特　集　3
研究解説

設計用原型曲面の形態解析
Shape Finding of Original Surface for Structural Design

大　森　博　司*
Hiroshi OHMORI

大空間構造の形状を決定するに際して，その構造体が基本的に満たしていなくてはならない力学的な要請を満足する曲面形態群のみを考察対象とすることができれば，形態決定のプロセスはきわめて効率的となり，結果として設計者の自由度は大きく増加するであろう．ここでは，そのような基本条件を満足する曲面を「原型曲面」として捉え，膜構造物と一般のシェルやスペースフレームについて，それぞれの「原型曲面」として採用することのできる，等張力曲面と軸索曲面についてその解析法と問題点について検討を加えている．

1. 序　　文

無柱空間を安全でかつ美しく構築することは，人類の建設行為の歴史を通して，いつの時代でも大きな課題であり続けてきた．こうした大空間建築を構築するに際して，構造技術は2つの大きな役割を果たしている．その一つは安全性の確保である．大空間建築が自重に対してはもちろんのこと，地震や台風の作用に対しても，果たすべき機能を十分に発揮するためには，的確な構造技術の適用が不可欠であり，そうした技術の効果的な利用なしには安全な構造物を構築することはできない．

一方，構造技術が果たしているもう一つの重要な役割は，建築の美しさに対する貢献である．建築構造物，特に大空間構造物は，彫刻とは異なり，スケールの大きな実体である．したがって，彫刻のように作者の望む形をそのまま実現することは一般に不可能で，構造物の中を流れる力の原理に適合した形だけが実現可能な形となる．逆に，構造物の中を流れる力の原理を直接，間接に表現する，つまり構造物の形の表現に効果的に使ってやることによって，大空間構造に固有の，美しい造形を得ることができる場合が少なくないことは，この種の構造物の設計に携わった数々の先駆者達が示しているところである．

構造物の形態を，与えられた設計荷重に対して安全で，さらに美しいものとするための一般的な方法というものは残念ながら存在しない．一般的な方法がないというだけではなく，そのような目的を達成することがどの設計者にとっても可能であるというわけでもない．それは，「能力」や「運」に恵まれた一部の建築設計者にのみ可能な「技術」といえよう．このように，安全で，かつ美しい構造物を設計することが，ある種の発想や独創的な手法の延長線上にのみ可能となるのは，設計という行為が創造活動であるからに他ならない．

ところで，美しいか否かという価値基準は多分に感覚的なもので，定量化や分析の対象になりにくい面があるが，力学の原理を満足しているか否かという判定や一定の安全性をクリアしているか否かという基準については理論的におさえることの可能な事柄である．したがって，空間構造物の形態を考えるにあたって，こうした理論的に表現することのできる条件を満たす形態のみを対象に，スタディーを繰り返すことができれば設計過程の試行錯誤の効率を改善することができることになる．

近年，非常に高い周波数を持つ演算素子の開発に伴い，従来理論的には可能でも実際の演算時間を考えると現実的には不可能であるとされてきた事柄が，にわかに現実化可能なものとなってきている．特に，グラフィック技術に関する領域では，演算速度の向上の恩恵を直接に受けており，こうした技術をマン-マシン・インターフェースとして利用し，力学的条件やその他の設計条件を満たす理論空間内で得られる解を計算機に求めさせ，設計者は単に外部からいくつかの設計変数を変更して試行錯誤を繰り返すことにより設計を進めるといったことも技術的には可能となりつつある．

ところで，膜構造物の設計の初期段階では，等張力条件を満足する膜曲面形状が設計の基本曲面となり，この曲面を原型曲面と呼んでいる．これは，膜材が張力のみを負担

*東京大学生産技術研究所　第5部　（名古屋大学工学部助教授）

できる構造材料であり，しわや弛みを起こすことのないような形状にする必要から要求される条件をクリアする曲面群であり，膜構造における形態設計の初期形状として用いられる．膜構造の設計では，石鹸膜曲面がその具体的なものとしてよく用いられる．

一方，シェルやスペースフレームのような構造形式は外力に対して主に軸力で抵抗する構造で，膜構造と同じように，実現化可能な形態には限界がある．この種の構造物に対して，その形を支配する主たる外荷重は自重である．したがって，これらの構造物の形態を考えるとき，自重に対して軸力抵抗が可能な形態を，膜構造物における原型曲面と同様の位置づけで，形態設計の出発点とすることが考えられる．

本論では，空間構造物の設計に当たって，基本的な力学条件を満足する曲面を，原型曲面として捉え，これを計算機空間内で実現することを考える．膜構造やケーブルネット構造の場合は既に述べた等張力曲面がそれであり，シェルやスペースフレームの場合には自重に対して軸力のみで抵抗することのできる軸索曲面がそれに当たる．解析手法としては，変分原理を用い，任意形状に対応するのに便利な有限要素法を用いている．

2. 等張力曲面の形態解析

2-1. 研究の背景

薄膜を使用して空間を架構する膜構造は，他の構造に比べて容易にかつ経済的に大きな空間を得ることができ，形態も軽快であることから，パビリオンやレジャー関係の諸建築物をはじめとして大小問わずさまざまな建築物に応用されている．かつては建築物としての安定性や耐久性などの欠如から仮設的な意味合いが強かった膜構造であるが，近年の膜材および構造技術の発達によって次第に恒久的な建築物にも用いられるようになり，今日では他の構造形式にはない膜構造ならではの長所を生かした一層の発展，普及が期待されている．

一方で，このように大規模化，恒久化する膜構造に対し，これまで以上にその設計，施工にあたって慎重な取り扱いを必要とするようになってきた．大空間を軽く薄い膜材を使って覆うことは，また非常に精緻な側面を持っているとも言える．このような膜構造における設計の第一段階は，まずその『形』を決定することである．圧縮力や，面外せん断力，面外曲げモーメントに対して抵抗力を持たない膜材によって構成される膜構造は，もともと剛な構造ではなく，初期張力を与えることによって構造安定性を持たせるという意味からも，本質的には曲面内に作用する面内張力によって架構される構造形式である．また，膜材料それ自体の強度は大きくとも，薄膜という断面の小さな部材として使用するため，大きな耐力を期待し難い．

このことから膜面内の一部分に集中応力やしわが発生するような状態は好ましくなく，膜面全域にわたってできるだけ一様な応力が働くように計画することが，設計に際しての基本的な考え方になる．つまりただ膜を張りさえすればどのような形でも可能なわけではなく，その実現可能な曲面形態にはおのずから制限があるということになる．

このような理由から設計曲面を決定する際，その初期曲面として等張力曲面が採用される場合が多い．これは自己釣合状態，もしくは等分布圧力を受けた状態において，膜面全域の各点でのすべての方向の膜張力が等しくなるような曲面である．石鹸膜は，その表面張力により等張力状態が簡単に実現されるものであり，この等張力曲面の形状確認の一手段として用いられることが多い．

一方，このような与えられた形状の境界内に形成される等張力曲面は，同一の境界形状に張るさまざまな曲面の中で極小の表面積を持つ曲面となる．これは極小曲面，あるいは極小面積曲面と呼ばれるものであり，その曲面形状は等張力曲面と完全に同一となる．

膜構造の形状解析問題は，等張力状態の釣合形状を求めようとするものと，極小曲面形状を求めようとするものの二通りの方法が考えられるが，その性質上，他の力学の問題に比べて特殊な問題となるため，実際の膜構造物に対応させたさまざまな工夫が必要となってくる．文献[9]では等張力曲面を表す偏微分方程式を差分法を用いて解くことによりその曲面形状を求めている．しかし剛な境界を持つ場合にはよいが，周辺がケーブル境界で与えられた場合には対応できない．また偏微分方程式を直接解析する差分法は，曲面形状の局部的変化に伴って生じる大きな勾配に追随することができず，更に解曲面が z 座標に関して多価になった場合には原理的に適応することができない．この多価性に追随することができない点ではGalerkin法のような解析対象領域全体に仮定関数を重ね合わせる方法も同様の難点をもっている．また文献[1]においてはケーブルおよび自重，圧力を考慮した等張力曲面が極小曲面問題に帰着できることを示し，全ポテンシャルエネルギーの停留より導かれた基礎式をケーブル長を付帯条件として求める方法について述べている．併せてケーブル付きの極小曲面を有限要素法を用いて解析している．さらに，鈴木らは文献[2]において，非線形計算過程の安定化を図るため，収斂方向を恣意的に与える方法を用いた解析を行っている．

一方，空間内に与えられた閉曲線を境界とする極小面積曲面を求める問題はPlateau問題と呼ばれ，変分法が威力を発揮する古典的問題として広く知られている．Plateau問題を解析的に解くことはきわめて難しく，多くは直接法を用いた数値解析によらねばならない．文献[3]ではこのPlateau問題を有限要素法を用いて解いており，R. Courantの問題について非常に興味深い結果を示している．

ここで述べる内容は，膜構造の基本設計段階における膜曲面の形状決定問題に関するものであり，等張力曲面が幾何学的に極小曲面となることに着目し，これを積極的に利用して，力学的領域の問題を幾何学的領域の問題に置き換えることで，簡便かつ合理的に膜構造の原型曲面を求めることを目的としている．

2-2．基礎式の定式化

曲面の内包する内容積値を付帯条件とする極小曲面の変分問題は，次の汎関数を極小化する付帯条件のない変分問題と等価である．

$$J[\boldsymbol{r}, \lambda] = S(\boldsymbol{r}) + \lambda\{V_0 - V(\boldsymbol{r})\} \qquad (1)$$

ここに，$\boldsymbol{r}$ は曲面形状を表す位置ベクトル，S，V はそれぞれ曲面の表面積及び曲面の内包する体積であり，V_0 は指定する内容積，λ は，指定内容積値を導入するための Lagrange の未定乗数である．このようにして表された面積汎関数（1）式を極小化することにより，目的の曲面形状を求めることができる．

（1）式で与えられた面積汎関数は幾何学的な諸量で表されたものであるが，実際の力学現象と関連づけることができる．ここでの扱いが，等張力曲面が幾何学的に極小曲面となることに基づいていることは，すでに述べたとおりであるが，この等張力曲面の自然界における例として石鹸膜をあげることができる．これは針金等で閉曲線の境界を作り，石鹸液に浸して引き上げることによって作ることができ，その膜面内に働く表面張力によって等張力曲面が形成される．シャボン玉のような内部に空気を包み込んだものは，厳密には極小曲面ではないが，膜面内に一定の表面張力が働いていることは同じであり，等張力曲面である．この場合，閉曲面内部において空気の出入りはなく，曲面内の内容積は変化しない．すなわち内容積一定という条件付きの極小曲面と考えることができる．このように，石鹸膜で形成される等張力曲面が極小曲面，あるいは条件付き極小曲面となることを含めて，（1）式の面積汎関数の力学的意味を考察することが可能である[5)]．

2-3．数値解析

（1）式で与えられる変分汎関数に基づいて有限要素法によって解析した結果を図1に示す．内容積指定条件や辺長指定条件の幾何学量を指定するという視覚的に認識しやすい条件を課すことによってイメージされた曲面形状を実現するための有用な手段となっていることがよくわかる．さらに，図2には，求められる解曲面が場合によっては実際には存在しない不安定な曲面となることがあることを示す例として，Wiener Frame 問題と呼ばれるものを示している．

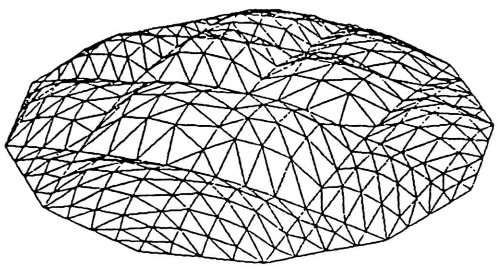
また，いくつかの数値解析を通して，節点の3つの空間座標（x，y，z）をすべて未知量として扱う方法によると，解析条件によっては収束解を得ることが困難な場合があることがわかってきている．このような場合にも収束解を求めることを可能にするために，筆者は変分汎関数に数値的な安定性を制御する項を付加して解析する方法を提案している．これについての詳細は文献[4)]を参照されたい．

3．つり下げ曲面の形態解析

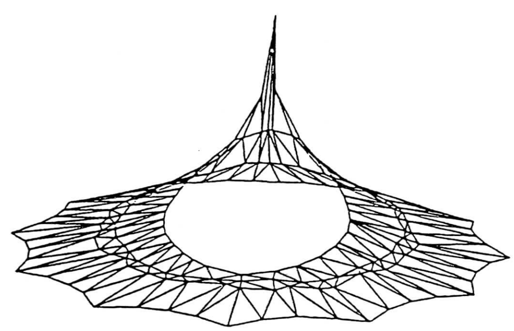
3-1．研究の背景

懸垂線に代表されるようなつり下げ形状は，重力下で純粋な張力場となることはよく知られている．また，その上下を逆転することにより得られる形態は，重力下において面内の圧縮力のみが生じる力学的に合理的な形態であり，視覚的，造形的な観点からも優れた曲面を実現できる．

ところで，シェル構造は主として面内応力のみで外力に抵抗できる力学的に優れた構造形式であり，上記のつり下げ形態を，シェル構造物の原型曲面として利用することはシェルの形態を決定する手段として，非常に有効な方法である．ふるくは，かのスペインの建築家アントニオ・ガウディも，有名な逆さづり実験を通してその作品への応用を試みており，また現在においては，このようにして得られた曲面をもとに，スイスの建築家ハインツ・イスラーは，



空気膜構造での等張力曲面の例



膜構造の等張力曲面の例

図1　等張力曲面の解析結果

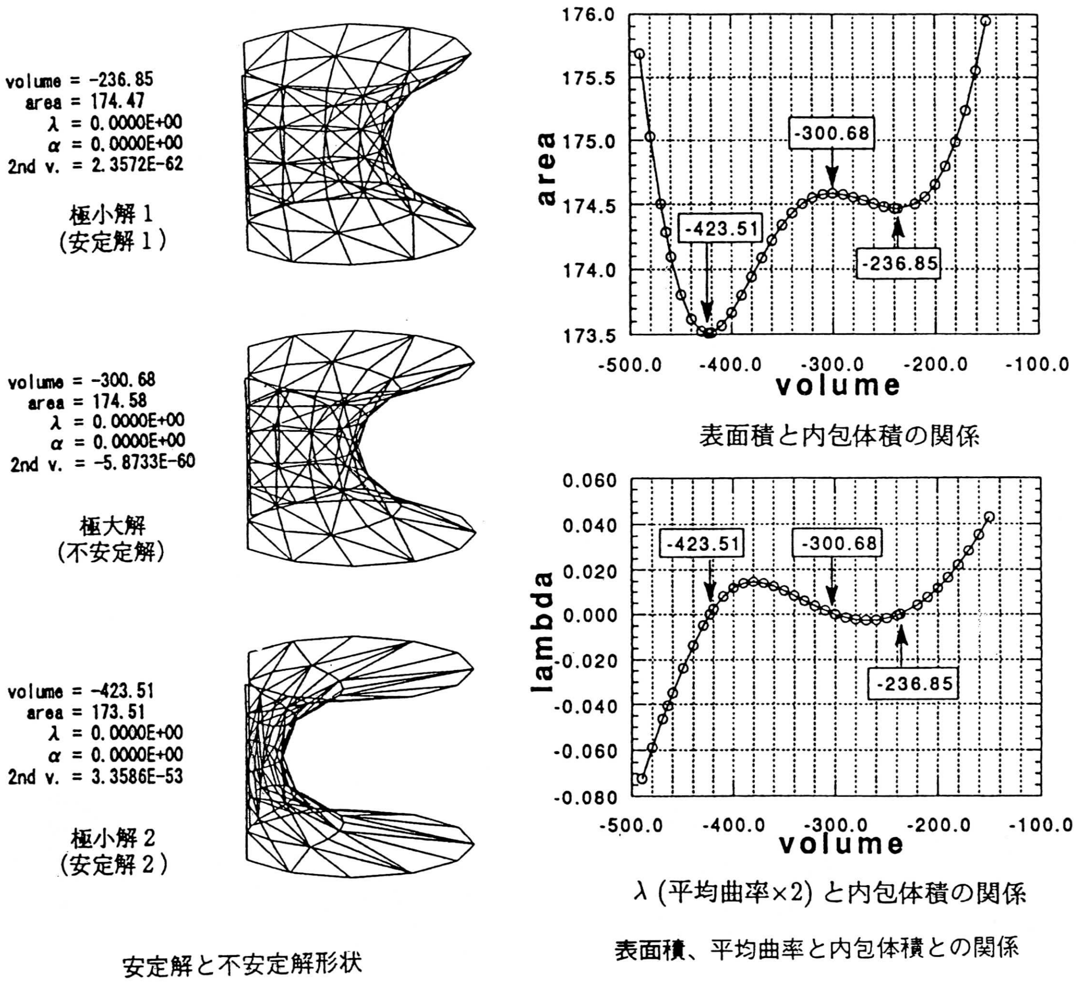


図2　Wiener Frame 問題

1500以上にものぼるシェルの設計を行っている．しかし，つり下げ曲面の理論的な研究はそれほど行われていないのが現状であり，先のイスラーも，設計に際しては実際に模型を製作し，その寸法を図面にフィードバックするという実験的方法をとっている[16]．

ところで，数値解析によってこの曲面を手軽に創りだすことはできないのであろうか．本研究はこのような問題意識に基づくもので，逆転つり下げ曲面を計算機空間内で得ることを目的としており，その特徴は以下のようにまとめられる．

・実験的に得ることが困難な，しわのないつり下げ曲面を数値計算により創りだすこと
・表面積や曲面上の指定点間距離などの限られたパラメータを操作することにより形状を変化させること
・解くべき方程式は釣り合い式のみであること．

具体的には，表面積を指定するという付帯条件のもとに，系の重力ポテンシャルエネルギーを変分汎関数として，これを極小化することにより形状を得る，という考え方に基づいた手法を採用している．ここでは，変分原理により導かれる基礎式の数値解析例を通して，計算上の問題点等について論じ，そのようにして得られる逆転つり下げ曲面の自重下での応力性状について検討する．

3-2. 基礎式の定式化

空間内の2点間からつり下げられた鎖が描く形状である懸垂線は，支持点の位置と鎖の長さが決まれば，その材料によらずいつでも一定の形状を保つ．この懸垂線を見出す問題は付帯条件付き変分問題の代表的な例題としてしばしば取り上げられ，その形状が構成法則に依存しないために幾何学量のみで統一した理論での説明が可能である．すなわち，この懸垂線の問題は系の重力ポテンシャルエネルギーを U，曲線の長さを L_0 とすれば次のように表現することができる．

$$\begin{aligned} &\textit{Variational Functional}: U \rightarrow \mathrm{Min.} \\ &\textit{Subject to}: L = L_0 \end{aligned} \tag{2}$$

鎖は系の全ポテンシャルエネルギーが極小の状態で釣り合い状態になっており，汎関数 J を定義しその第一変分をとることから，極小値を見出す停留条件式が導かれる．この問題は λ を Lagrange の未定乗数とすれば次のように書くことができる．

$$\begin{aligned} &\textit{Functional} : J = U + \lambda(L - L_0) \qquad (3) \\ &\textit{Euler's Equation} : \delta J = 0 \end{aligned}$$

次に表面積 S_0 なる曲面が境界 G 内に張られている場合を考える．Z 軸の正の方向に重力が働く場合，その重さのために曲面はある位置で平衡状態になる．単位体積重量を ρ，曲面の厚さを t とすれば，この場合の全ポテンシャルエネルギーは次のようになる．

$$U = \rho t \iint_G z\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy \qquad (4)$$

今，ρ，t は一定値をとるものとして，表式からその影響を除けば

$$\overline{U} = \iint_G z\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy \qquad (5)$$

となる．このとき，曲面の表面積は一定であるから次式が成立する．

$$\iint_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy = S_0 \qquad (6)$$

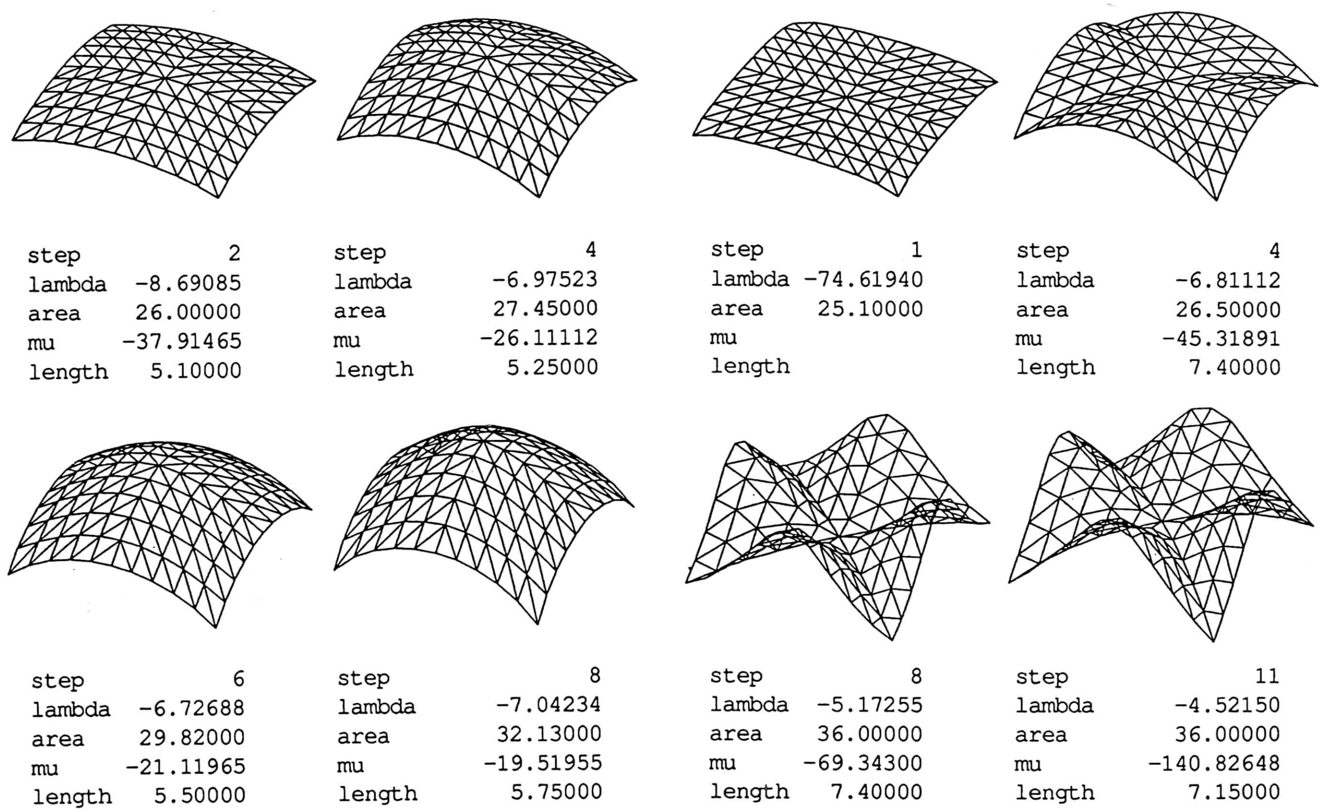
Lagrange の未定乗数 λ を用いて，上式の付帯条件を変分汎関数に取り込めば次式を得る．

$$\begin{aligned} J = &\iint_G z\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy \\ &+ \lambda\left(\iint_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy - S_0\right) \qquad (7) \end{aligned}$$

(7) 式の汎関数の極小値を求めるために第一変分をとることによって停留条件式を得る．

3-3. 数値解析

曲面形状の求解過程において Newton-Raphson 法による収束計算を繰り返して形状解析を行う場合，解形状を安定して次々と見出していくためには，特に第一ステップでの第一近似解の設定が重要となり，ここでは円形境界に対しては球面を，矩形境界に対しては三角関数を用いて非常にライズの小さい曲面を近似し，それを初期形状として採用して解析を進めている．表面積指定の付帯条件のみの形状解析においては，境界平面からやや膨らんだ状態から解



矩形境界に張るつり下げ曲面　　　　　矩形境界に張るケーブルを持つつり下げ曲面

（ステップ数、Lagrangeの未定定数の値（λ）、表面積、Lagrangeの未定定数の値（μ）、汎関数の第二変分値）

図３　つり下げ曲面の解析結果

析を開始して最初の解形状を求めた後は，短い計算時間で次々と形状を見出すことが可能である．一方，これにケーブル長さを指定する付帯条件を加えたモデルについては，初期形状から次のステップに移行する際に，解形状としては不適切と考えられるような，物体力（重力）のはたらく方向と逆方向に膨らんだ曲面が得られる場合がしばしばあり，解形状を見出した後も，表面積とケーブル長さをバランスよく指定することが安定した求解に不可欠である．図3につり下げ曲面の解析結果の一例を示している．

数値解析を通じて，曲面の表面積の指定という付帯条件の下に，系の重力ポテンシャルエネルギーを極小化する解析法の有用性が確かめられ，ケーブル長を指定する付帯条件を導入することにより自由な軸索曲面形状の実現の可能性が示されている．

3-4. 応力解析

本節では数値解析によって得られた形状を対象に応力解析を行い，その応力状態を考察する．あらかじめ三角形要素で近似された曲面をそのまま平面シェル要素として解析し，自重下での膜応力と曲げ応力を求めている．応力解析の比較に用いるモデルはスパン10 m，表面積は120 m^2 である．シェル厚0.1 m，ヤング係数2.1×10^6 t/m^2，単位体積重量2.4 t/m^3，ポアソン比0.17とし，曲げ応力については一般化応力を要素の図心で計算した後，断面係数で割ることによりシェルの最外縁での曲げ応力を求めている．図4に解析結果の一例を示す．曲げ応力図においては，矢印の大きさは膜応力の大きさで規準化したものを表すものとする．

球形シェルとつり下げ曲面によるシェルについては，双方ともライズ／スパン比が大きいために膜応力がシェル全面で卓越している．円形境界に張る形状の応力を比較すると，解析によって得られたつり下げ曲面は，固定，ピンの境界部分で球形シェルより大きな曲げ応力が生じている．これについては次のように考察を行うことができる．

重力下でつり下げられた膜面は純粋な張力場を構成しているが，その状態では当然のことながら面外方向の変形に対しては，まったく剛性を持ちあわせていない．この形状を逆転して構造物の形状として採用した場合，自重下ではたわみを生じて面内の圧縮およびそれに伴う面外方向への曲げを受けることとなる．よって境界部分では固定の場合はもちろんのこと，ピン支持を実現しても境界近傍に曲げを生じることとなる．また，もともと静的な状態で曲げ剛性を持ち合わせないこのような形状は，外乱に対して敏感な反応を示すとも考えることができる．たとえば，円形境界に張るつり下げ形状の場合，境界条件をピンにすることによって多少拘束を緩めると最大曲げ応力は約2/3になることが示されている．この境界条件の変更による効果は球形シェルより大きいことがわかる．

実際問題としては，ここで求められたつり下げ曲面形状を初期形状とし，応力分布の平均値および偏差を目的関数とする感度解析を利用した形態解析を行って曲げ応力を極小化することを目的とした形態解析を実現することが考えられる．その際には，シェル厚をも変数として取り扱うことにより，より合理的な解析を行うことができよう．

4. 結　　語

空間構造の原型曲面について，膜構造の原型曲面として

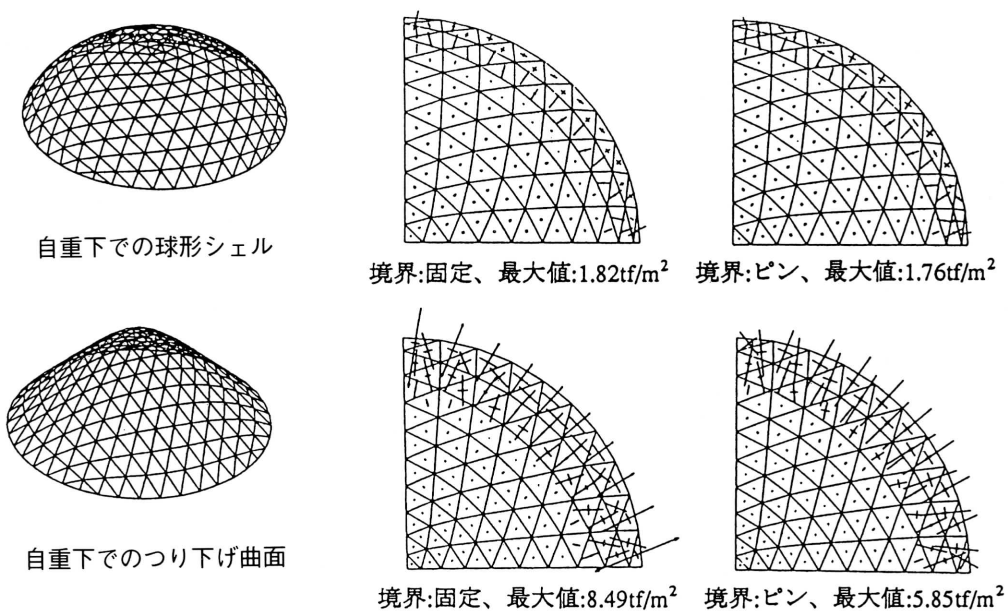


図4　曲面の断面応力（同一の表面積を持つ曲面の比較）

等張力曲面を，シェルやスペースフレームの原型曲面として軸索曲面をそれぞれ対象として，その形状を求めるための解析方法について述べた．有限要素法を用いて解析する際，有限要素解析に特有の数値解析上の問題点がいくつか存在し，そのひとつの解決方法についてもふれたが，すべての問題点がクリアされたわけではなく，今後の課題とすべきものが多数ある．

さらに，形状そのものを求める方法として有限要素法以外に，考えられる方法として，スプライン関数で曲面形状を表現し，これを解析過程に直接用いる方法なども，数値計算を簡明にし，さらに数値的不安定性のない実際問題として有用な方法として考えられる．こうしたことがらの検証も今後の課題として残されている．

（1994年10月７日受理）

参考文献

1) 本間俊雄，鈴木俊男，荒井高志，中山昌尚，坂根伸夫：膜構造における極小曲面問題について，第２回シェルと空間構造に関する日韓コロキウム論文集，1987.

2) 鈴木俊男，半谷裕彦：極小曲面の変数低減による有限要素解析，日本建築学会構造系論文報告集，No. 425，pp. 111-120，1991.

3) M. Hinata, M. Simasaki, T. Kiyono: Numerical Solution of Plateau's Problem by Finite Element Method, Mathematics of Computation, Vol. 28, No. 125, 1974.

4) K. Ishihara, H. Ohmori: Shape Finding Method by using Minimal Surface, Nonlinear Analysis and Design for Shell and Space Structure, Proceedings of The Seiken IASS Symposium, Octorber 19-22, 1993, Tokyo, Japan.

5) 大森博司，萩原伸幸，松井徹哉，松岡理：有限要素法による極小曲面の数値解析，膜構造研究論文集 '88，日本膜構造協会，1988.

6) K. Ishihara, H. Ohmori: Minimal Surface Analysis by using Finite Element Method, Proceedings of the 42th Japan National Congress for Applied Mechanics, 1992.

7) 石原　競，大森博司，八木孝憲：極小曲面の数値解析法に関する研究，膜構造研究論文集，1993年.

8) 大森博司，萩原伸幸，松井徹哉，松岡　理：張力構造に関する基礎的考察—極小曲面の数値解析—，第２回シェルと空間構造に関する日韓コロキウム論文集，1987.

9) 国田二郎，石井一夫：等張力曲面の数値解析，日本建築学会大会学術講演梗概集，1972.

10) 石井一夫：膜構造における等張力曲面形態について，日本建築学会大会学術講演梗概集，1975.

11) 膜構造－その現状と展望－，日本膜構造協会，1986.

12) J. Kunita, H. Nakajima, T. Kunugi: An Interactive Shape Finding Analysis for Cable and Membrane Structures, Shells, Membranes and Space Frames, Proceedings IASS Symposium,Osaka, 1986, Vol. 2.

13) R. Courant: Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surface, Interscience, 1950.

14) 佐藤幸平：面積最小の問題の石鹸膜実験，数学セミナー，日本評論社，第12巻，９，10，11，12月.

15) E. Ramm, "Shape Finding Method of Shells", Bulletin of the International Association for Shell and Spartial Structures, Vol. 33, pp. 89-98, 1992.

16) H. Isler, "Generating Shell Shapes by Physical Experiments", Bulletin of the International Association for Shell and Spartial Structures: IASS 1993 Vol. 34, pp. 53-63, 1993.

17) J. G. Olivia Salinas, "Translation Surfaces for the Design and Constraction of Wide Span", IASS-CSCE International Congress 1992 Vol. 2, pp. 631-643, 1992.

18) 菊竹清訓，松井源吾，"軸力シェルの研究" 日本建築学会構造系論文報告集，第444号，1993.

19) H. Ohmori. et al, "Shape Finding Method by using Hanging Membrane", Proceedings of SEIKEN-IASS Symposium, pp. 245-252, 1993.

20) 大木洋司，大森博司，"吊り下げ曲面の数値解析" 第43回応用力学連合講演会論文集，pp. 31-32，1994.

21) 大木洋司，大森博司，中増裕介，"吊り下げ曲面の形状解析" 日本建築学会学術講演梗概集，1994.

22) Y. Ohki, H. Ohmori, "Shape Finding Analysis of Hanging Membrane", Proceedings of Japan National Congress for Applied Mechanics, Vol. 43, pp. 11-18, 1994.

23) E. Ramm, R. Reitinger, "Force follows form in shell design", Proc.IASS-CSME International Congress on Innovative Large Span Structures, pp. 13-17, Toronto, Canada, 1992.

24) E. Ramm, K. Bletzinger, S. Kimmich, "Strategies in Shape Optimization of Free Form Shells", Springer Verlag, 1991.

25) I. S. Hunter, D. P. Billington, "Computational Form Finding for Concrete Shell Roofs" Proc.ACI Spring Convention, Boston, MA, 1991.

26) E. Ramm, G. Mehlhorn, "On shape finding methods and ultimate load analyses of reinforced concrete shells" Engineering Structure, No. 3, pp. 178-198, 1991.

27) E. Ramm, K. Bletzinger, S. Kimmich, "Trimming of Structures by Shape Optimization. In 2nd International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures", Zell am See, Pineridge Press, Swansea, U. K., 1991.

28) N. V. Banichuk, "Introduction to Optimization of Structures", New York, Berlin: Springer., 1991.

29) J. Kollegger, G. Mehlhorn, "Analysis of a Free-Formed Reinforced Concrete Model Shell", Proc.2nd International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Swansea, UK, Pineridge Press., 1990.

30) K. Svanberg, "The method of moving asymptotes — a new method for structural optimization", Internaltional Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 359-373, 1987.

31) C. Fleury, "Structural optimization—a new dual method using mixed variables" International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 23, pp. 409-428, 1986.

32) J. A. Bennett, M. E. Botkin, "The Optimum Shape-Automated Structural Design" New York, London: Plenum Press., 1986.

33) S. Hildebrandt, A. Tromba, "Mathematics and Optimal Form.", Scientific American Library, 1985.

34) R. B. Haber, J. F. Abel, "Initial Equilibrium Solution Methods for Cable Reinforced Membranes. Part I: Formulations; Part II: Imlementation", Computational Methods for Applied Mechanics in Engineering, Vol.30, pp. 263-284 and 285-306, 1982.

35) L. A. Schmit, "Structural synthesis—its genesis and development", AIAA Journal, Vol. 19, pp. 1249-1263, 1981.