

## 部分分割法による非圧縮性流体解析

Substructuring Analysis of an Incompressible Flow

大 島 ま り\*

Marie OHSHIMA

## 1. は じ め に

非圧縮性流体を解く際には、運動方程式の発散をとることによって導かれる圧力に関するポアソン方程式より圧力を求め、次に得られた圧力を運動方程式に代入することにより速度を得るアルゴリズムを通常用いることが多い<sup>1)</sup>。このようなアルゴリズムでは、圧力のポアソン方程式の解法で大部分の計算時間および計算容量が費やされる。この傾向はメッシュが細くなるにしたがい、離散化により得られる連立一次方程式が大規模化するため、さらに顕著になる。したがって、圧力のポアソン方程式の高速解法は計算効率の改善のうえで大変重要である。

最近では、並列計算機の普及により、解析領域をいくつかの部分領域に分割することにより、大規模解析を行う手法が開発されている<sup>2), 3)</sup>。本研究では、研究室に普及してきているエンジニアリング・ワークステーション (EWS) に着目し、数台の EWS をネットワークで結ぶことにより大規模流体計算を行う、ネットワーク分散型システムの構築を目的としてしている。本報では、ネットワーク分散型システムによる流れ解析を行うために、解析領域をいくつかの部分領域に分割することにより、最も計算負荷の高い圧力のポアソン方程式の高速化を図る部分分割法を提案した。本手法を検証するため、解析例として二次元キャビティをとりあげ、SUN Workstation SPARC 10 上で 1 CPU を用いて逐次的に解析を行った。さらに、スカイライン法、共役勾配法と不完全コレスキー分解付き共役勾配 (ICCG) 法との計算効率の比較を行い、本手法の有効性を検証するとともに、ネットワーク分散型システムへの拡張について検討した。

## 2. 有限要素法による定式化

非圧縮性流体の基礎方程式系は、次式で与えられる連続の式と運動方程式より成り立つ。

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{u} \quad (2)$$

ここで、 $\vec{u}$ ,  $P$  は速度ベクトルおよび圧力である。また、式中  $\text{Re} = (UL/\nu)$ ,  $U$ : 代表速度,  $L$ : 代表長さ,  $\nu$ : 動粘性係数) はレイノルズ数である。

これらの基礎方程式に対して、支配方程式に重み付き残差法を用いて弱形式化した後、Galerkin 有限要素法により空間方向の離散化を行う。さらに、MAC 法に基づいて時間積分としてオイラー陽解法を適用すると、解くべき有限要素行列方程式は、圧力のポアソン方程式と速度に関する式として、次のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}^{n+1} = & -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}^t \mathbf{u}^n \\ & + \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{B}(\mathbf{u}^n) + \mathbf{D}_u \mathbf{u}^n - \mathbf{f}_u^n) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{C} \mathbf{P}^{n+1} - (\mathbf{B}(\mathbf{u}^n) + \mathbf{D}_u \mathbf{u}^n - \mathbf{f}_u^n)) \quad (4)$$

ここで、行列  $\mathbf{f}$  は外力項の列ベクトル,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}^t$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}_u$  は質量, 勾配, 発散, 対流, 拡散マトリックスをそれぞれ表す。 $\Delta t$  は時間刻み巾を表し、添え字  $n$  は各変数の時間ステップを表す。

## 3. 部分分割法による定式化

(3) 式の  $\mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}$  は対称正定値の疎行列であり、離散化

\*東京大学生産技術研究所 第2部

されたラプラシアンに相当する。解析上、最も計算負荷が大きいのは圧力のポアソン方程式の計算である。そこで、部分分割法を圧力のポアソン方程式に適用する。

$$[S] \{X\} = \{f\} \quad (5)$$

ここで、式中  $[S]$  はラプラシアン行列、 $\{x\}$  は  $P$  に、 $\{f\}$  は右ベクトルに相当する。

部分分割法を適用することにより、解析領域を  $k$  個の部分領域に分割する。このとき、各節点量は部分領域内部の節点値  $\{x_i\}$  と部分領域境界上の節点値  $\{x_b\}$  とに分解され、以下のようにポアソン方程式が書き換えられる。

$$\begin{bmatrix} S_{ii} & S_{bi}^T \\ S_{bi} & S_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_i \\ X_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_b \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここで、 $S_{ii}$  は内部節点のみに寄与する行列を、 $S_{bi}$  と  $S_{bi}^T$  は内部節点および部分領域境界に寄与する行列とその転置行列を、 $S_{bb}$  は部分境界部のみに寄与する行列をそれぞれ表す。

実際の解析においては、まずガウス法により内部節点量を消去し、次式で表される縮小行列を導出することにより、部分境界上の節点量  $\{x_b\}$  を求める。

$$[\overline{S}_{bb}] \{X_b\} = \{\overline{f}_b\} \quad (7)$$

ここで、

$$[\overline{S}_{bb}] = [S_{bb}] - \sum_{i=1}^k [S_{bi}] [S_{ii}]^{-1} [S_{bi}]^T \quad (8)$$

$$\{\overline{f}_b\} = \{f_b\} - \sum_{i=1}^k [S_{bi}] [S_{ii}]^{-1} \{f_i\} \quad (9)$$

次に、求めた  $\{x_b\}$  を用いて、各部分領域内の内部節点量  $\{x_i\}$  を以下の式より求める。

$$\{X_i\} = -[S_{ii}]^{-1} [S_{bi}]^T \{f_b\} + [S_{ii}]^{-1} \{f_i\} \quad (10)$$

行列  $[S_{ii}]$  と  $[\overline{S}_{bb}]$  は対称の疎行列であるため、LDU 分解とスカイライン型記憶を組み合わせたスカイライン法を用いて作成し、記憶する。また、行列  $[S_{ii}]$  と行列  $[S_{bi}] [S_{ii}]^{-1}$  は、形状と境界条件が等しい部分領域に対しては 1 個の部分領域部についての行列を組み立てるだけでよい。ため、記憶容量の低減を図ることができる。したがって、記憶すべき行列は  $[S_{ii}]$ 、 $[\overline{S}_{bb}]$  と  $[S_{bi}] [S_{ii}]^{-1}$  であり、また、これらの行列は時間に依存しない行列である。このため、一度作成し記憶すれば、時間ごとに毎回作り直す必

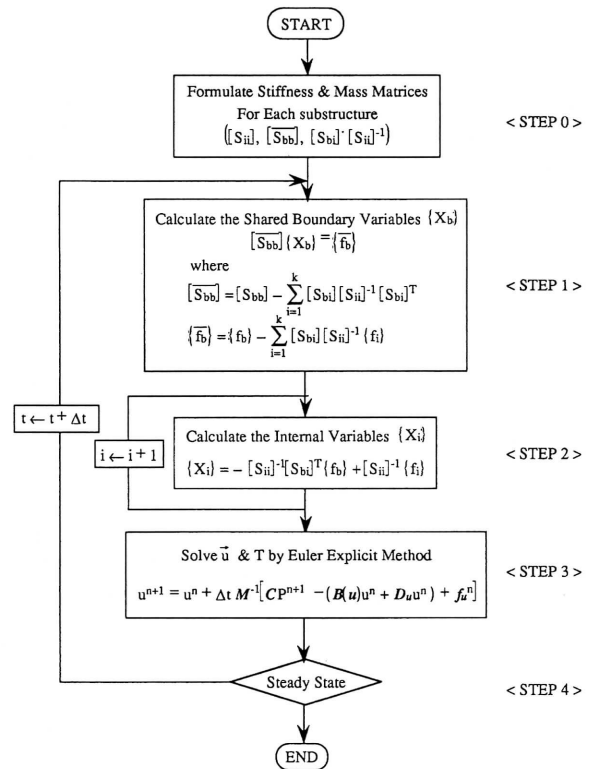


図1 部分分割法のアルゴリズム

要がなく、計算時間の削減に寄与すると考えられる。

以上の部分分割法に基づく解析アルゴリズムを図1にまとめる。

#### 4. 解析結果

解析は二次元キャビティを対象に行った。ここでは、部分分割法の計算効率を検証するために、反復法である共役勾配 (CG) 法と不完全コレスキー分解付き共役勾配 (ICCG) 法、そして直接法であるスカイライン法との計算効率の比較を行った。部分分割は  $71 \times 71$  の正方キャビティ (図2a) を  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ ,  $4 \times 4$  (図2b) と  $6 \times 6$  の四種類を用いて分割した。部分分割の際には、速度一次・圧力0次の要素を用いているため、図2b)に示すように部分領域間を一層重ねる必要がある。

解析はレイノルズ数  $Re = 100$  の二次元キャビティ流れについて、SUN Workstation SPARC 10 上で 1CPU を用いて逐次的に行った。図3は、キャビティの垂直線上的速度分布について、差分法の Ghia 結果<sup>4)</sup> および CG 法の結果と部分分割法を用いて  $2 \times 2$  分割と  $6 \times 6$  分割を行った結果との比較を行ったものである。図に示されているように、結果は一致しており部分分割法の精度が証明された。

図4と図5には解析に必要な記憶容量およびソルバー部

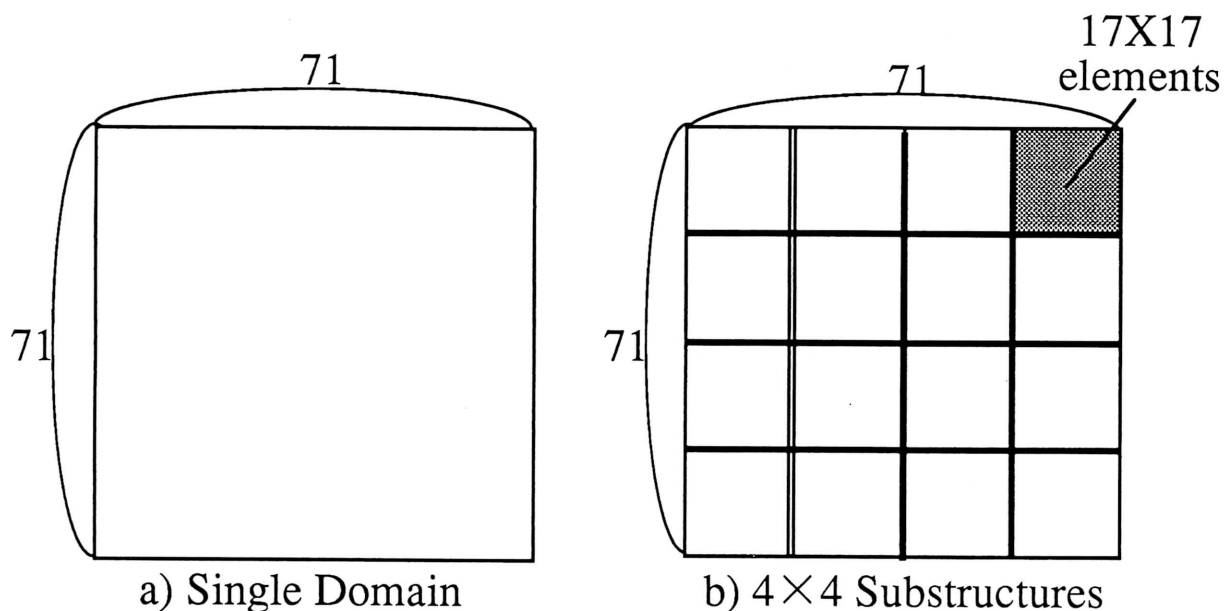


図 2 部分分割法による要素分割

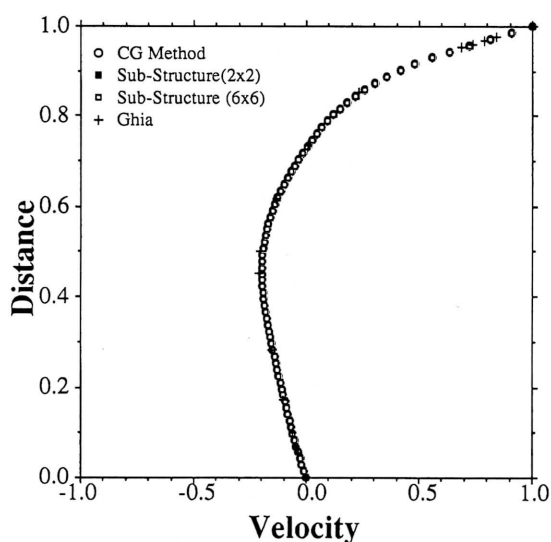


図 3 精度の比較

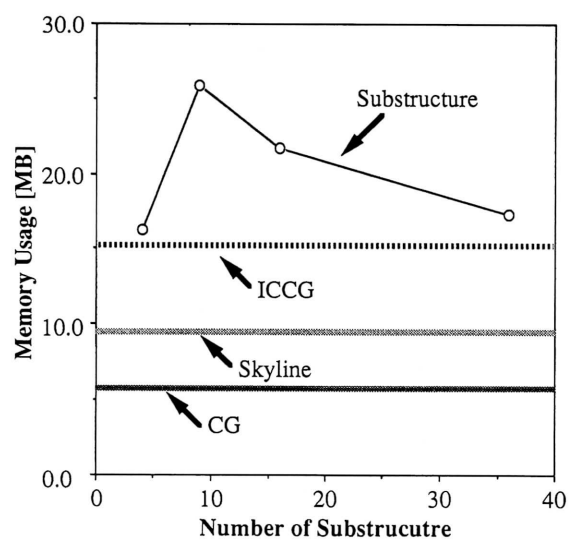


図 4 記憶容量の比較

に要する計算時間をまとめた。記憶容量に関しては、部分領域が 9 個以上の場合でも基本となる部分領域は 9 個であるため、部分領域 9 個分のみを記憶すればよく、 $3 \times 3$  分割をピークに記憶容量は低下していく。ソルバー部の計算時間を比較した結果、CG 法は毎時間ステップの CG 反復ごとに行列を組み立てなければならず、計算時間がかかるため、部分分割法のほうが効率的であることが証明された。

さらに、問題が三次元に拡張し大規模化した場合には、スカイライン法はバンド巾が増大し、記憶容量の点から解

析が不可能である。一方、CG 法と ICCG 法は計算時間が自由度に比例して増大する。したがって、計算容量および計算時間の面でも部分分割法は有利と思われる。また、領域を分割しているため、分散処理などによる複数 CPU を用いて解析するのに適しており、計算効率の向上を図ることができると思われる。

#### 4. お わ り に

部分分割法により二次元キャピティ問題を解析し、CG

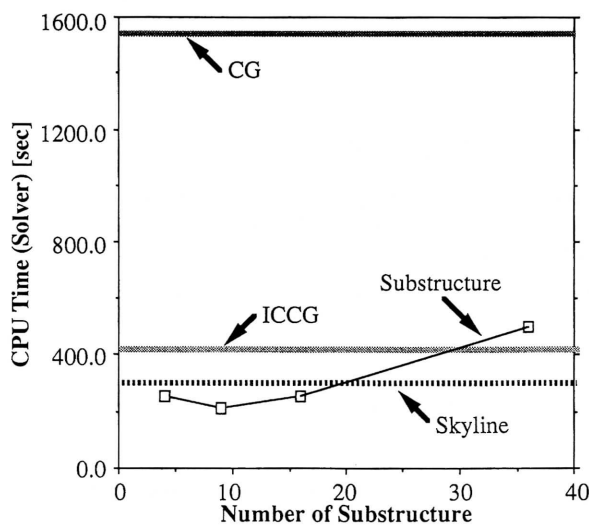


図5 ソルバー部に必要な計算時間の比較

法, ICCG 法およびスカイライン法との計算精度, 計算容量および計算時間の比較を行った。計算精度については,

差分法の Ghia らの結果と同一の精度が得られた。記憶容量に対しては,  $3 \times 3$  分割をピークに記憶容量が減少することが確認された。また, ソルバー部の計算時間に対しては, CG 法と比較していずれの場合も低く, また,  $4 \times 4$  分割までは ICCG 法およびスカイライン法のいずれより低いことがわかり, 本手法の妥当性が確認された。

今後は, ネットワーク間のデータ転送に PVM (Parallel Virtual Machine) を用いることにより, 部分分割法に基づいたネットワーク型分散処理を行う予定である。

(1994年11月24日受理)

#### 参 考 文 献

- 1) Gresho P. M., Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 87 (1991), 201-252.
- 2) Miller, W. O., AIAA-93-3308-CP (1993), 126-134.
- 3) 鈴木智博 他 2 名, 第 7 回数値流体シンポジウム演説文集 (1991), 547-550.
- 4) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., Journal of Computational Physics, Vol. 48 (1982), 387-411.