

加振力を発生する機器から支持構造物に入力する振動パワーの推定

(機器と支持構造物が分離できない場合)

Study on the Estimations of the Vibrational Power Supplied by a Machine that Generates the Exciting Force to the Supporting Structure

(The Case Where It is Impossible to Separate a Machine and the Supporting Structure)

金 在 徹*・大野 進一*・大石 久己**・鈴木 常夫*

Jeachul KIM, Shinichi OHNO, Hisami OHISHI and Tsuneo SUZUKI

1. はじめに

設備機器、原動機やエンジンなど加振力を発生する機器を建物、船舶、車両などの構造物（以下では支持構造物と呼ぶ）に設置すると、加振力によって支持構造物に固体伝播音が発生する。この固体伝播音の問題を統計的エネルギー法（SEA法）¹⁾によって解析するためには、加振力によって機器から支持構造物に入力される振動パワーが分かる必要がある²⁾。この入力振動パワーは、機器と支持構造物の結合点における支持構造物の機械インピーダンスと振動速度から計算できる。本報では、まず、入力振動パワーの計算方法を示す。また、機器と支持構造物がすでに結合されて分離できない場合について、加振実験の結果から支持構造物の結合点のモビリティを推定する式を示す。さらに、機器と支持構造物の理論モデルについて、加振力を受けた場合の応答の理論計算を行い、モビリティの推定式と入力振動パワーの推定方法の妥当性を確認する。

2. 入力振動パワーの推定理論

2.1 入力振動パワーの計算方法³⁾

機器から支持構造物へ入力する振動パワー P は、結合点において支持構造物に作用する力 F とその力の方向の速度 V によって次式のように与えられる。

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[F(\omega) V^*(\omega)] \quad (1)$$

ただし、 V^* は V の共役複素数、 ω は角振動数、 Re は実数部を表す。

機器と支持構造物が1点で結合されている場合、結合点

における支持構造物の結合点の機械インピーダンス $Z(\omega)$ を用いると、式(1)は、次式のように書ける。

$$P(\omega) = \frac{1}{2} |V(\omega)|^2 \operatorname{Re}\{Z(\omega)\} \quad (2)$$

機器と支持構造物が多点で結合されている場合、各結合点を通じて支持構造物へ入力する振動パワーは次式のように表すことができる。

$$P(\omega)_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[V_i^*(\omega) \sum_{j=1}^n Z_{ij}(\omega) V_j(\omega) \right] \quad (3)$$

 $(i = 1 \cdots n)$

ただし、 $Z_{ij}(\omega)$ 、 $i = j$: 駆動インピーダンス、

$i \neq j$: 伝達インピーダンスである。

機器の運転に伴う加振力はさまざまな要因で発生し、一般に結合点に作用する力を知ることは困難であるが、結合点での速度は測定可能である。この点に着目すると、支持構造物の結合点の機械インピーダンス $Z_{ij}(\omega)$ が分かれば、結合点での速度と機械インピーダンスから結合点を通じて入力する振動パワーを式(2)、あるいは式(3)より求めることができる。

2.2 機械インピーダンスの推定方法

式(3)の $Z_{ij}(\omega)$ は機器と支持構造物が分離できれば、分離した上で、支持構造物上の結合点に加振力を与えて、応答を測定することにより求められる。しかし、分離できない場合には、何等かの方法で推定する必要がある。そこで、結合構造物に加振実験を行って支持構造物の結合点の機械インピーダンスを推定する方法を以下で導く。なお、式の表現の便宜上、以下では機械インピーダンスの逆数であるモビリティを用いて議論を進める。

2.2.1 力と速度の関係式

* 東京大学生産技術研究所 第2部

** 工学院大学

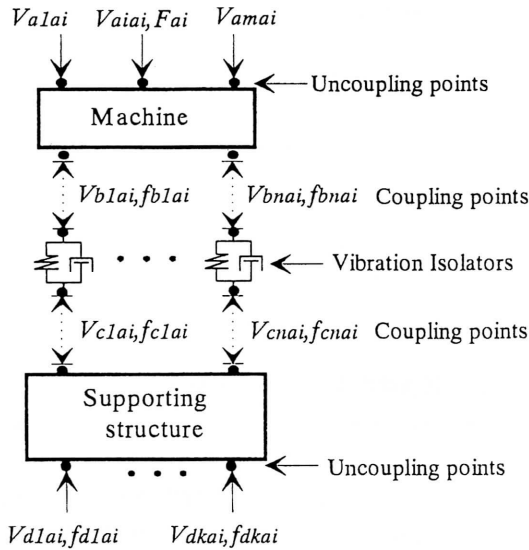


図1 機器と支持構造物のモデル

図1のように機器と支持構造物がばねとダンパから成る防振装置を介して結合されているとする。図1において、添字 **a** と **b** は機器の結合点以外の点と結合点を表し、**c** と **d** は支持構造物の結合点と結合点以外の点を表している。防振装置の上端は **b**、下端は **c** となる。加振力は結合構造物上の、上記の四つの点について与えることができるとし、力と速度の関係式を求める。以下ではその関係式を行列で表す。なお、結合構造物のモビリティを **T**、機械のみのモビリティを **G**、支持構造物のみのモビリティを **H**、加振力を **F**、防振装置に生じる内力を **f**、各点の速度を **V** とする。添字 **a, b, c, d** は上記の定義に従い、添字が2個ある場合は、前半が応答点、後半が加振点の位置を表す。

(i) 機器の結合点以外の点を加振するときの関係式

a. 結合構造物について

$$V_{aa} = T_{aa}F_a \tag{4}$$

$$V_{ba} = T_{ba}F_a \tag{5}$$

$$V_{ca} = T_{ca}F_a \tag{6}$$

$$V_{da} = T_{da}F_a \tag{7}$$

b. 機器のみにについて

$$V_{aa} = G_{aa}F_a + G_{ab}f_{ba} \tag{8}$$

$$V_{ba} = G_{ba}F_a + G_{bb}f_{ba} \tag{9}$$

c. 支持構造物のみにについて

$$V_{ca} = H_{cc}f_{ca} \tag{10}$$

$$V_{da} = H_{dc}f_{ca} \tag{11}$$

(ii) その他の点を加振するとき

機器と支持構造物の結合点を加振する場合、支持構造物の結合点以外の点を加振する場合についても、上の関係式と同様の関係式を導くことができるが、ここでは省略する。

2.3 支持構造物の結合点におけるモビリティの計算式

機器と支持構造物が線形であり、Maxwell-Bettieの相反定理 ($T_{ab} = T_{ba}^T$) が成り立つと仮定し、2.2.1節より導いた関係式を用いて、支持構造物の結合点のモビリティ H_{cc} の推定式を求めると、次式ようになる。

$$H_{cc} = \{ (T_{ca}T_{da}^{-1}T_{dc}) - (T_{cb}T_{db}^{-1}T_{ac}) \} \times (I - T_{ab}^{-1}T_{ac})^{-1} \tag{12}$$

式(12)において T_{cb} , T_{dc} , T_{ab} , T_{ac} , T_{db} は結合点を加振したときのモビリティである。しかし、実際に結合構造物の結合点を加振することは困難であるので、上記のモビリティを測定可能なモビリティで置き換える。そのために、2.2.1節の関係式から以下の式を求める。

$$T_{cc} = T_{ca}T_{da}^{-1}T_{dc} = T_{ca}T_{db}^{-1}T_{dc} \tag{13}$$

式(13)を式(12)に代入し、Maxwell-Bettieの相反定理を適用すると、式(14)が得られる。

$$H_{cc} = (T_{ca}T_{da}^{-1}T_{dc}^T) \{ I - (T_{cd}^T)^{-1}T_{bd}^T(T_{ba}^T)^{-1}T_{ca}^T \} \times \{ I - (T_{ba}^T)^{-1}T_{ca}^T \}^{-1} \tag{14}$$

式(14)より結合構造物に対して加振実験を行って、測定できる結合構造物のモビリティから支持構造物のみのモビリティ H_{cc} が推定できる。その逆行列 H_{cc}^{-1} から式(3)の機械インピーダンス $Z_{ij}(\omega)$ を求めることができる⁴⁾。

3. 理論計算による検討

本章では、前章で提案した機械インピーダンスの推定式と入力振動パワーの推定方法の妥当性を、理論計算モデルを用いて確認する。

3.1 理論計算のモデル

図2に示すように、それぞれ2組の並列ばね、ダンパで支持されたはりを2段に重ねたものを結合構造物とする。上のはりが機器、下のはり、ばね、ダンパが支持構造物、二つのはりの間のばね、ダンパが防振装置である。図2において、上下方向の力および運動を考えることにする。

3.2 理論計算による確認の手順

3.2.1 支持構造物の結合点のモビリティの確認

まず、上下が結合された状態において、上下のはりの結合点以外の点に加振力を与えた場合の結合構造物のモビリティ、すなわち、 T_{aa} , T_{ba} , T_{ca} , T_{da} , T_{ad} , T_{bd} , T_{cd} , T_{dd} を理論的に求める。それらのモビリティを式(14)に代入すると H_{cc} の推定値が求められる。つぎに、上下を分離し、下のはりの結合点における H_{cc} の理論値を求めることができる。こ

研究速報 の二つの H_{cc} の推定値と理論値を比較し、等しいことを確認する。

3.2.2 入力振動パワーの確認

まず、上下が結合された状態において、上のはりに加振力が作用したときの、防振装置に発生する内力と支持構造物の結合点の速度を求め、式(1)に代入して支持構造物へ入力する振動パワーの理論値を求める。また、式(14)を用いて求めた H_{cc} の推定値と上で理論的に求めた結合点での速度を式(3)に代入して支持構造物へ入力する振動パワーの推定値を求める。この二つの入力振動パワーの推定値と理論値を比較し、等しいことを確認する。

3.3 理論計算

二つのはりは図2のように2点で支持された両端自由はりとする。曲げ剛性を EI 、単位長さ当たりの質量を ρA 、はりの左端からの距離を x 、たわみを $y(x, t)$ とし、これらについては、上のはりは添字1、下のはりは添字2で区別する。防振装置に発生する内力を f とし、添字は前章に従うものとする。なお、下のはりの防振装置に発生する力は $f_3(t), f_4(t)$ とし、はりの左端からの距離は x_3, x_4 にする。記号をこのように定めて、各々のはりの運動方程式を立てる。たとえば、機器の結合点以外の点を加振する場合、機器と支持構造物の運動方程式は次式のようになる。

a. 機器の運動方程式

$$\rho_1 A_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + E_1 I_1 \frac{\partial^4 y_1}{\partial x_1^4} = -f_{b1a1}(t) \delta(x_1 - x_{b1}) - f_{b2a1}(t) \delta(x_1 - x_{b2}) + F_{a1}(t) \delta(x_1 - x_{a1}) \quad (15)$$

$$f_{bia1}(t) = (k_i + j\omega C_i) \{y_{bia1}(t) - y_{cia1}(t)\} \quad (i = 1, 2) \quad (16)$$

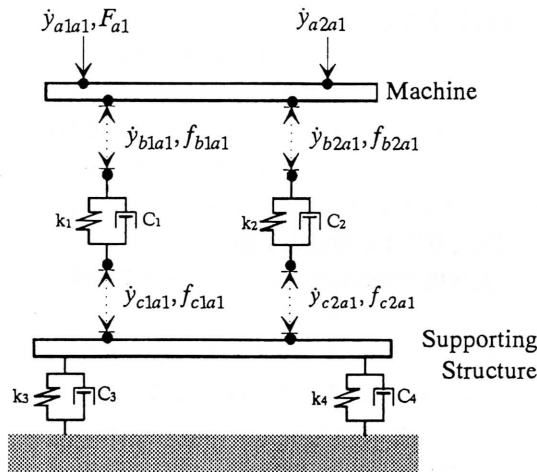


図2 理論計算のモデル

b. 支持構造物の運動方程式

$$\rho_2 A_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} + E_2 I_2 \frac{\partial^4 y_2}{\partial x_2^4} = f_{c1a1}(t) \delta(x_2 - x_{c1}) + f_{c2a1}(t) \delta(x_2 - x_{c2}) - f_3(t) \delta(x_2 - x_3) - f_4(t) \delta(x_2 - x_4) \quad (17)$$

$$f_i(t) = (k_i + j\omega C_i) y_2(x_i, t) \quad (i = 3, 4) \quad (18)$$

3.3.1 結合構造物のモビリティの計算

上の運動方程式を用いて、モビリティ T_{aa} を計算する方法について述べる。式(18)のラプラス変換式と境界条件を式(17)のラプラス変換式に代入し、支持構造物の防振装置によって発生する復元力 $\bar{f}_3(s), \bar{f}_4(s)$ と未知定数を求め、あらたに式(17)のラプラス変換式に代入すると、結合点に作用する力と速度の関係式を求めることができる。それらの式を行列で表現すると以下のようになる。横線はラプラス変換を表す。

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{b1a1}(s) \\ \dot{y}_{b2a1}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}_{b1a1}(s) \\ \bar{f}_{b2a1}(s) \end{bmatrix} \quad (19)$$

また、式(16)のラプラス変換式に式(15)のラプラス変換式と式(19)を代入して結合点の速度を消去する。その式と境界条件を式(15)のラプラス変換式に代入して結合点での力 $\bar{f}_{b1a1}(s), \bar{f}_{b2a1}(s)$ と未知定数を求め、あらたに式(15)のラプラス変換式に代入し、 $s = j\omega$ と置き換えると、加振力と応答点との間のモビリティ $T_{a1a1}(\omega), T_{a2a1}(\omega)$ を求めることができる。また、加振点を変え、上記と同様な計算を行うと、モビリティ T_{aa} を求めることができる。その式を行列で表現すると、次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{a1a1}(\omega) \\ \dot{y}_{a2a1}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{a1a1}(\omega) & T_{a1a2}(\omega) \\ T_{a2a1}(\omega) & T_{a2a2}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{a1}(\omega) \\ F_{a2}(\omega) \end{bmatrix} \quad (20)$$

その他のモビリティ $T_{ba}, T_{ca}, T_{da}, T_{ad}, T_{bd}, T_{cd}, T_{dd}$ も同様に求めることができる。

4. 検 討

4.1 支持構造物の結合点のモビリティの推定結果

本理論計算のモデルでは機器が2点で支持される構成となり、モビリティ H_{cc} は4個の要素を持つ行列になっている。いま、図2において、上下のはりは鋼で、共に長さ1.0m、幅0.03m、厚さは上のはりは0.01m、下のはりは

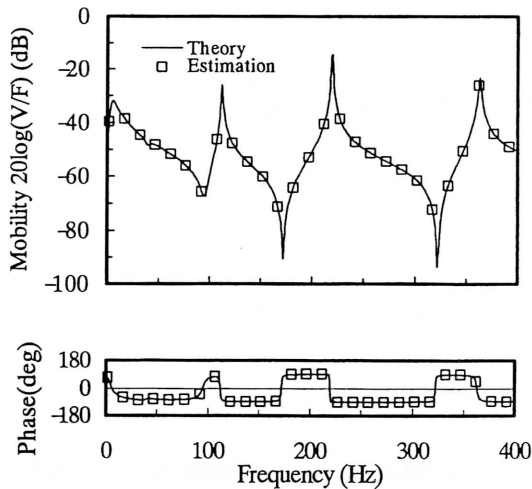


図3 結合点のモビリティの推定値と理論値

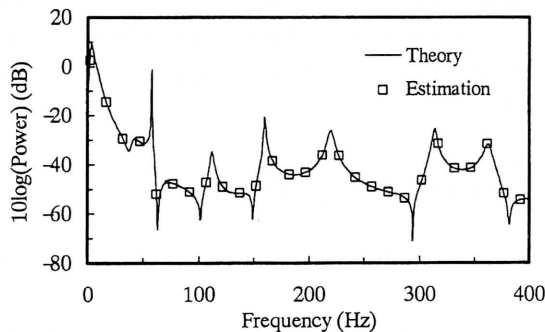


図4 入力振動パワーの推定値と理論値

0.007m, $k_1 = k_2 = 1.5\text{kN/m}$, $k_3 = k_4 = 1.0\text{kN/m}$, $c_1 = c_2 = 15\text{N}\cdot\text{s/m}$, $c_3 = c_4 = 30\text{N}\cdot\text{s/m}$ とした場合について、その行列の要素のうち一つについての推定値と理論値の比較を図3に示す。実線は理論値、□印は式(14)による推定値である。推定値と理論値は極めてよく一致している。

4.2 入力振動パワーの推定結果

図4は左側の結合点を通じて入力する振動パワーの推定

値と理論値の比較を示す。実線は理論計算から求めた理論値、□印は式(14)による機械インピーダンスの推定値を用いて求めた推定値である。入力振動パワーの推定値と理論値は極めてよく一致している。また、上下のはりの両端自由支持条件での1～4次の固有振動数は、上のはりについて57.6, 160.0, 313.6, 518.5Hz, 下のはりについて40.3, 112.0, 219.6, 363.0Hzであり、入力振動パワーは支持構造物の結合点の速度に追従し、機器と支持構造物の固有振動数で大きくなること分る。図4のデシベル (dB) 表示は基準値1Wである。

5. ま と め

本研究では、以下の結論を得た。

- (1) 加振力を発生する機器が支持構造物と結合されている状態のとき、両者を分離せず、加振実験で得られる結合構造物のモビリティから支持構造物の結合点でのモビリティを求める推定式を提案し、その妥当性を理論モデルを用いて確認した。
- (2) 上記モビリティと結合点での速度の測定値をもとに、機器から支持構造物へ入力する振動パワーの推定方法を提案し、その妥当性を理論モデルを用いて確認した。
- (3) 結合点でのモビリティの推定式としては、機器と支持構造物のそれぞれの一部のモビリティが分かっている場合などについて、別の式を求めることができる。それらの式については別に報告する予定である。

(1995年2月6日受理)

参 考 文 献

- 1) Lyon, R. H, "Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems", The MIT Press (1975), p. 388.
- 2) 入江良彦, 音響学会誌, 48-6, (1992), 433-443.
- 3) R. J. Pinnington and R. G. White, J. Sound. Vib, 75 (2), (1981), 179-197.
- 4) G. J. O'Hara, J. Sound. Vib, 41-5, (1967), 1180-1184.