

非平衡効果の表現形式に関する研究

Investigation of the Non-Equilibrium-Effect Representations

岡 本 正 芳*

Masayoshi OKAMOTO

1. 序 説

最も基本的な乱流モデルの一つに渦粘性近似と呼ばれる方法がある。これはレイノルズ応力 ($R_{ij} \equiv -\langle u'_i u'_j \rangle$) を平均速度勾配 ($\nabla \cdot \mathbf{U}$) に比例するとして取り扱うモデルである：

$$R_{ij} = -\frac{2}{3} K \delta_{ij} \nu_T \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

ここで ν_T は渦粘性率と呼ばれる量であり、乱流エネルギー K と散逸率 ε に関する輸送方程式を利用して渦粘性率を見積もる $K-\varepsilon$ モデルでは通常

$$\nu_T = \mu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (2)$$

と表現されてきた。 $(\mu = 0.09)$ このモデルは大変簡便で、チャンネル流等の流れにおいて壁近傍を除いては現実をかなりよく再現するため広く利用されてきた。しかし、近年このモデルを用いた基本的な流れに対する解析の破綻から渦粘性近似がいくつかの重要な効果を考慮できていないことが指摘されるようになってきた。その一つに非平衡効果がある。この効果の必要性は一樣剪断流 ($U_i = \delta_{i1} S y$: S は定数シェアー) の解析において初めに認識された。一樣剪断流は乱流の発達に関与するシェアー S が常に存在すると同時に、固体壁等がないため非定常性の強い流れとなっている。この流れを式(1)で示した渦粘性近似を用いて解析すると乱流エネルギーが過剰に生成され現実に適合しない。この問題の改善策の一つとして μ を 0.09 より小さな値に設定し解析する方法が利用されてきた。その一方で、吉澤ら¹⁾はこの問題の原因が一樣剪断流の非定常性を渦粘性近似が考慮できていない点にあると考え、この現象

が一樣剪断流のみでなく衝撃波の前後の流れや後方および前方ステップ流等においても重要になることを指摘した。そこで単純に μ を変化させる改善方法ではなく、乱流統計理論の一つである2スケール直接相関近似 (two-scale direct-interaction approximation: TSDIA)²⁾ の解析結果を利用し、渦粘性率に対して次のような非平衡型モデルを提案した：

$$\nu_T = \mu \frac{K^2}{\varepsilon} + \mu_K \frac{K^2}{\varepsilon^2} \frac{DK}{Dt} + \mu_\varepsilon \frac{K^3}{\varepsilon^3} \frac{D\varepsilon}{Dt} \quad (3)$$

ここで D/Dt ($\equiv \partial/\partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla$) はラグランジェ時間微分で、係数は非圧縮条件を厳密に取り扱ったTSDIA解析³⁾によると、

$$\mu = 0.123, \mu_K = -0.147, \mu_\varepsilon = 0.0933 \quad (4)$$

と決まる。このモデルの特徴は流れの非定常性や空間的変動性といった非平衡効果を表現するため K や ε のラグランジェ微分項を導入し、渦粘性近似(1)を拡張した点にある。これらの項の寄与により、彼らは一樣剪断流での乱流エネルギーの過剰生成が是正されることを確認している。

しかし、この非平衡型モデルにも改良を必要とする点が存在する。その一つに一樣剪断流のような単純な流れ場ではなく複雑形状を境界条件とするような流れ場 (角柱まわりの流れなど) を解析すると、ある領域で渦粘性率が負の値になるという問題がある。この問題は理論から求めた係数を一樣剪断流の実験や数値計算のデータを用いて最適化するだけでは回避できなく、式(3)の表現をパデ近似や2スケール展開高次の非平衡効果を示す項 ($(DK/Dt)^2$ の項など) を導入することで改善の方向が模索されている。このような非平衡型モデルの改善を行う上で、非平衡効果の概念を再認識することは重要な意義を持っている。吉澤はこの非平衡効果の物理的解釈を次のように定義している。

*東京大学生産技術研究所 第1部

「アンサンブル平均型モデルで取り扱うエネルギー供給領域（大規模スケール）での変動は、カスケードにより小規模スケールの領域で散逸される。このカスケード過程は有限時間をかけて進行するため、大規模スケールでの変動をよりよく再現するためにはこの伝達中に生じる履歴を考慮しなければならない。」微分を用いた式(3)の表現よりも、この概念を明確にしたモデルを構築することは微分型の非平衡モデルの改善および非平衡効果の理解に役立つと考えられる。

そこで、本論文ではテイラー展開を用いて非平衡効果の概念を陽に反映させた2時刻型および積分型の非平衡型モデルを提案する。さらに一様剪断流に対する直接数値計算(DNS)の結果⁴⁾を用い、新たに提案した非平衡型モデルの評価を行った。

2. 各種非平衡モデルの導出

すでに著者が先の論文で言及しているように、厳密に非圧縮条件を課して行った TSDIA 解析で導出されるレイノルズ応力の非平衡効果に関する表現には係数間かなりの精度で比の関係が成立している³⁾。この比に着目すると、式(3)で示した渦粘性率は

$$\nu_T = 0.03 \frac{K^2}{\varepsilon} \left(4 - 5 \frac{1}{\varepsilon} \frac{DK}{Dt} + 3 \frac{K}{\varepsilon^2} \frac{D\varepsilon}{Dt} \right) \quad (5)$$

と書き換えることができる。この式のラグランジェ微分項の係数比を利用し変形すると次のようになる：

$$\nu_T = 0.03 \times 4 \frac{K^2}{\varepsilon} - 0.03 \left(\frac{K^2}{\varepsilon} \right)^{-1} \frac{D}{Dt} \frac{K^5}{\varepsilon^3} \quad (6)$$

物理的イメージを明瞭にするため、乱流エネルギー K と散逸率 ε により定義される乱流を特徴付ける時間スケール τ (特徴的時間)、渦粘性率 ν_0 (特徴的渦粘性率) を導入する。それらの定義は次のようになる：

$$\tau \equiv \frac{K}{\varepsilon} \quad \nu_0 \equiv 0.12 \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (7)$$

TSDIA 解析の ε 方程式導出の際長さスケールをすでに導入しているため、混乱を避ける意味からここでは特徴的長さは考えない。特徴的時間の時間変動が無視できる ($D\tau(t)/Dt \approx 0$) と仮定して、式(7)の量を用いて式(6)を変換すると

$$\nu_T = \frac{\nu_0(\mathbf{x}, t) + \left\{ \nu_0(\mathbf{x}, t) - \tau \frac{D\nu_0(\mathbf{x}, t)}{Dt} \right\}}{2} \quad (8)$$

となる。このように特徴的渦粘性率のラグランジェ微分を非平衡効果として取り込むモデルは吉澤、西島によりくわ

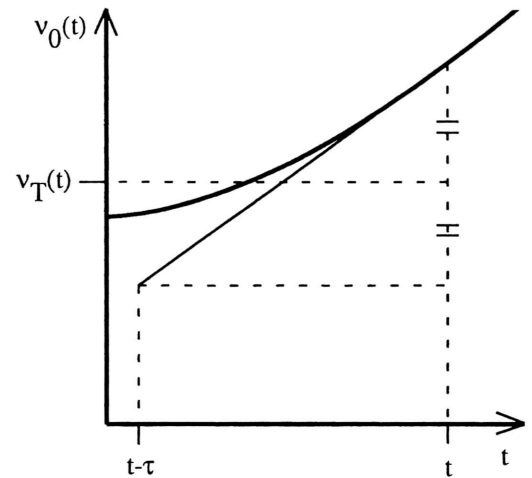


Fig. 1 非平衡微分表現の描像.

しく研究されてきた¹⁾。以後これを「微分型非平衡モデル」と呼ぶ。この形式の描像は Fig. 1 (時間変動のみが存在する場合の図) のようになり、初めに触れた負の渦粘性率の問題は $D\nu_0/Dt$ が大きい時や τ が大きい時に生じることがわかる。式(8)からわかるように、履歴の効果を表現するのに微分型モデルは陽には過去の量を有していない。そこで、式(8)が Taylor 展開された表現であるとみなすと

$$\nu_T = \frac{\nu_0(\mathbf{x}, t) + \nu_0(\mathbf{x} - \mathbf{U}\tau, t - \tau)}{2} \quad (9)$$

のように変形することができる。これを「2時刻型非平衡モデル」と呼ぶ。図式化して考えると Fig. 2 のようになる。この2時刻型モデルでは渦粘性率が時刻 t と $t - \tau$ の特徴的渦粘性率の平均という形式で表現されているため、微

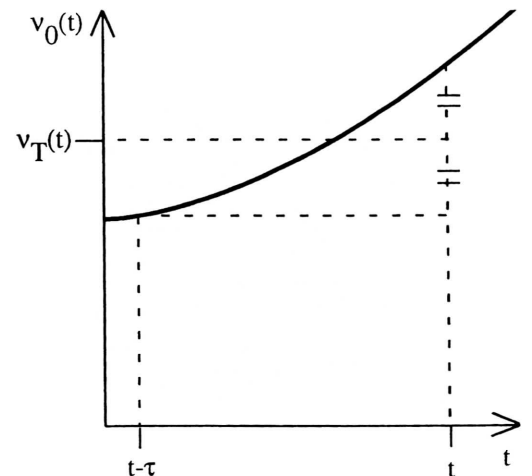


Fig. 2 非平衡2時刻表現の描像1.

研 究 速 報

分を用いた表現とは異なり渦粘性率が負の値を取ることはない。また、特徴的時間 τ は大規模スケールのエネルギーが小規模スケールまでカスケードして散逸するのに要する時間であると考えることができるので、この時間 τ だけ履歴を取り込むという描像は吉澤による非平衡型モデルの概念とよく一致している。しかし 2 時刻型モデルでは履歴を連続して考慮していないので特徴的粘性率の動向が極値を持つような場合（減少から増加に転ずる場合やその逆の場合）、その影響は考慮できない。そこで式 (9) を次のように変型する：

$$v_T = \frac{v_0(\mathbf{x}, t) \frac{\tau}{2} + v_0(\mathbf{x} - \mathbf{U}\tau, t - \tau) \frac{\tau}{2}}{\tau} \quad (10)$$

この表現は Fig. 3 で表され、 τ を無限に小さくしていくと t から $t-\tau$ までの積分に対応する。TSDIA 解析では慣性領域で定義された特徴的時間 τ より小さい時間スケールは導出できないので式 (10) が積分を近似しているものと考えたと

$$v_T = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t dt' v_0(\mathbf{x} - \mathbf{U}(t-t'), t') \quad (11)$$

のように変形することが可能である。これを「積分型非平衡モデル」と呼ぶ。このモデルの描像は Fig. 4 のようになる。このモデルにも 2 時刻型と同様、微分型で生じる渦粘性率が負の値になる問題は存在しない。また、2 時刻型のような離散的な履歴の取り込み方でなく、連続的に履歴を考慮している。さらに、この表現では非平衡効果がラグランジュ的に平均流に従って伝達していく様子を示唆して

いる。

このような変換はレイノルズ応力の非線形項（平均速度勾配の 2 乗に関連した項）の係数

$$\gamma_{NON} = \chi_{NON} \frac{K^3}{\varepsilon^2} \left(2 - 5 \frac{1}{\varepsilon} \frac{DK}{Dt} + 3 \frac{K}{\varepsilon^2} \frac{D\varepsilon}{Dt} \right) \quad (12)$$

にも適用でき、

$$\gamma_{NON} = \chi'_{NON} \frac{v_0 \tau}{2\tau} \int_{t-2\tau}^t dt' v_0(\mathbf{x} - \mathbf{U}(t-t'), t') \quad (13)$$

となる。ただし χ_{NON} , χ'_{NON} は定数である。式 (11) と (13) の比較から、非線形項は特徴的時間にして 2 倍の履歴を考慮する必要があることがわかる。複雑形状の境界条件を持つ流れに対する解析の際渦粘性率の微分型非平衡モデルに生じていた問題を考えると、このことは非線形項の非平衡効果の取り扱いがより困難なことを暗に示していると考えられる。

次に本論文で提案してきた 2 時刻型と積分型モデルが非平衡効果を十分評価できるか検証するため、Rogers と Moin, Reynolds らの一樣剪断流に対する直接数値計算 (DNS) の結果⁴⁾ を利用して解析を行った。彼らのデータはシェアー S が 28.284 で、シェアー時間 (St) が 4 ~ 16 までの計算である。積分型および 2 時刻型モデルに適用するため、 $St = 4 \sim 10$ のデータにカーブフィッティングを施して初期データとして使い、 $St = 10 \sim 16$ をモデルによって計算させた。また、 $St = 10 \sim 16$ 内で特徴的時間 ($St\tau$) は 5.06 から 5.80 まで変化した。積分表現の場合一定値として 5.50 と設定して計算を実行した。乱流エネルギー

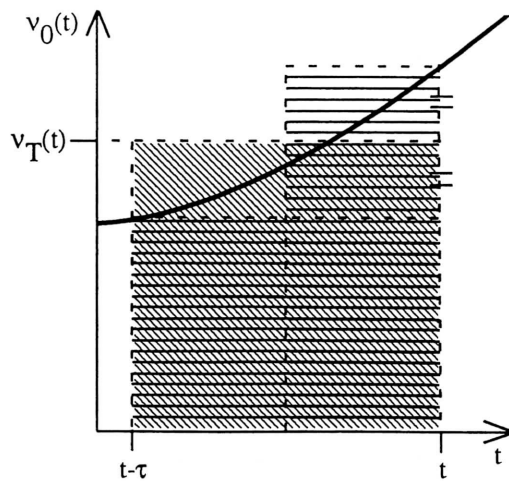


Fig. 3 非平衡 2 時刻表現の描像 2. 横線領域の面積と斜線領域の面積は等しい。

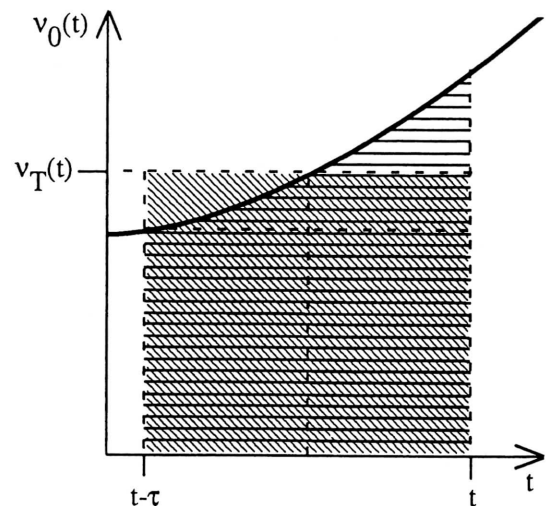


Fig. 4 非平衡積分表現の描像. 横線領域の面積と斜線領域の面積は等しい。

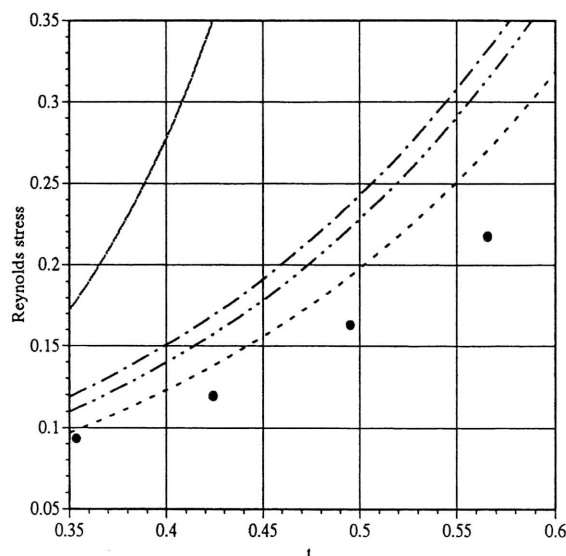


Fig. 5 一様剪断流の DNS とのレイノルズ応力比較. ●は Rogers, Moin, Reynolds による DNS の結果. 実線は TSDIA 平衡 $K-\varepsilon$ モデル, 破線は微分型非平衡 $K-\varepsilon$ モデル, 1 点破線は 2 時刻型非平衡 $K-\varepsilon$ モデル, 2 点破線は積分型非平衡 $K-\varepsilon$ モデルの結果をそれぞれ示している.

ギー, 散逸率なども計算してあるが, 代表として Fig. 5 にレイノルズ応力の時間変化を表したグラフを掲示した. 一様剪断流ではすでに微分表現がかなり精度よく渦粘性近似を改善していくことが確認されているが, 今回提案している 2 時刻型および積分型モデルも改善が顕著に見られた.

3. ま と め

微分を用いた非平衡型モデルを非平衡効果の物理的概念に従ってテイラー展開を利用し, 2 時刻表現および積分表現の非平衡モデルを導出した. これらの表現でのモデルが非平衡効果を評価できているか検証するため, 一様剪断流の DNS の結果を用いて解析を行った. 結果として, 提案した表現でも微分による表現のモデルと同程度の改善が可能なことを確認した. これらのモデルの特徴は次のようになる. 過去からの影響を陽に取り扱っているため微分を用いた表現よりも非平衡効果の物理的解釈を明解に表現している. 微分型モデルでの渦粘性率が負の値になる問題は履歴を取り込む際の近似の破綻が強く関与していると考えられるため, 過去の履歴を直に取り込む 2 時刻型と積分型モデルではこの問題は生じない. 積分型モデルでは平均流が非平衡効果を伝播するというラグランジェ的描像が明確に表現されている. 一方で欠点としては, 1 時刻量のデータで解析を行える微分表現のモデルと比較して, 両モデルは多時刻の情報を必要とするため現時点では工学的応用には適さない.

(1994年11月8日受理)

参 考 文 献

- 1) A. Yoshizawa and S. Nisizima, Phys. Fluids A **5** (1993) 3302.
- 2) A. Yoshizawa, J. Phys. Soc. Jpn. **52** (1984) 1194.
- 3) M. Okamoto, J. Phys. Soc. Jpn. **63** (1994) 2102.
- 4) M.M.Rogers, P. Moin and W.C.Reynolds: Stanford Univ. TF-25 (1986).