

## 回転系での一様性乱流に対するモデリング

Turbulence Modelling for a Homogeneous Rotating Flow by a Statistical Theory

岡本正芳\*  
Masayoshi OKAMOTO

### 1. 序 論

大きいレイノルズ数を持つ乱流を解析するのに統計平均の手法を使用することは不可欠である。その際、Navier-Stokes 方程式の非線形性から揺らぎ速度  $\mathbf{u}'$  の 2 体相関量であるレイノルズ応力 ( $R_{ij} \equiv -\langle u'_i u'_j \rangle$ ) のモデル化が必要になってくる。その代表的なモデル化の一つに渦粘性モデルがある。以下に、乱流エネルギー  $K$  とその散逸率  $\varepsilon$  の輸送方程式を解いてレイノルズ応力を評価する  $K$ - $\varepsilon$  モデル (2 方程式モデル) の渦粘性表現を示す:

$$R_{ij} = -\frac{2}{3} K \delta_{ij} + \nu_T \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

ここで  $U$  は平均速度,  $\nu_T$  は渦粘性率である。 $\nu_T$  は  $K$ ,  $\varepsilon$  と渦粘性係数  $\mu$  (通常は 0.09 という値が適用されている。) を用いて

$$\nu_T = \mu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (2)$$

のように定義される。

このモデルは非常に簡潔であることから広く利用されてきたが、最近基本的な流れにおいていくつかの問題点が生じることが指摘されてきた。その問題点のいくつかを以下に示す。

- [1] 方形管流で生じる 2 次流を再現できない。(非線形効果)<sup>1)</sup>
- [2] 急激な変動や非定常性を持つ流れ (一様剪断流など) において、渦粘性係数の補正が必要になる。(非平衡効果)
- [3] 回転する座標系中の流れに対し、回転の効果をまったく考慮できない。(回転効果)

[1] の問題は、レイノルズ応力が 1 次の平均速度勾配  $\nabla U$  のみでは表現できないことから生じていると考えられるた

\*東京大学生産技術研究所 第 1 部

め、 $(\nabla U)^2$  項 (非線形項) を式 (1) の渦粘性表現に加えることで改善を行ってきた<sup>1), 2)</sup>。[2] の問題が生じる原因は渦粘性表現 (1) が履歴効果を考慮できていないためと考えられる。ここでいう履歴効果とはエネルギー供給領域 (大規模スケール) での変動が散逸領域 (小規模スケール) に伝わる際の伝播効果を意味する。この問題に関しては吉澤らにより、2 スケール直接相関近似 (TSDIA) 解析<sup>3), 4)</sup> で乱流エネルギーや散逸率のラグランジェ時間微分項を式 (1) に加えることで改善することが示唆されている<sup>5)</sup>。一方、[3] の回転効果に関する渦粘性型モデルの欠陥は大きく 2 つに分けることができると考えられる。一つはレイノルズ応力のモデル表現に回転効果が存在していない点に起因する欠陥である。この問題点は回転座標系中の一様剪断流に関する数値実験により確認された<sup>6)</sup>。もう一つの欠陥点は散逸率の輸送方程式に回転効果が考慮されていない点にある。この問題点の存在は回転する一様等方向流に関する研究から指摘された<sup>7)</sup>。前者の問題点とは異なり、後者の問題点はレイノルズ応力の輸送方程式をモデル化して解析を行う応力モデルを用いても改善されない。これらの問題点に関してもいくつかの改善方法が提案されてきてはいるが、十分とはいえないのが現状である。

そこで本論文では特に散逸率に関する回転効果の問題点に重点を置き、理論的観点から TSDIA を用いた解析の結果を提示する。既に数人の研究者によって、回転効果を 1 次のオーダー (座標回転角速度  $\omega_0$  の 1 乗) まで考慮する TSDIA 解析や TSDIA の展開 (平均量の大規模スケールに関する微分階数を展開次数とみなす) と回転に関する摂動展開を合計して 2 次のオーダーまで考慮する解析が行われてきた。本研究ではベクトル量である座標回転角速度  $\omega_0$  がスカラー量である散逸率  $\varepsilon$  にどのように影響を及ぼすかについて重点を置くため、 $\omega_0$  によってスカラー量を導出できる最低次である回転効果 2 次のオーダーまで考慮

した TSDIA 解析を行った. 独立に TSDIA の 2 スケール展開は最高次を 1 次として解析した. さらに, 解析に際してすべてのオーダーで厳密に非圧縮条件 (質量保存則) を満たすよう注意した<sup>8)</sup>.

## 2. 基礎方程式

回転により生じるコリオリ力を持った Navier-Stokes 方程式は以下のように表すことができる:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - 2 \epsilon_{ijm} \omega_{0j} u_m \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (4)$$

ここで,  $u_i$  は速度ベクトル,  $p$  は圧力,  $\omega_{0j}$  は座標系の回転により生ずる角速度ベクトル,  $\epsilon_{ijm}$  は軸性テンソルを意味し, 同記号のテンソルの足の間では縮約を取るものとする. 式(3)(4)のアンサンブル平均を取ると平均場の式と揺らぎの場の式はそれぞれ次のように求まる.

$$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( R_{ij} + \nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - 2 \epsilon_{ijm} \omega_{0j} U_m \quad (5)$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{Du'_i}{Dt} = & -\frac{\partial U_i u'_j}{\partial x_j} - \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j} - \frac{\partial p'}{\partial x_i} \\ & + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} - 2 \epsilon_{ijm} \omega_{0j} u'_m \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \quad (8)$$

大文字は平均量 ( $\mathbf{U} = \langle \mathbf{u} \rangle$ ), ダッシュ付きの文字は揺らぎの量 ( $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle$ ) を意味する. 時間微分はラグランジェ微分 ( $D/Dt \equiv \partial/\partial t + U_j \partial/\partial x_j$ ) を表現している.

式(7)から乱流エネルギー ( $K \equiv \langle u'_i u'_i \rangle / 2$ ) の輸送方程式を導出すると

$$\frac{DK}{Dt} = P_K - \epsilon + \frac{\partial T_{Kj}}{\partial x_j} \quad (9)$$

のように書き,  $P_K$ ,  $\epsilon$ ,  $\partial T_{Kj}/\partial x_j$  はそれぞれ乱流エネルギーの生成項, 散逸項, 拡散項と呼ばれ次のように定義される:

$$P_K \equiv R_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (10)$$

$$\epsilon \equiv \nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle \quad (11)$$

$$T_{Kj} \equiv -\frac{1}{2} \langle u'_j u'_m u'_m \rangle - \langle u'_j p' \rangle + \nu \frac{\partial K}{\partial x_j} \quad (12)$$

注目すべき点は乱流エネルギーの輸送方程式(9)が回転のない場合のものとは完全に一致している点である. これは拡散項を無視できる一様流では回転の効果がレイノルズ応力や散逸率 (特に, 平均流が存在しない一様等流では散逸率のみ) を經由して間接的にしか影響を及ぼさないことを意味している. そのため, レイノルズ応力や散逸率のモデル化を精度よく行うことが回転流を評価するうえで重要になる.

## 3. モデリング結果

今回のモデルを導出するのに用いた TSDIA 解析では座標系の回転角速度  $\omega_0$  の 2 次, 2 スケール展開に関しては 1 次まで (微分展開と見なせば平均量の 1 階微分まで) 考慮した. 座標回転角速度があまり大きくないためエネルギースペクトルが回転のない場合のものと比較して大きく異ならないとし, エネルギースペクトルにコルモゴロフの慣性領域理論を仮定し係数の数値的評価を行った. その他の TSDIA の詳細な説明は省略する. その結果, レイノルズ応力は以下のようにモデル化された.

$$\begin{aligned} R_{ij} = & -\frac{2}{3} K \delta_{ij} + \nu_T S_{ij} + s_1 \left( \omega_{0i} \omega_{0j} - \frac{1}{3} \omega_0^2 \delta_{ij} \right) \\ & + s_2 \left( \epsilon_{ilm} \omega_{0l} S_{mj} + \epsilon_{jlm} \omega_{0l} S_{mi} \right) + s_3 \omega_0^2 S_{ij} \\ & + s_4 \left( \omega_{0i} \omega_{0m} S_{mj} + \omega_{0j} \omega_{0m} S_{mi} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \omega_{0n} \omega_{0n} S_{mn} \right) \\ & + s_5 \left( \epsilon_{ilm} \epsilon_{jrn} \omega_{0l} \omega_{0r} S_{mn} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \omega_{0n} \omega_{0n} S_{mn} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

$S_{ij}$  および  $W_{ij}$  はそれぞれ Strain テンソル, Vorticity テンソルであり, この論文では

$$S_{ij} \equiv \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad (14)$$

$$W_{ij} \equiv \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (15)$$

と定義している. 式(13)の係数値は

$$\nu_T = 0.123 \frac{K^2}{\epsilon} \quad (16)$$

$$s_1 = 0.0482 \frac{K^3}{\epsilon^3} \frac{DK}{DT} - 0.0482 \frac{K^4}{\epsilon^4} \frac{D\epsilon}{DT} \quad (17)$$

$$s_2 = -0.0493 \frac{K^3}{\epsilon^2} \quad (18)$$

研 究 速 報

$$s_3 = 0.176 \frac{K^4}{\varepsilon^3} \quad (19)$$

$$s_4 = 0.0611 \frac{K^4}{\varepsilon^3} \quad (20)$$

$$s_5 = 0.111 \frac{K^4}{\varepsilon^3} \quad (21)$$

と導出された。

理論計算の確認のため、コリオリ力のない場合での TSDIA の解析による 2 次の非線形レイノルズ応力のモデル<sup>2)</sup>と比較してみる。回転のない場合での 2 次の非線形レイノルズ応力は以下のように表現される。

$$R_{NONij} = \gamma_1 \left( S_{im} S_{mj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} S_{nm} S_{mn} \right) \\ + \gamma_2 (S_{im} W_{mj} + S_{jm} W_{mi}) \\ + \gamma_3 \left( W_{im} W_{mj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} W_{nm} W_{mn} \right) \quad (22)$$

$$\gamma_1 = -0.0297 \frac{K^3}{\varepsilon^2} + 0.0754 \frac{K^3}{\varepsilon^3} \frac{DK}{Dt} - 0.0459 \frac{K^4}{\varepsilon^4} \frac{D\varepsilon}{Dt} \quad (23)$$

$$\gamma_2 = -0.0122 \frac{K^3}{\varepsilon^2} + 0.0316 \frac{K^3}{\varepsilon^3} \frac{DK}{Dt} - 0.0194 \frac{K^4}{\varepsilon^4} \frac{D\varepsilon}{Dt} \quad (24)$$

$$\gamma_3 = 0.000400 \frac{K^3}{\varepsilon^3} \frac{DK}{Dt} - 0.000468 \frac{K^4}{\varepsilon^3} \frac{D\varepsilon}{Dt} \quad (25)$$

式(22)の第1項は2スケール展開の2次からのみ導出されるため、今回の解析によるモデルに対応する項は存在しない。第2項と第3項は式(13)の右辺第4項、第3項にそれぞれ対応している。値の比較を行うためコリオリ力を含む平均場の方程式から回転していない平均場の方程式への変換を考える。式(5)のコリオリ力の項は $\omega_0$ が定数ベクトルであることから対流項に含むことができ

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + 2 \varepsilon_{imj} \omega_{0m} U_j = U_j \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + 2 \varepsilon_{imj} \omega_{0m} \right) \quad (26)$$

平均速度勾配 $\partial U_i / \partial x_j$ を $\partial U_i / \partial x_j + 2 \varepsilon_{imj} \omega_{0m}$ によって変換すれば回転の効果を評価できることになる。この変換則を利用し式(22)から、 $\omega S$ 項の係数は $-0.0488$ と求まり $\zeta_2$ とかなりよい一致を示している。(  $\omega S$ 項の非平衡効果に関するラグランジェ微分項はさらに高次に展開を拡張しなければ導出できない。)  $\omega \omega$ 項はラグランジェ微分を含まない項は揺らぎの Navier-Stokes 方程式(7)のテンソルの制約から、恒等的に0であることが両結果から確認できる。係数の比較では  $DK/Dt$  項が $0.0064$ で、 $D\varepsilon/Dt$  が $-0.00749$ と導出される。この値は $\zeta_1$ に比べるとどちらも

小さく見積もられている。このことは、コリオリ力のない場合の TSDIA 解析が平均速度勾配形式から Strain-Vorticity 形式への変換の際にけた落ち誤差を含むことや今回の解析に比べ2スケール展開が高次なためはるかに複雑なことが原因と考えられる。そのため、回転効果を検証していくには今回の $\omega_0$ の高次まで取り込んだ理論解析の方が精度を確保できていると考えられる。また、両解析結果の共通点から座標変換不変性<sup>9)</sup>に関連する $\omega \omega$ 項に関して非平衡項が存在することが確認された。

次に散逸率 $\varepsilon$ のモデル方程式を評価する。通常用いられている K- $\varepsilon$  モデルの $\varepsilon$ 方程式は以下のようなものである。

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = 1.45 \frac{\varepsilon}{K} P_K - 1.92 \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (27)$$

拡散項は流れに一様性を仮定して無視した。一様等流では上式の右辺第1項も平均流がないため落とすことが可能で、この $\varepsilon$ 方程式も乱流エネルギー  $K$  の方程式(9)と同様に回転効果の考慮できていないことが明確である。式(27)を改良して回転効果を考慮すべく数種のモデル方程式が現象論的に提案されている。以下で、対象の流れを一様等流と限定し、比較のため二つのモデルを例としてあげる。その一つは Bardina らのモデル<sup>10)</sup>で、回転効果を回転角速度の1乗の項で表現した：

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -\frac{11}{6} \frac{\varepsilon^2}{K} - 0.15 \omega_0 \varepsilon \quad (28)$$

もう一例は下村により TSDIA 解析の結果を部分的に利用して回転効果を $\omega_0^2$ 項の形で取り込んだモデルを提案している<sup>11)</sup>。彼のモデルは回転角速度が大きくなったときの発散を抑えるための減衰関数を有するため複雑な形状をしている。同様な方向性から、森西により提案されている減衰関数を含まない形でのモデル方程式を以下に記載する<sup>12)</sup>：

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -1.82 \frac{\varepsilon^2}{K} - 0.058 \omega_0^2 K \quad (29)$$

係数の数値は、本論文で比較対象として後に用いる Jacquín らの実験<sup>7)</sup>の乱流格子幅15 mm でのデータに対して提案者により最適化された値を用いた。

一方、この解析による結果として得られる散逸率の方程式は

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = 1.72 \frac{1 - 0.0767 \frac{K^2}{\varepsilon^2} \omega_0^2}{1 - 0.131 \frac{K^2}{\varepsilon^2} \omega_0^2} \frac{\varepsilon}{K} (P_K - \varepsilon)$$

$$-0.0653 \frac{1}{1-0.131 \frac{K^2}{\varepsilon^2} \omega_0^2} \frac{K^2}{\varepsilon^2} \omega_{0m} \omega_{0n} \frac{\partial U_n}{\partial x_m} \quad (30)$$

と導出された。一様等流流の仮定を適用すると

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -1.72 \frac{1-0.0767 \frac{K^2}{\varepsilon^2} \omega_0^2}{1-0.131 \frac{K^2}{\varepsilon^2} \omega_0^2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (31)$$

と変形される。ただし、この結果は解析の際の座標回転角速度に関する摂動展開の制約から適用条件

$$\frac{K^2}{\varepsilon^2} \omega_0^2 < 1 \quad (32)$$

を満たす必要があると考えられる。また、分母を展開すると式(31)は

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -1.72 \frac{\varepsilon^2}{K} - 0.0543 \omega_0^2 K \quad (33)$$

となり、慣性小領域での数値を利用するだけで理論的に森西により提案されているモデルがほぼ再現できることが確認できた。一方、Bardina モデルの  $\omega_0$  の 1 次に関連する項は今回の解析からは導出されなかった。このモデルの精度を確認する意味から、Jacquin らの乱流エネルギーの実験データと本モデルの比較を Fig. 1 に示す。式(32)を満たす範囲での実験であるため満足できる精度で本モデルが実験の乱流エネルギーの動向を再現できることが確認できた。これらのモデルでの解析に際して、回転効果が強い場合や  $t \rightarrow \infty$  の場合で乱流エネルギーの発散する。下村によりこの現象を抑えるため減衰関数の導入が示唆されているが、今回の解析でもこの種の減衰関数をパデ近似を導入することで得ることが可能なことを確認している。

#### 4. ま と め

座標回転効果に重点を置いた展開での TSDIA 解析を実行した。それにより、座標回転角速度の 2 乗の項がレイノルズ応力、散逸率の輸送方程式に大きく寄与することを理論的に示し、モデルを提案した。そして、条件式(32)を満足する一様等流実験の乱流エネルギー変化をその散逸率のモデル方程式は再現できることが確認できた。

(1994年11月8日受理)

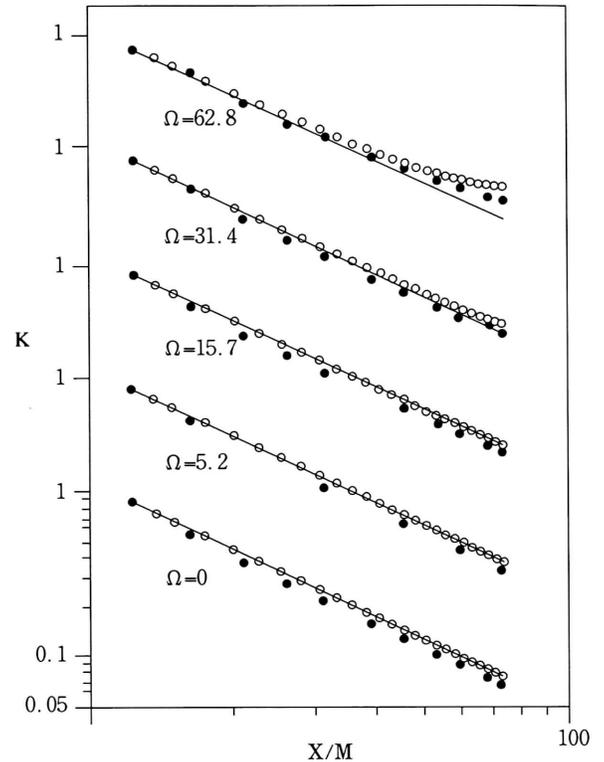


Fig. 1 乱流エネルギーに関する Jacquin らによる実験との比較。●は Jacquin らの実験値、○は本モデルによる解析結果。実線は回転を考慮しない場合の本モデルの解析結果。

#### 参 考 文 献

- 1) C. G. Speziale, Ann. Rev. Fluid Mech. **178** (1991) 107
- 2) M. Okamoto, J. Phys. Soc. Jpn. **63** (1994) 2102.
- 3) A. Yoshizawa, J. Phys. Soc. Jpn. **45** (1978) 1734.
- 4) A. Yoshizawa, J. Phys. Soc. Jpn. **52** (1984) 1194.
- 5) A. Yoshizawa and S. Nisizima, Phys. Fluids A5 (1993) 3302.
- 6) C. G. Speziale, T. B. Gatski and N. M. G. Mhuiris, Phys. Fluids A2 (1990) 1678.
- 7) L. Jacquin, O. Leuchter, C. Cambon and J. Matheu, J. Fluid Mech. **220** (1990) 1.
- 8) F. Hamba, J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 79.
- 9) C. G. Speziale, Theoret. Comput. Fluid Dyn. **1** (1989) 3.
- 10) J. Bardina, J. H. Ferziger and R. S. Rogallo, J. Fluid Mech. **154** (1985) 321.
- 11) Y. Shimomura, The Proceedings of International Conference on Near-Wall Turbulent Flows (1993) 115.
- 12) 森西・中林・高橋, 第8回生研 NST シンポジウム講演論文集 (1993) 33.