

Dynamic SGS モデルの差分法における定式化

Dynamic SGS Model by Finite Difference Method

谷口伸行*

Nobuyuki TANIGUCHI

1. ま え が き

乱流の数値解析において、Large Eddy Simulation (LES) は Navier-Stokes 式の近似解を「直接計算と比較し」少ない計算負荷で得ることのできる手法と考えられる。LES に導入される乱流モデルは Subgrid Scale (SGS) 成分のみを対象としているため種々の流れ場に普遍的に適用できることが期待されるが、LES の SGS モデルとして最も広く用いられている Smagorinski モデルは SGS 応力の局所的な予測ばかりでなく統計平均的な乱流量の予測に関しても以下の欠点が指摘されている。すなわち、

- モデル定数の最適値が流れ場により異なる。
- 固体壁の効果が反映されない。
- 低レイノルズ数において層流解に漸近しない。

よって、Smagorinski モデルの実際の応用に際しては、モデル定数を対象ごとに最適化し、また、壁近傍では修正式を用いる必要があった^{1), 2)}。対象とする流れ場が剥離などを含み複雑である時にはこれらの問題がクローズアップされる。

そこで、Germano らにより提案された Dynamic SGS モデル (DSM)³⁾ が上記の課題を解決するものとして注目される。ところで、DSM では SGS 成分を定義するフィルタ操作を陽的に計算する必要があるが、体積フィルタ (あるいは、Gaussian フィルタ) を仮定して差分法により数値解析を行う場合には、定式化が明らかとは言えなかった。本報では差分格子におけるフィルタ操作の定式化について検討し、基本的な流れ場での適用結果を示す。

2. Dynamic SGS モデル

Dynamic SGS モデル (DSM) では、計算格子に応じて仮定される「Grid」フィルタに対して、これより大きな

サイズの「Test」フィルタを導入して SGS モデル定数を評価する。Grid フィルタと Test フィルタによる Grid Scale (GS) 量を、

$$\bar{u} = \overline{G}(u), \quad \tilde{u} = \tilde{G}(u) \quad (1)$$

と定義すると、それぞれに対する SGS 応力は、

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j, \quad T_{ij} = \widetilde{\overline{u_i u_j}} - \widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j} \quad (2)$$

と与えられる。ここで、各 SGS 応力は未知量であるが、次の量、

$$L_{ij} = T_{ij} - \tilde{\tau}_{ij} = \widetilde{\overline{u_i u_j}} - \widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j} \quad (3)$$

は Grid Scale (GS) 量のみで与えられる計算可能な値であることがわかる。

SGS 応力 τ_{ij} , T_{ij} に対して Smagorinski モデルを適用すると、

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} = -2\bar{C} \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \quad (4a)$$

$$T_{ij} - \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij} = -2\tilde{C} \tilde{\Delta}^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij} \quad (4b)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right), \quad S = \sqrt{2S_{ij} S_{ij}}$$

と表される。ここで、 $\bar{\Delta}$, $\tilde{\Delta}$ は Grid フィルタおよび Test フィルタのフィルタ幅、また、 \bar{C} , \tilde{C} はそれぞれのフィルタに対応するモデル定数である。

式(4a, b)を式(3)に代入して次式を得る。

$$L_{ij}^* = -2(\bar{C} \bar{\Delta}^2) M_{ij} \quad (5)$$

$$L_{ij}^* = L_{ij} - \frac{1}{3} L_{kk} \delta_{ij}$$

$$M_{ij} = \alpha^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij} - |\bar{S}| \bar{S}_{ij}$$

*東京大学生産技術研究所 第2部

$$\alpha^2 = (\bar{C}/\tilde{C}) (\tilde{\Delta}/\bar{\Delta})^2$$

従来の Smagorinski 定数 C_s により表せば,

$$\alpha = \frac{(\tilde{C}_s \tilde{\Delta})}{(C_s \bar{\Delta})}, \quad C_s^2 = C \quad (6)$$

となり, 係数 α は形式的には異なるフィルタ幅で定義される Smagorinski モデルでの長さスケールの比である.

式(5)は一般にはスカラー値 $(\bar{C}\bar{\Delta}^2)$ について解をもたないが, Lilly⁴⁾の提案に従えば最小 2 乗近似により,

$$(\bar{C}\bar{\Delta}^2) = - \frac{\langle L_{ij}^* M_{ij} \rangle}{\langle 2M_{ij} M_{ij} \rangle} \quad (7)$$

として計算される. ここで, $\langle \rangle$ はアンサンブル平均操作を示し, homogeneous な領域 (一様乱流では全空間, 平板間乱流では壁面に平行な面上) の平均が用いられる.

式(7)を Smagorinski モデル式(4a)に代入するとモデル定数 \bar{C} とフィルタ幅 $\bar{\Delta}$ は消去される. ここで, Test フィルタが Grid フィルタと相似で, かつ, 解像される全波数に対して $\beta = \tilde{\Delta}/\bar{\Delta}$ が小さければ, $\tilde{C} = \bar{C}$ が期待できる. スペクトル法を用い Spectral Sharp Cut-off フィルタを適用した平板間乱流の LES では, $\tilde{\Delta} = 2\bar{\Delta} = 4h$ (h : 格子間隔) を推奨値とし, $\tilde{C} = \bar{C}$ を仮定して $\alpha (= \beta) = 2$ により良好な結果を得ている.

3. 差分法における Test フィルタ

Spectral 法による解析の場合, Spectral Sharp Cut-off フィルタで定義される Test フィルタが Fourier 級数展開をフィルタ幅に対応する波数で打ち切ることにより, Grid フィルタと同様, 正確に評価できる. しかし, 差分法を用いる場合には Spectral Sharp Cut-off が正確に定義できないため, Gaussian フィルタ, あるいは, 体積フィルタが仮定される. これらは, 物理空間上で,

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \int \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{u}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (8)$$

と表される. 上式中のフィルタ核 \tilde{G} はフィルタ幅 $\tilde{\Delta}$ に対して, 各方向に以下のように定義される.

Gaussian フィルタ:

$$\tilde{G}(x, y) = \sqrt{6/\pi\tilde{\Delta}} \exp(-6(x-y)^2/\tilde{\Delta}^2) \quad (9a)$$

体積フィルタ:

$$\tilde{G}(x, y) = \begin{cases} 1/\tilde{\Delta} \cdots |x-y| \leq \tilde{\Delta}/2 \\ 0 \cdots |x-y| > \tilde{\Delta}/2 \end{cases} \quad (9b)$$

式(9a, b)をフィルタ幅 $\tilde{\Delta}$ による Taylor 展開で評価すると, いずれも,

$$\tilde{u} = \bar{u} + \frac{\tilde{\Delta}^2}{24} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + O(\tilde{\Delta}^4) \quad (10)$$

と近似される. よって, Test フィルタの差分式は式(10)を満たすように定式化される. たとえば, 等間隔格子において最も簡単な表式として,

$$\tilde{u}_i = \bar{u}_i + \frac{\gamma^2}{24} (\bar{u}_{i+1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}) \quad (11)$$

$$\gamma = \tilde{\Delta}/h \quad (h: \text{格子間隔})$$

が得られる. (式(11)は式(8)を Simpson の積分公式で評価しても同様に得られる⁵⁾が, 台形公式では⁶⁾ Truncation error により正しい係数が得られない.)

式(11)を DSM における Test フィルタとして用いるとき, 式(7)において陽的に現れるフィルタ操作が $\tilde{G}(\bar{u})$ であることを考慮すると, DSM の差分式は 2 つのモデル定数 α および $\gamma (= \tilde{\Delta}/h)$ で定義されることがわかる. ここで, フィルタ値 \tilde{u} に対応するフィルタ幅について, $\tilde{\Delta} \neq \bar{\Delta}$ であることに注意されたい. Gaussian フィルタの定義 (式(9a)) から, $\tilde{u} = \tilde{G}(\bar{G}(u))$ に対して,

$$\tilde{\Delta}^2 = \tilde{\Delta}^2 + \bar{\Delta}^2 \quad (12)$$

と算定できる. 式(12)は, 体積フィルタに対しても近似式(10)の範囲で正確な評価とみなせる.

ところで, 等間隔 h の空間格子で解像できる高波数は $k = \pi/h$ (波長 $2h$) までで, Smagorinski モデルによる従来の計算例に従いフィルタ幅 $\tilde{\Delta} \leq 2h$ と仮定した場合, 微係数の評価に aliasing 誤差が生じる. また, 低次 (2 次, 4 次) 精度の差分式を用いると, 特に高波数モードにおいて truncation 誤差が大きくなることにも考慮すべきである. すなわち, 差分法による LES では, これらの解析誤差を加えたものが実質的な SGS モデルとして機能していると考えられ, $\tilde{C} \neq \bar{C}$ とみなし定数 α を格子分割や差分スキームに応じて最適化することが実際的な手法と考えられる.

あるいは, 差分格子上で仮定を採用するには, SGS モデルの陽的な表式とともに, GS 成分の解析誤差もフィルタ幅 $\tilde{\Delta}$ に関して相似であることが必要になる. この条件は, フィルタ比 $\beta = \tilde{\Delta}/\bar{\Delta}$ に対して $H = \beta h$ となる粗い格子上で Test フィルタ値 S_{ij} を評価することで近似的に満たされると考えられる. フィルタ比 β が整数ならば, このような Test フィルタ値のための粗格子が定義できる.

研 究 速 報

この場合、式(10)は計算格子から Test フィルタ格子への制限補間 (restriction: $h \rightarrow 2h$) とみなせるが、Test フィルタが小さい ($\bar{\Delta} \leq 2h$) ときには aliasing 誤差を抑えるために計算格子上の最大波数 $k = \pi/h$ モードを効果的に除去する差分式が望ましいと考えられる。そこで、偶数、奇数ノードの重み和を等しくした、

$$\begin{aligned} \bar{u}_i = & \bar{u}_i + \frac{6}{24}(u_{i+1} - 2\bar{u}_i + u_{i-1}) \\ & + \frac{(\gamma^2 - 6)}{24}(u_{i+2} - 2\bar{u}_i + u_{i-2}) \end{aligned} \quad (13a)$$

を式(11)に換えて適用する。また、スタガード格子配置に対しても同様にして次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i+1/2} = & \frac{1}{2}(u_{i+1} + u_i) \\ & + \frac{(\gamma^2 - 3)}{48}(u_{i+2} - u_{i+1} - u_i + u_{i-1}) \end{aligned} \quad (13b)$$

つぎに、壁乱流解析の際に生じるアスペクト比の大きな計算格子に対する Test フィルタの定義について考察する。Schumann⁷⁾ の体積フィルタの考え方に従えば、Grid フィルタと Test フィルタは Type A (図 1) のように仮定される。一方、Smagorinski モデルが計算格子に依存せずに等方的であることを考慮すると Type B の定義も考えられる。従来の研究では、格子分割が細かい壁方向には Test フィルタを課さず、その効果をモデル定数 α の修正によって評価している³⁾が、アスペクト比の異なる格子点が混在する場合に適切な方法とは言えない。そこで、Type A, B に対して、

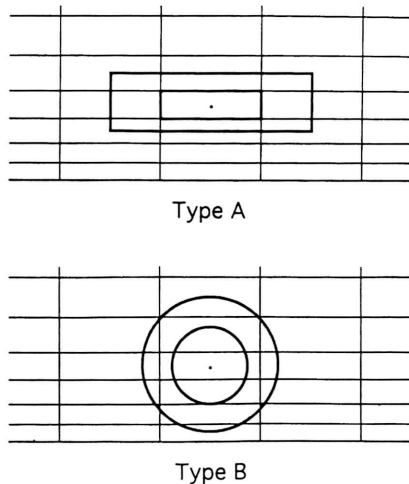


図 1 アスペクト比の大きな格子におけるフィルタ定義

- A. Δ を座標方向ごとに定義 ($\Delta_x = \gamma h_x$) し、 γ は定数。
 B. $\Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3}$ とし、 γ は座標方向による。
 として差分式(13a, b)を適用する。

4. 検証計算結果

上述のように差分格子で定式化した DSM による LES 計算結果^{8),9)}を以下に示す。計算コードはスタガード格子 SMAC 法によるもの¹⁰⁾で、空間、時間スキームには 2 次精度中心差分および Adams-Bashforth 法を用いた。

まず、一様等方 Decay 乱流の解析結果を示す。計算対象は Comte-Bellot ら¹¹⁾の格子乱流 (格子間隔 $M = 5.08$ cm, $Re = 71.6$) で、等間隔差分格子 (格子点数 $N = 32^3$, 領域サイズ $L = 7M$) により解析した。初期条件を得るために Smagorinski モデルによる計算を行い、その際、中間位置で 3 次元エネルギー・スペクトルが実験データと一致するように Smagorinski 定数を調整した。その後の区間を DSM により計算を継続した。モデル定数は $\alpha = \beta = 2$ とし (図 1 の Test フィルタ格子を適用)、フィルタ幅を $\gamma (= \bar{\Delta}/h) = \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{12}$ ($\bar{\Delta} = h, \sqrt{2}h, 2h$ に対応) と変えて解析した。

図 2 に GS 乱れエネルギーの変化を、図 3 に最終位置での 3 次元エネルギー・スペクトルを、計算領域 L と初期乱れ強度 $\langle u_i u_i \rangle$ で無次元化して示した。比較した実験データにはそれぞれ対応するフィルタ幅で Gaussian フィルタを課した値を示しており、仮定したフィルタに対して正確な予測が得られている。また、式(7)で算出されるモデル定数は助走区間計算で調整された Smagorinski 定数とほぼ一致した。

つぎに、平行平板間の壁乱流 LES への適用結果を示す。計算条件はレイノルズ数 $Re (= u_r D/\nu) = 360$, 流れ方向 πD , スパン方向 $\pi D/2$, 平板間 D を格子点数 $32 \times 32 \times 64$ とした。GS 成分の平均量に従来の Smagorinski モデルによる結果との有意な差は認められなかった。

Test フィルタ粗格子を適用した場合に算出された Smagorinski 定数 C_s の壁方向分布を、相対フィルタ幅 $\bar{\Delta}/h$ で規格化して図 4 に示す。式(7)で面平均を課したにもかかわらず流路中央部 ($y^+ > 50$) では空間変動がかなり見られる。時間平均すると壁面から単調増加する滑らかな分布が得られるが、流路中央で $C_s = 0.15$ ($\bar{\Delta} = h, \gamma = \sqrt{3}$) となり、Smagorinski モデルで最適とされる値 (0.1) よりやや大きく予測される。

一方、壁近傍 ($y^+ < 20$) では C_s 分布がフィルタ幅によらず同じ分布を与えており、この領域では SGS 長さスケールがフィルタ幅ではなく壁距離に支配されていることを示す。この分布は、Van Driest 型の減衰関数、

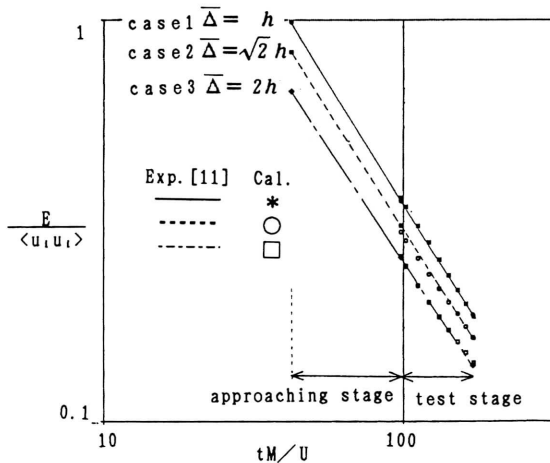


図2 DSMをもちいた一様Decay乱流のLES結果 (乱れエネルギー (GS成分) の減衰)

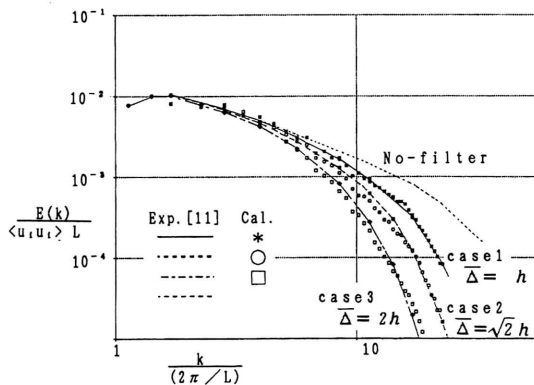


図3 DSMをもちいた一様Decay乱流のLES結果 (最終位置での3次元エネルギー・スペクトル)

$$\overline{Cs} = 0.1(1 - \exp(-y^+/25)) \quad (14)$$

ともよく一致し、DSMの壁近傍での妥当性を表している。壁近傍で空間変動が小さいのはGS成分の変動スケールも壁方向に減衰することと対応するとみられる。

Testフィルタ幅の定義 (Type A, B) について、 $\gamma = \sqrt{3}$ の計算結果を図4に合わせて示した。2つの方法においてテンソル各成分 (L_{ij} , M_{ij}) は大きく異なるにもかかわらず、 C_s 計算値はほぼ一致し、本モデルが仮定したフィルタ形状にほとんど依存しないことがわかる。

Testフィルタ値を粗格子ではなく計算格子で評価した

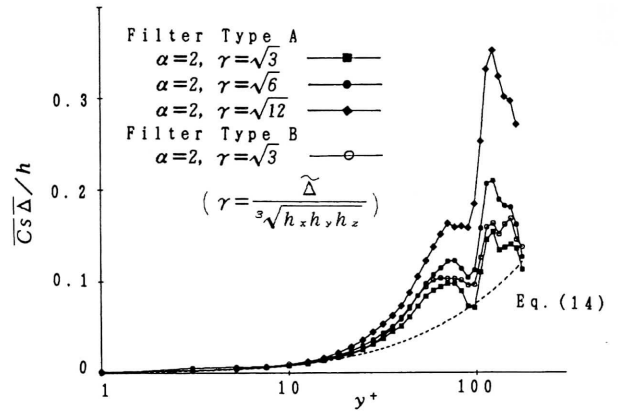


図4 平行平板間乱流 LESにおけるSmagorinski定数CsのDSMによる予測

場合にはモデル定数 α , γ と Grid フィルタ幅 Δ のア priori な関係は仮定できないが、 C_s の予測に関して図4と本質的な違いは見られない (図は省略)。壁近傍での式 (14) との整合性をみる限りでは、 $\gamma = \sqrt{6}$ ($\alpha = 2$ のとき) が最適値と判断される。これは、一様Decay乱流での値⁹⁾ と同じく、また、興味深いことに文献6などで採用された値とも偶然一致している。

謝 辞

本研究の主要な部分は著者が文部省在外研究員として米国 Stanford 大学に滞在中に行った。同大学にてご指導下さった Ferziger 教授はじめ、討論、助言を頂いた方々に感謝いたします。(1994年11月24日受理)

参 考 文 献

- 1) Deardroff, J. W., J. Fluid Mech. 41, 453 (1970).
- 2) Piomelli, U. et al., Phys. Fluids A3(7), 1760 (1991).
- 3) Germano, M. et al., Phys. Fluids A3(7), 1760 (1991).
- 4) Lilly, D. K., Phys. Fluids A4(3), 633 (1992).
- 5) 堀内, 生産研究, 42, 1, 43 (1990).
- 6) Zang, Y. et al., Phys. Fluids A5(12), 3186 (1993).
- 7) Schumann, U., J. Comp. Phys. 18, 376 (1975).
- 8) 谷口, 第9回生研NSTシンポジウム, 49 (1994).
- 9) 谷口, 機械学会流体工学講演会, (1994).
- 10) 森西, 東大機械工学科博士論文, (1990)
- 11) Comte-Bellot & Corssin, J. Fluid Mech. 48, 273 (1971).