる工学上の流れでは著しい計算付加の増大を引き起こすことになる．この困難を回避するために，式（10）-（12）をモデル（5）-（9）の壁面境界条件の代替とすることがしばしば行われる．また，k-ϵモデルより高度なモデルを使用する際も，式（10）-（12）を壁面境界条件の一部とすることがある．式（10）-

(12) をこのような目的に使用できるためには，少なくとももこの解がモデル (5)-(9) の壁面近傍での微分可能な解の主要項となっていることが要求される．

竹光博士は式 (10)-(12) を壁面近傍における漸近解の第一項と捉え，詳細な検討を加えた．その結果はまったく意外な結論となった．すなわち，モデル (5)-(9) は式 (10)-(12) を第一項とする漸近解と矛盾することが示され [ASME: Journal of Fluids Engineering **112**, 192-197 (1990)]，さらにモデル (5)-(9) が式 (10)-(12) と数学的に矛盾しないためには，式 (7) に ε に関する拡散項を付加する必要があることが指摘された．モデル (5)-(9) を式 (10)-(12) の下に数値的に解いても多くの場合なんらかの解に到達できる．しかし，「これは差分計算における格子間隔の有限性のためにこの欠陥が隠蔽されているだけであって，格子間隔を小さくすれば必ず露呈されるものである」と竹光博士は主張し続けた．筆者は全く別の統計理論的方法から ε に関する拡散項の存在に気がついていたが，同博士のような確信は持っていなかった．多くの人が信じて疑わないことにも考察を加える点が，竹光博士の真骨頂であったと言える．

竹光博士が死の直前まで全力を傾けていたものとして，摩擦速度 u_τ が零となる領域で式 (10) - (12) に代わるものを構成することであった．工学上重要な問題として，流れの固体壁からの剝離がある．このとき，u_τ は零となり，式 (10) - (12) は完全に破綻する．境界条件を壁面近傍の解析的解で代替する方法は，本来このような複雑な流れにおいてこそその本領を発揮するものであり，竹光博士の研究には多くの期待がかけられていた．実際，客員助教授の任期終了後も，本所専任助教授，さらに富山県立大学助教授としてこの問題の解決に没頭した．しかし，この研究はその端緒的な成果を日本機会学会論文集に数編の論文として残されたところで，同博士の突然の死をもってその終止符が打たれた．竹光博士の研究を継続し，発展させることは，同博士の思考方法があまりに独特であるがゆえに困難であり，筆者および周囲の者はこれを放棄せざるを得なっかた．

3. お わ り に

竹光博士が客員助教授としてその責務を十分果たし得たのは，尾上，増子両元所長を初めとする教官および事務方の客員部門への強力な支援体制に加え，一部および乱流の数値計算共同研究グループの方々の親身の協力に負うところが多い．また，同時期客員教授を勤められた富士通株式会社黒川兼行先生の温かい激励が同博士の研究への情熱を一層かき立てたのであった．その後，富山県立大学藤井澄二学長，田原晴男工学部長の御助力で，同大学の助教授として恵まれた環境下での研究遂行の機会が与えられた．客員助教授在任時，竹光博士が夜遅くまで研究室に残り，計算データを凝視していたこと等を走馬灯のように思い出しながら，多くの方々への感謝を同博士に代わり申し上げ，筆をおくこととする．

(1995年3月16日受理)