特　集　4
研　究　解　説

連続体の最適形態解析

Optimum Morphology Analyses of Continuum

畔　上　秀　幸*
Hideyuki AZEGAMI

本解説は連続体の形状と形態の最適化問題に対する数値解法を紹介する．取り扱う問題のタイプを位相を固定したまま境界形状だけを最適化する形状最適化問題と位相を含めた形態を最適化する問題の2つに分けて考える．形状最適化問題に対しては著者らによって提案されている力法を紹介する．形態最適化問題に対しては，Bensoe と Kikuchi によって提案された方法を紹介する．これらの解法は平均コンプライアンス最小化問題を例に挙げて説明される．著者らが得ている解析例は，これらの方法の有効性を裏付けている．

1. は　じ　め　に

連続体の形態を最適化する問題は，構造物や機械の設計において頻出する汎用的な問題の一つである．さらに整形外科を始めとした医療や形態学など広くバイオメカニクスに関連した領域においても興味を持たれている問題でもある．

形態の概念を整理すると，物体が満たされた領域の連結関係を問題にする位相の概念と境界の形だけを問題にする形状の概念に分類することができる．本解説では，位相を固定したまま連続体の形状を設計対象にした形状最適化問題と位相を含めた形態を設計対象にした形態最適化問題に分けて，それぞれの問題に対するの解法について考えてみたい．

形状最適化問題の解法に関する簡単な歴史は文献[1]に譲ることにして，ここでは，これまでに知られてきた研究成果を利用して著者らがまとめた力法（traction method）[1)~3)]なるものを紹介する．力法は領域変動に対する感度（形状勾配関数と呼ばれる）を用いた勾配法[4),5)]を応用した方法である．形状勾配関数の導出には Zolésio[6)~9)]がまとめた速度法（speed method）が用いられる．

一方，位相を含めた形態最適化問題の解法に関しては，Bendsøe and Kikuchi[10)]，Suzuki and Kikuchi[11)]が物質を構成するミクロ構造の形状分布を設計関数にした最適化問題を定式化し，その問題に対する解法を示した．そこで示された解法は，最適性規準法を基礎にしていたが，本解説では，感度に相当する関数をミクロ形状勾配関数と名付けて導出し，形状最適化問題の解法との整合性を考慮しながら著者流の一解法として紹介したい．穴の形状とマクロ剛性の関係は均質化法（homogenization method）の理論[12)]を基にして導出されている．

本解説では，簡単のために，線形弾性問題の平均コンプライアンス最小化問題を例に挙げて2つの解法を説明したい．相当応力に注目した汎関数など一般的な汎関数を目的あるいは制約に用いる場合は，変位の状態方程式の他に随伴変位に関する随伴方程式[1)]を解く必要が出てくるが，それ以外は同様の方法で解くことができる．

なお，形状最適化問題の解法は，現在，振動固有値移動問題[13)]や周波数応答問題[14)]，さらに，粘性流れ場の散逸エネルギー最小化問題[15),16)]やポテンシャル流れ場の規定領域における流速二乗誤差最小化問題[17)]に適用されている．一方，形態最適化問題の解法は，これまで，振動固有値移動問題[18)]や周波数応答問題[19)]に適用されている．

2. 線形弾性問題

準備として，線形弾性問題に関する表記法を簡単にまとめておくことにする．

図1のような閉領域 $\bar{\Omega} \subset \mathbf{R}^n$，$n=2, 3$ を占める線形弾性連続体の変位 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n$ in $\bar{\Omega}$ を解く問題を考える．開領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ には物体力 $\boldsymbol{f} \in \mathbf{R}^n$ が作用し，境界 $\partial\Omega = \Gamma$ の一部 Γ_1 では変位が拘束され，残りの境界 Γ_2 には表面力 $\boldsymbol{P} \in \mathbf{R}^n$ が作用している状態を仮定する．$\mathbf{R}$ は実数を表す．

この境界値問題に対する弱形式あるいは変分形式は次のように表すことができる．

*東京大学生産技術研究所　第1部（豊橋技術科学大学　助教授）

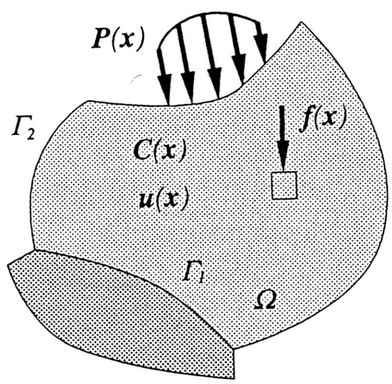

Fig. 1　線形弾性問題

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = l(\boldsymbol{v})\ \boldsymbol{u} \in H_{\Gamma_1} \forall \boldsymbol{v} \in H_{\Gamma_1} \tag{1}$$

ただし，双一次形式 $a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ と一次形式 $l(\boldsymbol{v})$ は次のように定義する．

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_\Omega C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} dx \tag{2}$$

$$l(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega f_i v_i dx + \int_{\Gamma_2} P_i v_i d\Gamma \tag{3}$$

また，関数空間 H_{Γ_1} は境界条件 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$ on Γ_1 を満たす適当に滑らかな関数 $\boldsymbol{v}$ の集合を表す．Hook 剛性 $\boldsymbol{C} \in \mathrm{R}^{n^4}$ には適当な対称性と正定値性を仮定する．なお，本解説ではベクトルとテンソルはボルト体表示と添え字によるテンソル表示を併用し，テンソル表示では Einstein 総和規約と偏微分表示 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用する．

3. 形状最適化問題の解法

本論の一つに入ろう．ここでは，領域の位相を変えないことを前提として，領域の境界が変動することを考える．

3.1 速度法

領域変動を写像を用いた速度法[1),8)]によって表現しよう．

領域 Ω で境界 Γ の線形弾性連続体の領域が変動して，領域 Ω_s で境界 Γ_s になることを仮定する．ただし，変動を拘束する領域あるいは境界は Θ と表すことにする．媒介変数 s は変動履歴を表すことにする．なお，R は実数を表す．

速度法では，領域変動を初期領域 Ω を定義域とした 1 対 1 写像

$$T_s(\boldsymbol{X}) : \Omega \in \boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{x} \in \Omega_s \tag{4}$$

によって表現し，領域の微小変動を次のように与える．

$$T_{s+\Delta s}(\boldsymbol{X}) = T_s(\boldsymbol{X}) + \Delta s \boldsymbol{V} + O(|\Delta s|) \tag{5}$$

ただし，変動を拘束する領域あるいは境界 Θ では $T_s(\boldsymbol{X})$ は恒等写像，速度場 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{o}$ を満たしていることを仮定する．ここで，この拘束条件 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{o}$ を満たす適当な滑らかさを仮定した速度場ベクトル関数 $\boldsymbol{V}$ の集合を C_Θ と表すことにする．

このとき，一般に，分布関数 ϕ_s を被積分関数に対した領域 Ω_s に関する汎関数 J_1 と境界 Γ_s に関する汎関数 J_2 の s に対する導関数 J_1 と J_2 はそれぞれ次式で与えられる．

$$J_1 = \int_{\Omega s} \phi_s dx \tag{6}$$

$$J_1 = \int_{\Omega s} \phi'_s dx + \int_{\Gamma s} \phi_s v_n d\Gamma \tag{7}$$

$$J_2 = \int_{\Gamma s} \phi_s d\Gamma \tag{8}$$

$$J_2 = \int_{\Gamma s} \{\phi'_s + (\phi_{s,i} n_i + \phi_s k) v_n\} d\Gamma \tag{9}$$

ただし，$v_n = n_i V_i$ を表している．$\boldsymbol{n}$ は外向単位法線ベクトルを表す．k は領域が 2 次元の場合曲率，3 次元の場合平均曲率を表す．また，ϕ_s の形状導関数 ϕ'_s は次式で定義される．

$$\phi'_s = \lim_{\Delta_s \to 0} \frac{1}{\Delta s} (\phi_{s+\Delta s} - \phi_s) \tag{10}$$

3.2 平均コンプライアンス最小化問題

領域変動を前節のように表すとき，平均コンプライアンス最小化問題は次のように定式化される．なお，簡単のために，Γ_1 と Γ_2 は領域変動の拘束境界 Θ に含めることにする．

▷ 問題：式 (4) あるいは (5) で表された領域変動に対して，

$$\text{平均コンプライアンス}\quad l(\boldsymbol{u}) \tag{11}$$

が最小となる写像 $T_s(\boldsymbol{X})$ あるいは領域 Ω_s を求めよ．ただし，Ω_s に対する平衡方程式

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = l(\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in H_{\Gamma_1} \tag{12}$$

と上限値 M に対する質量制約式

$$m = \int_{\Omega s} dx \leq M \tag{13}$$

は満たしていなければならない．◁

この問題に Lagrange 乗数法を適用する．平衡方程式 (12) に対する Lagrange 乗数は仮想変分を与える v で代用できることに注意すると，Lagrange 関数 $L(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\Lambda,T_s)$ は次式で与えられる．

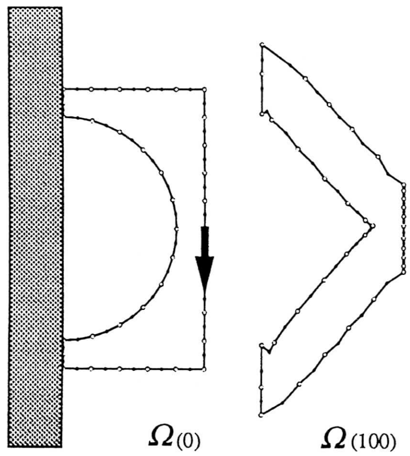

Fig. 2　コート掛け問題の形状最適化解析

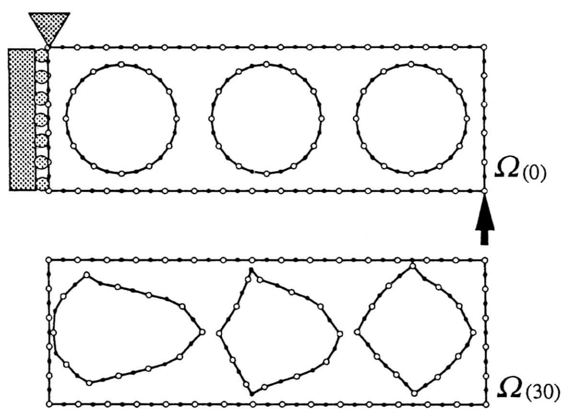

Fig. 3　6つの穴を有する3点曲げ平板の形状最適化解析

$$L = l(\boldsymbol{u}) - a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + l(\boldsymbol{v}) + \Lambda(m - M) \qquad (14)$$

ここで，Λ は質量制約式に対する Lagrange 乗数である．公式 (7) と (9) を用いて，領域変動 $\boldsymbol{V}$ に対する Lagrange 関数 L の導関数 $\dot{L}$ を求めると次式のように表すことができる．

$$\dot{L} = l(\dot{\boldsymbol{u}}) - a(\dot{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) - a(\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{v}}) + l(\dot{\boldsymbol{v}}) + \dot{\Lambda}(m - M) + l_G(\boldsymbol{V}) \qquad (15)$$

ただし，一次形式 $l_G(\boldsymbol{V})$ は次式で与えられる．

$$l_G(\boldsymbol{V}) = \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{V} d\Gamma \qquad (16)$$

$$\boldsymbol{G} = Gn \qquad (17)$$

$$G = -C_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j} + \Lambda \qquad (18)$$

式 (15) から Lagrange 関数の停留条件を求めると，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に対する停留条件は共に平衡方程式 (12) に帰着し，$\Lambda \geq 0$ に対する停留条件は質量制約式 (13) と $\Lambda(m - M)$

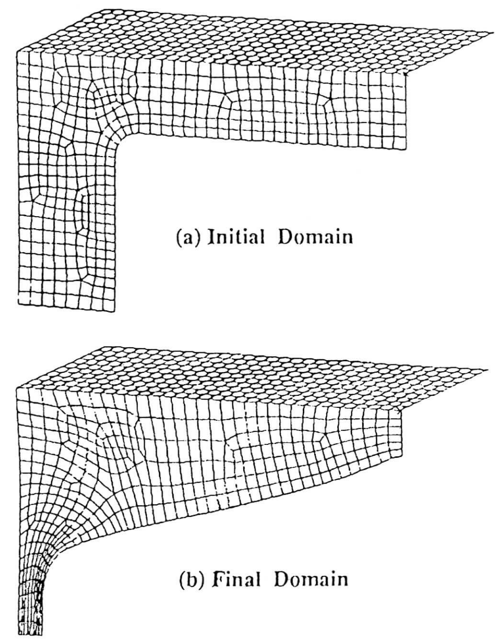

Fig. 4　ブラケットの形状最適化解析

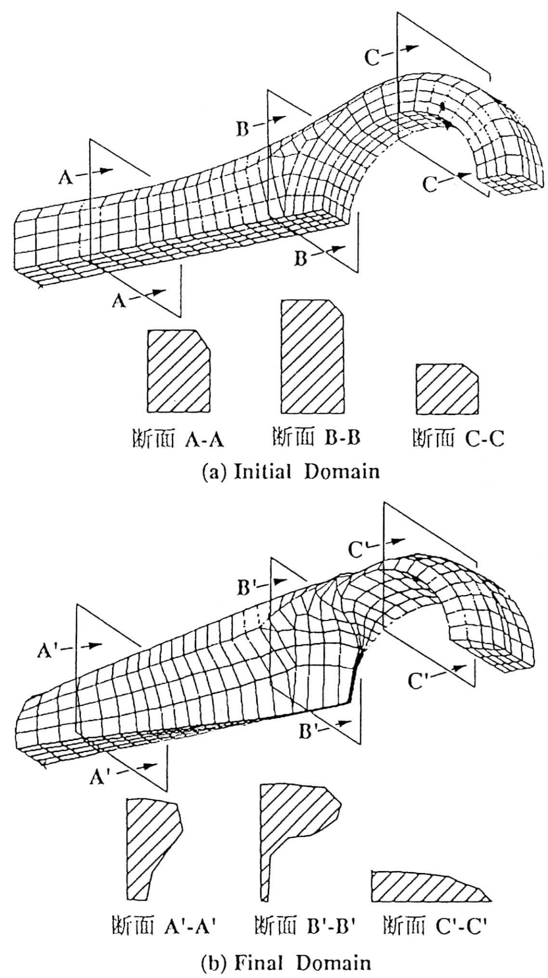

Fig. 5　コンロッドの形状最適化解析

$=0$ に帰着する．したがって，これらが満たされた $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$ と Λ を使用するときは，Lagrange 関数の導関数 $\dot{L}$ は残された $\boldsymbol{V}$ だけ汎関数となり，次式で与えられることになる．

$$L=l_G(\boldsymbol{V}) \tag{19}$$

このとき，与えられた問題は T_s に対する L の最小化問題となる．ここで，ベクトル関数 $\boldsymbol{G}$ は形状勾配関数，スカラー関数 G は形状勾配密度関数と呼ばれる．この問題における G は Λ とひずみエネルギー密度の2倍の差に相当する．なお，$(\cdot)^T$ は転置を表す．

3.3　力法

力法は，形状勾配関数 $\boldsymbol{G}$ が与えられた問題に対して，式(2) で定義されている双一次形式 $a(\cdot\cdot\cdot)$ を利用して，次式によって速度場 $\boldsymbol{V}$ を解く方法として提案されている[1),2)]．

$$a(\boldsymbol{V},\boldsymbol{w})=-l_G(\boldsymbol{w}) \quad \forall \boldsymbol{w}\in C_\Theta \tag{20}$$

この変分形式は，速度場 $\boldsymbol{V}$ を C_Θ における拘束条件を満たす下で，形状勾配関数 $\boldsymbol{G}$ を負の外力として作用させたときの変位場として決定することを意味している．したがって，式 (20) は有限要素法や境界要素法などを用いた通常の線形弾性問題の数値解法を適用することによって，解析することが可能である．

式 (20) で決定された速度場 $\boldsymbol{V}$ は Lagrange 関数 L を減少させることは双一次形式 $a(\cdot\cdot\cdot)$ の正定値性によって次式のように保証される．

$$\dot{L}=l_G(\boldsymbol{V})=-a(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})<0 \tag{21}$$

3.4　数値解析

基本的な2次元平面応力問題と3次元問題に対する結果を紹介する．　図2と図3は2次元平面応力問題の結果である．平衡方程式 (12) と速度方程式 (20) は境界要素法によって解かれた．図2は，左辺を完全拘束，右辺中央に集中せん断力が作用するコート掛け問題の解析結果である．図3は3点曲げを受ける6つの孔の空いたはり状平板問題の右半分についての解析結果である．図中，領域変動を k 回繰り返した後の形状を $\Omega_{(k)}$ と表している．いずれも，単調な収束履歴が得られている．

図4と図5は3次元問題の結果である．平衡方程式 (12) と速度方程式 (20) は汎用 FEM コードによって解かれた．図4は，左辺を完全拘束，右辺前面に45°上方に向かって一様に分布した引張り力が作用するブラケットの解析結果である．図5はコンロッドの解析結果である．これらの問題に対しても，単調な収束履歴が得られている．

4. 形態最適化問題の解法

もう一つの話題に移ろう．ここでは，領域を無限個の穴を持った領域であることを前提とする．この前提のままでは収束の保証がないことは菊池[20)]によって解説されている．

収束保証のある一つの方法は，領域の内部に周期的なミクロ構造を仮定して，そのミクロ構造を有限個のパラメーターによって記述する方法である．Bendsøe and Kikuchi[10)]は図6のような矩形の穴を持つミクロ構造を仮定した．ここでは，物質のミクロ構造と剛性を関係付ける均質化法について簡単にまとめてから，問題の定式化と解法について説明することにする．

4.1　均質化法

図6のような周期的なミクロ構造を持つ線形弾性体を考えよう．このミクロ構造の基本セルは矩形閉領域 $Y=]0,Y_1[\times]0,Y_2[\times\cdots\cdots\times]0,Y_n[$ で与えることにして，このミクロ構造のマクロ構造に対する寸法比を $\varepsilon\ll 1$ で与えることにする．このミクロ構造の仮定によって，物体力や変位は，マクロな変動と同時に，ミクロ構造の周期に対応した急激な周期変動を引き起こすことになる．そこで，これらの分布を与えるための位置ベクトルは，ミクロ構造を含めた物質の存在する領域 Ω^ε に対して，次式のように表すことが可能である．

$$\Omega^\varepsilon \ni \boldsymbol{x}^\varepsilon \rightsquigarrow \boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{y}\in\Omega\times Y \quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\ \ \boldsymbol{y}\in Y \tag{22}$$

ここで，Ω をマクロ領域と呼ぶことにする．

この表記法に基づけば，変位ベクトルは $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ と表すことができる．また，変位変動はマクロ成分とミクロ成分からなることを考えると，ε を基準にした次のような漸近展開が可能である．

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{u}^{[0]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\varepsilon\boldsymbol{u}^{[1]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\varepsilon^2\boldsymbol{u}^{[2]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\cdots\cdots \tag{23}$$

ここで，領域 Ω^ε を対象とした変分形式 (1) に，関数の表示法の変換 $\phi(\boldsymbol{x}^\varepsilon)\rightsquigarrow\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ に伴う置き換え

$$\frac{\partial}{\partial x_i^\varepsilon}\phi(\boldsymbol{x}^\varepsilon)\rightsquigarrow\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_i}\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{24}$$

$$\int_{\Omega^\varepsilon}\phi(\boldsymbol{x}^\varepsilon)\,dx\rightsquigarrow\frac{1}{|Y|}\int_\Omega\int_Y\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,dydx \tag{25}$$

を行い，ε の次数ごとの関係を調べることによって，次の関係を得ることができる[12)]．

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{u}^{[0]}(\boldsymbol{x}) \tag{26}$$

$$\boldsymbol{u}^{[1]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\mathrm{X}^{kl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,u_{k,l}^{[0]}+\tilde{\boldsymbol{u}}^{[1]}(\boldsymbol{x}) \tag{27}$$

ここで，基本セル内の基本変位モード $\mathrm{X}^{kl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は次のような変分形式の解として与えられる．

$$a_Y(\mathrm{X}^{kl}-\boldsymbol{Y}^{kl},\boldsymbol{v})=0 \quad \forall\boldsymbol{v}\in H^1(Y;\mathbf{R}^n) \tag{28}$$

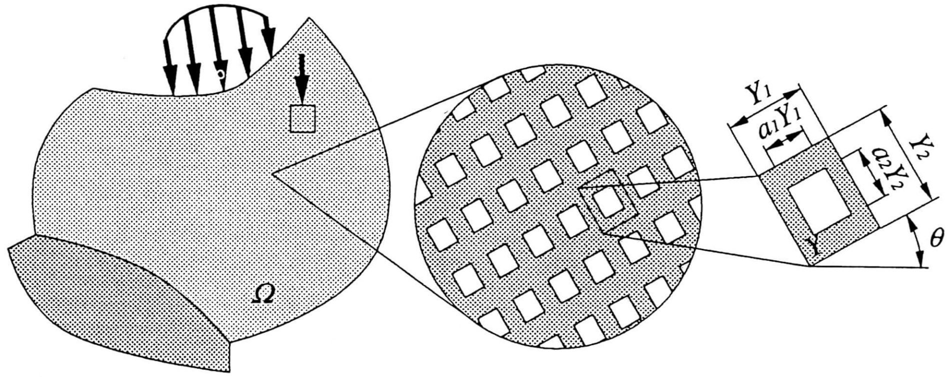

Fig. 6　ミクロな穴を有した線形弾性体

ただし，線形な基本変位場 $\boldsymbol{Y}^{kl}$ は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{Y}^{kl}=y_l\delta_{km}\boldsymbol{e_m} \tag{29}$$

$\boldsymbol{e_m}$ は直交座標系基本ベクトルを表す．δ_{km} は Kronecker デルタである．さらに，式（26）と（27）の関係をマクロ領域における変分形式に代入すると，次のような関係を得る．

$$a(\boldsymbol{u}^{[0]},\boldsymbol{v})=l(\boldsymbol{v})\quad \forall \boldsymbol{v}\in H_{\Gamma_1} \tag{30}$$

ただし，式（30）における Hook 剛性と物体力は，次式で与えられる均質化された Hook 剛性 $\boldsymbol{C}^H(\boldsymbol{x})$ と物体力 $\boldsymbol{f}^H$ によって与えられる．

$$C^H_{ijkl}(\boldsymbol{x})=a_Y(\boldsymbol{Y}^{kl}-\chi^{kl},\boldsymbol{Y}^{ij}-\chi^{ij}) \tag{31}$$

$$f^H_i(\boldsymbol{x})=\frac{1}{|Y|}\int_Y f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,dy \tag{32}$$

また，応力分布 $\sigma_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は次のように与えられる．

$$\begin{aligned}&\sigma_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\\&=C_{ijkl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left(\frac{\partial u_k^{[0]}}{\partial x_l}(\boldsymbol{x})+\frac{\partial u_k^{[1]}}{\partial y_l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)\\&=\left(C_{ijkl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-C_{ijmn}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)\frac{\partial u_k^{[0]}}{\partial x_l}(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{33}$$

ミクロ構造の基本セルがマクロ座標系に対して回転している場合には，ベクトルやテンソルは回転による座標変換式に従って変換される．たとえば，ミクロ座標系で与えられた $\boldsymbol{C}^H(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{f}^H(\boldsymbol{x})$ をマクロ座標系で与えられた $\boldsymbol{C}^G(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{f}^G(\boldsymbol{x})$ に変換する場合，次式が使われる．

$$C^G_{ijkl}=C^H_{mnop}R_{im}R_{jn}R_{ko}R_{lp} \tag{34}$$

$$f^G_i=f^H_jR_{ij} \tag{35}$$

ただし，回転マトリックス $R_{ij}(\boldsymbol{x})$ は，$n=2$ の場合，回転角 $\theta(\boldsymbol{x})$ の関数として，$n=3$ の場合，次のような Euler 角（$\theta(\boldsymbol{x}),\varphi(\boldsymbol{x}),\psi(\boldsymbol{x})$）の関数として次のように与えられる．

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{36}$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi & \cos\theta\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi\\ -\cos\theta\cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi & -\cos\theta\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\cos\psi & \sin\theta\sin\psi\\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{37}$$

なお，本報告では，$n=2$ のときの回転角 $\theta(\boldsymbol{x})$ と $n=3$ のときの Euler 角（$\theta(\boldsymbol{x}),\varphi(\boldsymbol{x}),\psi(\boldsymbol{x})$）をまとめて回転角 $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})\in[0,2\pi[^N$ と表すことにする．

4.2　平均コンプライアンス最小化問題

線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題を考えてみよう．

図６のような矩形の穴が空いた周期的なミクロ構造を仮定して，設計関数をその穴のミクロ構造に対する寸法比 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})=(a_1(x),a_2(x),\cdots\cdots,a_n(x))$ と回転角 $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})$ で与えることにする．この場合，均質化された Hook 剛性と物体力は，$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})$ の関数として，それぞれ $\boldsymbol{C}^G(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}))$，$\boldsymbol{f}^G(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}))$ と表すことができる．また，物質が存在する領域 Ω^ε の大きさは次のように表現する．

$$\int_{\Omega^\varepsilon}dx\rightarrow m=\int_\Omega\rho(\boldsymbol{x})\,dx \tag{38}$$

ただし，$\rho(\boldsymbol{x})$ は次のようなミクロ構造の充塡率である．

$$\rho=1-a_1a_2\cdots\cdots a_n \tag{39}$$

このような定義に基づくと，平均コンプライアンス最小化問題を次のように定式化することができる．

▷ 問題：領域 $\Omega\times Y$ に物体力 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が作用し，境界 Γ_1 に表面力 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ が作用する線形弾性体を考える．このとき，

$$\text{平均コンプライアンス}\quad l(\boldsymbol{u}^{[0]}) \tag{40}$$

が最小となる穴の形状分布関数 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ と回転角分布関数 $\theta(\boldsymbol{x})$ を求めよ．ただし，状態方程式

$$a(\boldsymbol{u}^{[0]},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\theta}) = l(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{a}) \quad \forall \boldsymbol{v}\in H_{\Gamma_1} \tag{41}$$

と質量制約

$$m(\boldsymbol{a}) - M \le 0 \tag{42}$$

は満たしていなければならない．◁

この問題に Lagrange 乗数法を適用する．上の問題に対する Lagrange 関数は次式で与えられる．

$$L(\boldsymbol{u}^{[0]},\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},\boldsymbol{\theta},\Lambda) = l(\boldsymbol{u}^{[0]})(\boldsymbol{a}) - a(\boldsymbol{u}^{[0]},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\theta}) + l(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{a}) + \Lambda(m(\boldsymbol{a}) - M) \tag{43}$$

設計関数 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\theta}$ の変動に対する Lagrange 関数 L の導関数 $\dot{L}$ は次式のように表すことができる．

$$\dot{L} = l(\dot{\boldsymbol{u}}^{[0]}) - a(\dot{\boldsymbol{u}}^{[0]},\boldsymbol{v}) - a(\boldsymbol{u}^{[0]},\dot{\boldsymbol{v}}) + l(\dot{\boldsymbol{v}}) + \dot{\Lambda}(m - M) + l_G(\dot{\boldsymbol{a}},\dot{\boldsymbol{\theta}}) \tag{44}$$

ただし，一次形式 $l_G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\theta})$ は次式で定義する．

$$l_G(\dot{\boldsymbol{a}},\dot{\boldsymbol{\theta}}) = \int_\Omega (G^a_m \dot{a}_m + G^\theta_m \dot{\theta}_m)\,dx \tag{45}$$

ここで，$\boldsymbol{G}^a(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\theta})$，$\boldsymbol{G}^\theta(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a},\theta)$ をミクロ形状勾配関数 (micro shape gradient function) と呼んで，次式で与えることにする．

$$G^a_m = \frac{\partial f^G_i}{\partial \theta_m}(u_i + v_i) + \Lambda\frac{\partial \rho}{\partial a_m} - \frac{\partial C^G_{ijkl}}{\partial a_m} u_{k,l} v_{i,j} \tag{46}$$

$$G^\theta_m = \frac{\partial C^G_{ijkl}}{\partial \theta_m} u_{k,l} v_{i,j} \tag{47}$$

Lagrange 関数 L が停留するための必要条件は，式 (15) から，次のように得ることができる．

$$a(\boldsymbol{u}^{[0]},\dot{\boldsymbol{v}}) = l(\dot{\boldsymbol{v}}) \quad \forall \dot{\boldsymbol{v}}(\dot{\boldsymbol{a}},\dot{\boldsymbol{\theta}}) \in H_{\Gamma_1} \tag{48}$$

$$a(\dot{\boldsymbol{u}}^{[0]},\boldsymbol{v}) = l(\dot{\boldsymbol{u}}^{[0]}) \quad \forall \dot{\boldsymbol{u}}^{[0]}(\dot{\boldsymbol{a}},\dot{\boldsymbol{\theta}}) \in H_{\Gamma_1} \tag{49}$$

$$l^G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\theta}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{a}\in H^1(\Omega;[0,1[^n) \quad \forall \boldsymbol{\theta}\in H^1(\Omega;[0,2\pi[^N) \tag{50}$$

$$\Lambda(m - M) = 0 \tag{51}$$

$$m - M \le 0 \tag{52}$$

これらの関係から，$\dot{\boldsymbol{u}}^{[0]}$ と $\dot{\boldsymbol{v}}$ に対する停留条件は共に状態方程式 (41) に帰着し，$\Lambda \ge 0$ に対する停留条件は質量制約式 (42) と式 (51) に帰着する．したがって，これらが満たされた $\boldsymbol{u}^{[0]} = \boldsymbol{v}$ と Λ を使用するときは，Lagrange 関数の導関数 $\dot{L}$ は次式で与えられることになる．

$$\dot{L} = l_G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\theta}) \tag{53}$$

4.3　数値解法

前節での理論に基づいて，実際の数値解法について考えてみよう．

式 (53) は，設計関数 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\theta}$ に対する Lagrange 関数の導関数 $\dot{L}$ が $\boldsymbol{G}^a(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{G}^\theta(\boldsymbol{x})$ を係数関数とする $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\theta}$ の一次形式で与えられる関係を示している．したがって，設計関数の更新は，基本的に，式 (53) に基づいた勾配法によって行うことができる．この場合，設計関数の変更 $\dot{\boldsymbol{a}}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ は次式に基づいて決定することになる．

$$\dot{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = -\alpha^a(\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}^a(\boldsymbol{x}) \tag{54}$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}) = -\alpha^\theta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}^\theta(\boldsymbol{x}) \tag{55}$$

ただし，$\alpha^a(\boldsymbol{x})$，$\alpha^\theta(\boldsymbol{x})$ の非線形性に依存して，$\dot{\boldsymbol{a}}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ が十分小さな値になるような正の実数を選ぶ必要がある．この場合，$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ は領域制約 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \in [0,1]^n$ を満たしている必要がある．また，Λ については，質量制約式 (42) と $\Lambda(m - M) = 0$ を同時に満たす必要がある．

実際の解析は次のように行う．繰り返し数 $k-1$ 回後の状態 $(\cdot)^{\{k-1\}}$ から k 回後の状態 $(\cdot)^{\{k\}}$ を計算する場合を考えよう．式 (54) の関係に基づいて，刻み $h^a \ll 1$ に対して次式の $\hat{\boldsymbol{a}}^{\{k\}}(\boldsymbol{x})(\Lambda^{\{k\}})$ を計算する．

$$\hat{\boldsymbol{a}}^{\{k\}}_m(\Lambda^{\{k\}}) = \{1 - h^a(D^{\{k\}}_m(\Lambda^{\{k\}}) - 1)\}\, a^{\{k-1\}}_m \qquad m:\text{free index} \tag{56}$$

ただし，$D^{\{k\}}_m(\boldsymbol{x})(\Lambda^{\{k\}})$ は次式で定義する．

$$D^{\{k\}}_m(\Lambda^{\{k\}}) = \frac{2\dfrac{\partial f_i^{G\{k-1\}}}{\partial a_m} u_i^{[0]\{k-1\}} + \Lambda^{\{k\}}\dfrac{\partial \rho^{\{k-1\}}}{\partial a_m}}{\dfrac{\partial C^{G\{k-1\}}_{ijkl}}{\partial a_m} u_{k,l}^{[0]\{k-1\}} u_{i,j}^{[0]\{k-1\}}} \qquad m:\text{free index} \tag{57}$$

$\boldsymbol{a}^{\{k\}}(\boldsymbol{x})(\Lambda^{\{k\}})$ はその定義に基づく次の領域制約を満たす必要がある．

$$0 \le \boldsymbol{a}^{\{k\}}(\Lambda^{\{k\}}) \le 1 \tag{58}$$

また，$\dot{L}(\dot{\boldsymbol{a}},\dot{\boldsymbol{\theta}})$ の非線形性を考慮して，変動比 $h^a_0 \ll 1$ を用いた次のような変動制約を設定することにする．

$$\boldsymbol{a}^{L\{k\}} \le \boldsymbol{a}^{\{k\}}(\Lambda^{\{k\}}) \le \boldsymbol{a}^{U\{k\}} \tag{59}$$

$$\boldsymbol{a}^{L\{k\}} = (1 - h^a_0)\boldsymbol{a}^{\{k-1\}} \tag{60}$$

$$\boldsymbol{a}^{U\{k\}} = (1 + h^a_0)\boldsymbol{a}^{\{k-1\}} \tag{61}$$

この場合，$\boldsymbol{a}^{|k|}(\boldsymbol{x})(\Lambda^{|k|})$ は次式に従って計算される．

$$\boldsymbol{a}^{|k|}(\Lambda^{|k|})=\begin{cases}\hat{\boldsymbol{a}}^{L|k|} \\ \quad (\hat{\boldsymbol{a}}^{|k|}(\Lambda^{|k|})\leq\hat{\boldsymbol{a}}^{L|k|}) \\ \hat{\boldsymbol{a}}^{|k|}(\Lambda^{|k|}) \\ \quad (\hat{\boldsymbol{a}}^{L|k|}<\hat{\boldsymbol{a}}^{|k|}(\Lambda^{|k|})<\hat{\boldsymbol{a}}^{U|k|}) \\ \hat{\boldsymbol{a}}^{U|k|} \\ \quad (\hat{\boldsymbol{a}}^{U|k|}\leq\hat{\boldsymbol{a}}^{|k|}(\Lambda^{|k|}))\end{cases} \tag{62}$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}^{L|k|}=\max[\boldsymbol{a}^{L|k|},0] \tag{63}$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}^{U|k|}=\min[\boldsymbol{a}^{U|k|},1] \tag{64}$$

ただし，この場合，式（57）で使われるLagrange乗数$\Lambda^{|k|}$は質量制約式（42）と$\Lambda(m-M)=0$を満たしている必要がある．そこで，$m^{|k|}$は$\boldsymbol{a}^{|k|}$の関数$m^{|k|}(\boldsymbol{a}^{|k|})$であることを考慮して，さらに$\boldsymbol{a}^{|k|}$は式（56），（57），（62）によって$\Lambda^{|k|}$の関数$\boldsymbol{a}^{|k|}(\Lambda^{|k|})$として与えられることを考慮すると，次式のような刻みh^{Λ}を用いた繰り返し演算によって式（51）と質量制約式（42）を満たす$\Lambda^{|k|}$を得ることができる．

$$\Lambda^{|k|}_{(\mathrm{new})}=\begin{cases}\max[0,\Lambda^{|k|}_{(\mathrm{old})}+\hat{\Lambda}^{|k|}_{(\mathrm{new})}] \\ \quad (\Lambda^{|k|}_{(\mathrm{old})}>0, m_{(\mathrm{old})}-M\neq 0) \\ \hat{\Lambda}^{|k|}_{(\mathrm{new})} \\ \quad (\Lambda^{|k|}_{(\mathrm{old})}=0, m^{(\mathrm{old})}-M>0) \\ 0\ (\Lambda^{|k|}_{(\mathrm{old})}=0, m^{(\mathrm{old})}-M>0)\end{cases} \tag{65}$$

$$\hat{\Lambda}^{|k|}_{(\mathrm{new})}=h^{\Lambda}(m(\boldsymbol{a}^{|k|}(\Lambda^{|k|}_{(\mathrm{old})}))-M) \tag{66}$$

回転角θの更新は式（50）の停留条件に基づいて決定することができる．式（50）から得られる条件$\boldsymbol{G}^{\theta}(\boldsymbol{x})=0$は次式のように書くことができる．

$$\frac{\partial C^{G}_{ijkl}}{\partial\theta_m}u^{[0]}_{k,l}u^{[0]}_{i,j}=0 \tag{67}$$

せん断変形に対して柔らかい直交異方性材質の剛性は，その配向角と主応力方向が一致したときに極値をもつことになる．したがって，式（67）を剛性最大条件の下で満たすθは，$a_1\leq a_2\leq\cdots\cdots\leq a_n$のとき，主応力の絶対値が$|\sigma_1|\geq|\sigma_2|\geq\cdots\cdots\geq|\sigma_n|$となる関係に基づいて得られることになる．

4.4　数値解析例

境界条件が与えられた領域にフレーム構造を構築する問題はコート掛け問題と呼ばれている．図7にその問題設定とそれに対する本手法の解析結果を示す．支配方程式（28）と（41）は有限要素法によって解析した．また，設計関数$\boldsymbol{a}$, θは有限要素内で一定値を仮定した．

解析では選択次数低減積分を用いた4節点アイソパラメトリック要素を用いた．いずれの結果も圧縮あるいは引張りだけを受ける部材で構成されたフレーム構造を成しており，良好な位相形態になっていることが確認された．

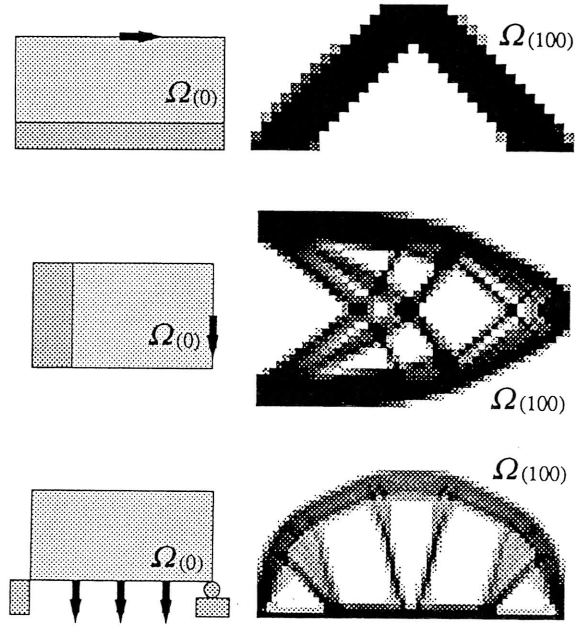

Fig. 7　コート掛け問題の形態最適化解析

5. お　わ　り　に

本報告では，線形弾性連続体の平均コンプライアンス最適化問題を例に挙げて，形状最適化問題に対する数値解法と位相を含めた形態最適化問題に対する数値解法を紹介した．いずれの解法も汎用の有限要素法解析プログラムを用いて実現可能であり，さらに実用的な問題に対しても解析できるものと予想される．

謝　　辞

本解説で紹介された解析結果はすべて著者の研究室に在籍した学生あるいは社会人学生によって解析された結果である．図2と図3は玉置勝敏君，図4と図5は下田昌利君，図7は安保浩孝君による．ここに謝意を表する．

（1994年10月7日受理）

参　考　文　献

1）畔上秀幸：領域最適化問題の一解法，日本機械学会論文集，A編，60巻，574号（1994），165-172.

2）畔上秀幸，呉志強：線形弾性問題における領域最適化解析（力法によるアプローチ），日本機械学会論文集，A編，60巻578号（1994），2312-2318.

3）下田昌利，呉志強，畔上秀幸，桜井俊明：汎用FEMコードを利用した領域最適化問題の数値解析法（力法によるアプローチ），日本機械学会論文集，A編，60巻578

号 (1994), 2418-2425.

4) Cea, J.,: Problems of Shape Optimal Design. *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol. 2 (1981), Sijthoff & Noordhoff, 1005-1048.

5) Cea, J.,: Numerical Methods of Shape Optimal Design. *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol. 2 (1981), Sijthoff & Noordhoff, 1049-1088.

6) Zolésio, J. P.: The Material Derivative (or Speed) Method for Shape *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol. 2, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn (1981), 1089-1151.

7) Zolésio, J. P.: Domain Variational Formulation for Free Boundary Problems, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol. 2, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn (1981), 1152-1194.

8) Sokolowski, J. and Zolésio, J. P., *Introduction to Shape Optimization*, Springer-Verlag (1991).

9) Haug, E. J., Choi, K. K. and Komkov, V.: *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press (1986).

10) Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N.,: Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method, *Comput. Meths Appl. Mech. Engrg*, 71 (1988), pp. 197-224.

11) Suzuki, K. and Kikuchi, N.,: A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization, *Comput. Meths Appl. Mech. Engrg*, 93 (1991), pp. 291-318.

12) Guedes, J. M. and Kikuchi, N.,: Preprocessing for Materials Based on the Homogenization Method with Adaptive Finite Element Methods, *Comput. Meths Appl. Mech. Engrg*, 83 (1990), pp. 143-198.

13) 呉志強，畔上秀幸：固有振動問題における領域最適化解析（力法によるアプローチ），日本機械学会論文集，（投稿中 No. 93-0966）.

14) 呉志強，畔上秀幸：周波数応答問題における領域最適化解析（力法によるアプローチ），日本機械学会論文集，（投稿中 No. 93-1213）.

15) 片峯英次，畔上秀幸：粘性流れ場の領域最適化問題の解法（力法によるアプローチ），日本機械学会論文集，（掲載予定 No. 94-0443）.

16) 片峯英次，畔上秀幸：粘性流れ場の領域最適化解析（対流項を含む場合），日本機械学会論文集，（投稿中 No. 94-1169）.

17) 片峯英次，畔上秀幸：ポテンシャル流れ場の領域最適化解析，日本機械学会論文集，（投稿中 No. 94-0938）.

18) Diaz, A. R and Kikuchi, N.: Solutions to Shape and Topology Eignvalue Optimization Problems Using a Homogenization Method, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 35 (1992), 1487-1502.

19) Ma, Z. D. , Kikuchi, N. and Hagiwara, I.: Structural Topology and Shape Optimization for a Frequency Response Problem, *Computational Mechanics*, Vol. 13 (1993), 157-174.

20) 菊池昇：均質化法による最適設計理論，応用数理，第3巻 第1号（1993），2-26.