

楕円管内乱流の LES

Large Eddy Simulation of Turbulent Flow in Elliptical Ducts

富 樫 盛 典*・小 林 敏 雄*

Shigenori TOGASHI and Toshio KOBAYASHI

1. は じ め に

楕円管内乱流はその理論的取り扱いが困難であるため体系的な研究はほとんど行われておらず、また楕円管内乱流を扱った実験解析も少ないのが現状である。しかし非円形断面を有するため、乱れの非等方性により発生する第2種2次流れによって、らせん状の複雑な流動を示し、長軸方向の平均速度分布が短軸方向の平均速度分布より大き目になることがわかっており、非常に興味深い流れ場でもある。非円形断面を有する流れとしては他に正方形断面管内流、正三角形断面管内流などがあるが、いずれの場合もコーナー部を有する管路であるのに対して楕円管路ではコーナー部と指摘できる部分は明瞭ではなく、したがって第2種2次流れの発生の様子も異なってくる。著者の知るところでは、この第2種2次流れの数値シミュレーションは、2次元計算で乱流モデルとして代数応力モデルを用いて行われた1例¹⁾のみである。このような研究現状の中で、本研究の目的は、円管内乱流でその妥当性が検証されたLES^{2),3)}を楕円管内乱流に適用し、楕円管内乱流の特徴である第2種2次流れ予測および長軸方向の平均速度分布が短軸方向の平均速度分布より大き目になることの再現を試み、圧力変動や速度変動の瞬時断面図を例示して、楕円管内乱流の3次元数値シミュレーションを行うことである。

2. 楕円管内層流の理論および数値解析

最初に楕円管内層流の解析を行うことにする。長軸2a、短軸2bの楕円管内の層流の平均速度分布は伊藤^{4),5)}によって理論的に求められており、(1)式ようになる。

$$u = \frac{a^2 b^2}{2\mu(a^2 + b^2)} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (1)$$

(1)式において、 $a=b=R$ 、 $x^2+y^2=r^2$ とすれば、円管内層流の平均速度分布の式と一致していることが容易にわかる。次にレイノルズ数を計算する際の代表長さのとり方について考える。円管の場合には半径あるいは直径を代表長さとしてとることが可能であるが、楕円管の場合は径が方向によって変化するため、同様に扱うことはできない。そこで(3)式で定義される等価半径を導入して、それを代表長さとして用いることにする。

$$\text{等価半径} = 2 \times (\text{楕円の面積}) / (\text{楕円の周長}), \quad (2)$$

この等価半径を計算するために、楕円の面積および周長をそれぞれ求めると(3)式ようになる。ただし、楕円の周長は楕円積分の公式を適用して近似した値である。

$$S = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \pi ab, \quad l = \pi \left\{ \frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab} \right\} \quad (3)$$

(3)式を(2)式に代入すると、

$$= \frac{2ab}{\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab}} \quad (4)$$

(楕円の代表長さ)

(4)式において、 $a=b=R$ とすると、等価半径はRとなり円管の場合と一致する。次に(1)式を摩擦速度と代表長さで無次元化すると、(5)式のように整理できる。

$$u^* = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \text{Re}_\tau \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (5)$$

次に実際に楕円管内層流の数値解析を行う。格子数は $40 \times 40 \times 80$ で計算領域は図1のようにになっている。楕円の格子生成法は円管の場合に準じた方法であり、長軸と短軸の長さを指定して楕円型の偏微分方程式を解くことで生成した。図2は $\text{Re} = 400$ ($\text{Re}_\tau = 20$)での楕円管内層流の数値計算

*東京大学生産技術研究所 第2部

結果であり、流れ方向平均速度分布はきれいな放物面を形成していることがわかる。図3は横軸に長軸および短軸をとり、縦軸は U/U_c とした図であり、図中のシンボル○とシンボル△はそれぞれ長軸上と短軸上の平均速度分布を示しており、実線は(5)式で示される理論式である。層流の場合には長軸上および短軸上の平均速度分布とも理論式によく一致していることがわかる。

3. 楕円管内乱流の LES 数値解析法

次に LES を用いた 3 次元の乱流数値解析を行う。物理反変速度成分を用いた一般座標系の基礎方程式および一般座標系格子と楕円 (円筒) 座標系格子を併用した手法の詳細については文献^{2), 3)}を参照されたい。圧力解法は HSMAC 法、時間進行法は 2 次精度のアダムスバッシュフォースを用いており、空間の離散化は 2 次の中心差分を用いた。数値計算領域は、層流計算の場合と同じである。また、スマゴリンスキー定数 C_s は 0.1 として計算した。入口と出口とは周期境界条件を課した。数値計算は $Re = 10000$ で行い、摩擦速度 u_τ と(5)式で定義される代表長さで定義されるレイノルズ数を $Re_\tau = 420$ とし、壁面境界条件は Non-slip 条件を採用している。時間刻みは $\Delta t = 0.0005$ とし、格子数は $40 \times 40 \times 80$ である。これらの数値計算は FACOM VP-100 を用いて行われ、1 ステップの計算時間は約 3 秒であり、無次元時刻で $t = 12$ まで計算を進めた。

4. 乱流数値解析結果と考察

図4は無次元時刻 $t = 8.7$ での主流方向の楕円管内断面における 3 次元の瞬時速度分布を示している。LES の計算結果から乱流統計量を求めるための統計処理として、5000 ステップあたりの時間平均および流れ方向の空間平均をとった。図5は主流方向平均速度分布であり、横軸は楕円管の短軸半径および長軸半径を無次元化して 1 にしたときの値を示しており、また縦軸は主流方向平均速度を中心平均速度で無次元化した値を示しており、シンボル○と△は長軸上と短軸上での LES の計算結果である。実線は Cain & Duffy⁶⁾ の楕円管内乱流の実験結果であり、上が長軸上での平均速度分布、下が短軸上での平均速度分布を示している。LES の結果は実験結果とよくあっており、長軸上での平均速度分布が短軸上での平均速度分布より大きくなっている。図6は主流方向平均速度分布であり、横軸は壁からの無次元長さ y^+ 、縦軸は無次元速度 u^+ を示しており、シンボル○と△は長軸上と短軸上での LES の計算結果である。実線は $u^+ = y^+$ (粘性底層領域) と $u^+ = 2.38 \ln y^+ + 5.45$ (対数速度領域) を示している。第 1

メッシュは粘性底層には入っていることがわかり、LES の計算結果は長軸上および短軸上ともに対数速度領域にほぼ一致した結果となっていることがわかる。図7は、楕円管断面での第2種2次流れを示したものであり、その大きさは主流速度の 2~3% となっている。第2種2次流れは 1/4 断面で 1 つ形成されることから、統計平均は、流れ方向平均と時間平均さらに 4 つの第2種2次流れの平均している。正方形断面管内流では明瞭なコーナー部を有していて、第2種2次流れ渦がコーナー部で 2 つできる⁷⁾ のに対して、楕円管内流の場合にはコーナー部は明瞭ではないため、楕円管断面の 1/4 の領域に 1 つの第2種2次流れが発生していることがわかる。図8は楕円管の流れ方向の短軸断面の 6 ケ所での瞬時速度分布を示したものであり、流れ方向速度分布の変動の様子が視覚的にわかる。図9は圧力変動 p' の楕円管断面分布、図10は流れ方向速度変動 v_z' の楕円管断面分布を示している。図11は圧力変動 p' の流れ方向の短軸断面分布を示している。図中の実線のコンターは正值、破線のコンターは負値を示している。これらの図から、大きなスケールの渦が楕円管の中心線を横切っているのが観察でき、中心線近傍で不合理な挙動は起きていないことがわかり、既報の円管内乱流の結果^{2), 3)} と合わせて、本研究で用いた 2 つの格子を組み合わせる手法は円管中心の特異点を避けて円管内・楕円管内乱流の LES 計算をするのには有効な方法であることがわかる。

5. ま と め

楕円管内乱流の 3 次元 LES 数値解析を行った。その結果、楕円管内乱流の特徴である長軸上での平均速度分布が短軸上での平均速度分布より大きくなることを再現することができ、圧力変動や速度変動の瞬時断面図を例示した。また、正方形断面管内流や正三角形断面管内流などでは明瞭なコーナー部を有していて、第2種2次流れ渦がコーナー部で 2 つできるのに対して、楕円管内流の場合にはコーナー部は明瞭ではないため、楕円管断面の 1/4 の領域に 1 つの第2種2次流れが発生していることがわかった。

(1994年11月2日受理)

参 考 文 献

- 1) 杉山ら, 第5回 CFD シンポ (1991), p. 343.
- 2) 富樫, 小林, 第7回 CFD シンポ (1993), p. 287.
- 3) Togashi and Kobayashi, Third JSME-KSME Fluids Engineering Conference, (1994), p. 102.
- 4) 伊藤, 機論, 17巻60号, (1951), p. 130.
- 5) 伊藤, 機論, 17巻60号, (1951), p. 133.
- 6) Cain and Duffy, Int. J. Mech. Sci. (1971), p. 451.
- 7) 梶島ら, 機論 B, 57巻540号, (1991), p. 50.

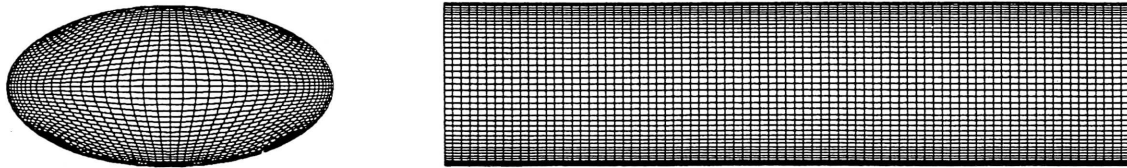


図1 楕円管の格子と計算領域

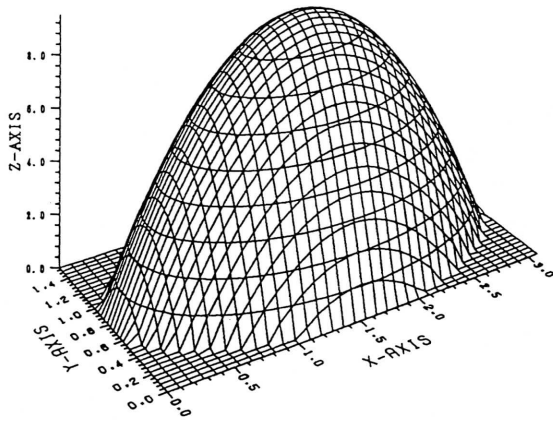


図2 楕円管内層流の主流方向
瞬時速度分布 (Re=400)

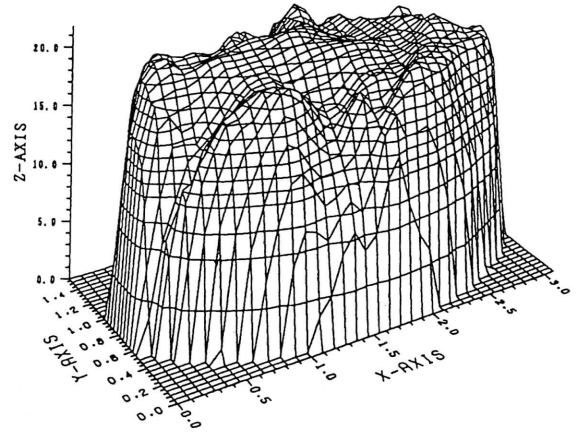


図4 楕円管内乱流の主流方向
瞬時速度分布 (Re=10000)

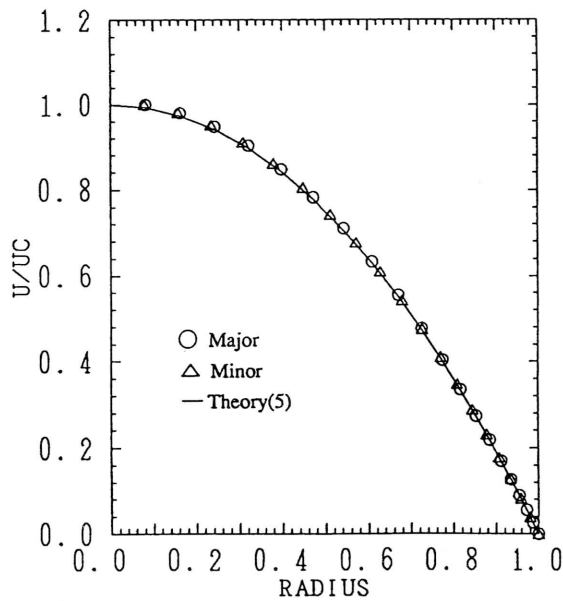


図3 楕円管内層流の主流方向
平均速度分布 (Re=400)

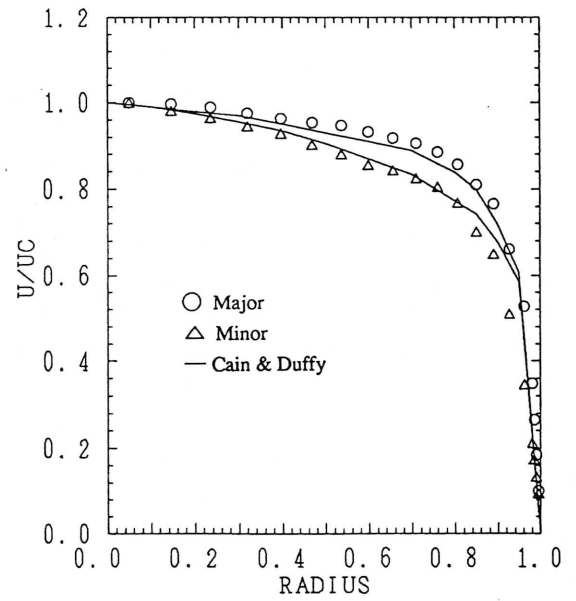


図5 楕円管内乱流の主流方向
平均速度分布 (Re=10000)

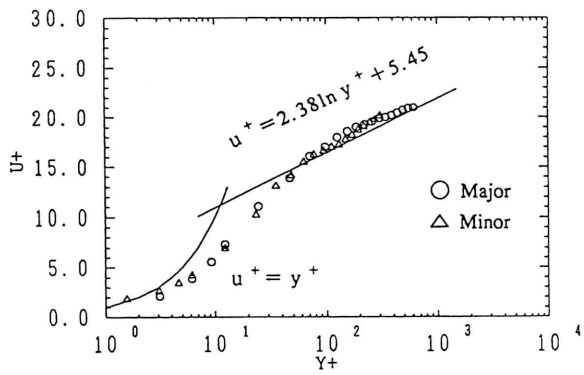


図6 主流方向平均速度分布

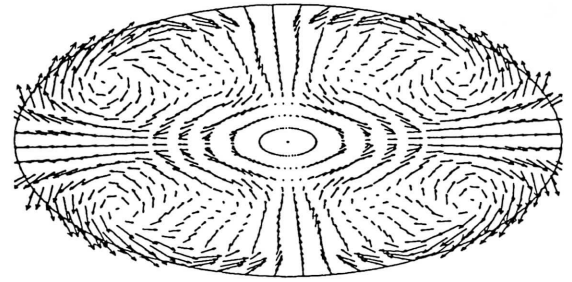


図7 第2種2次流れ

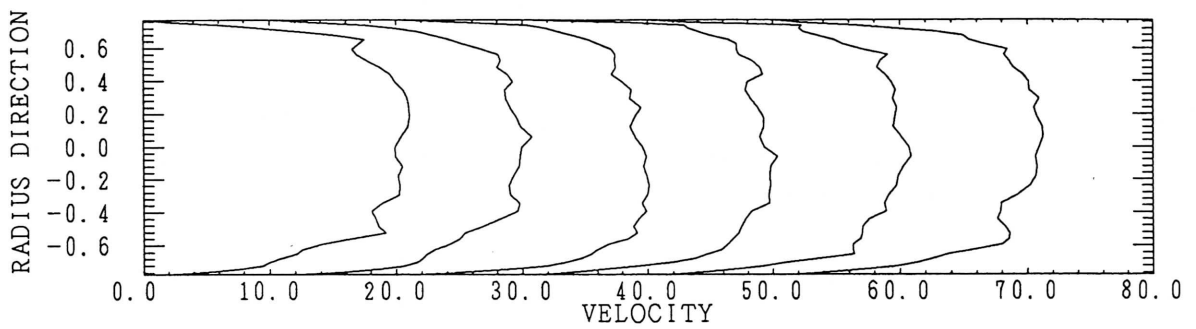


図8 短軸断面での主流方向瞬時速度分布

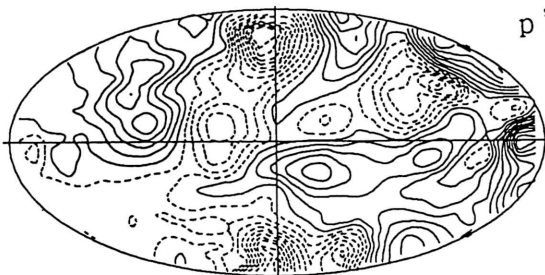


図9 楕円管断面での圧力変動分布

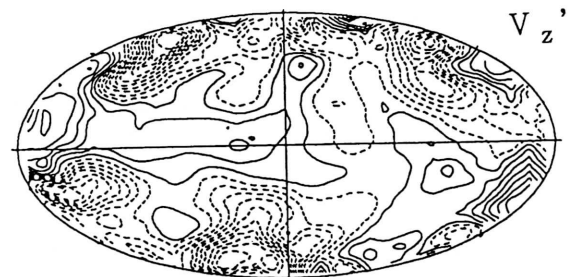


図10 楕円管断面での速度変動分布

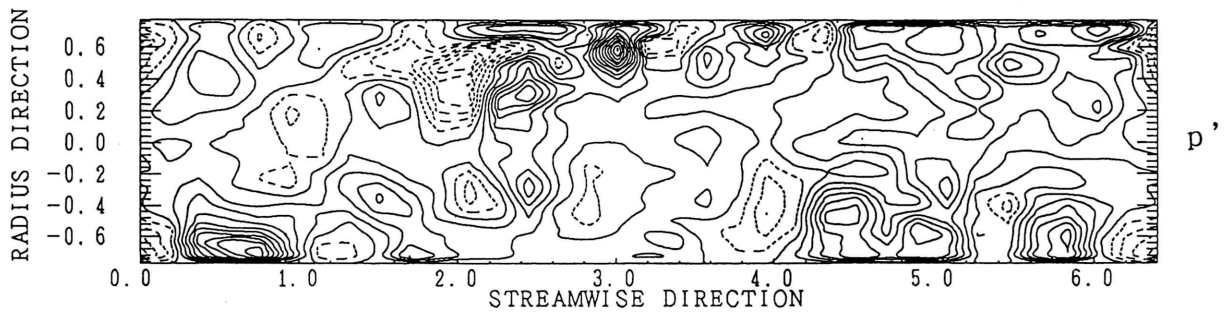


図11 短軸断面での圧力変動分布