

## 変位指定の構造形態解析

Analytical Method of Structural Shape under the Prescribed Displacement

原 田 和 明\*・半 谷 裕 彦\*\*

Kazuaki HARADA and Yasuhiko HANGAI

## 1. は じ め に

本研究では、与えられた荷重下において、指定した構造物の機能を満足する構造形態を決定する構造形態解析法を提案する。形態解析に関する既往の研究としては、梅谷の成長変形法<sup>1)</sup>、尾田によるパターン変換法<sup>2)</sup>、中桐等の感度解析法<sup>3)</sup>、中村等の形態創成法に関する研究<sup>4)</sup>、等がある。

形態解析を行う場合には、目標とする量、あるいは形態が必要である。既往の研究の多くは、最小重量や最大剛性、あるいは、一様応力や一様ひずみエネルギー密度、等を目標としている。本研究では、あらかじめ指定した形態、つまり、変位モードまたは変位を目標とする形態解析法を述べる。ここで扱う変位モード指定または変位指定の形態解析では、「与えられた荷重下において、構造あるいは構造の一部が変形前、後において指定された形状と同一となるように構造形態を決定すること」を目標とする。このような変形はホモログス変形と呼ばれる。ホモログス変形を満足する形態設計は、ホモロジー設計と名付けられ、最近研究が開始されている<sup>5), 6)</sup>。著者等による既往の研究<sup>7)</sup>では、変位モード指定の形態解析を扱ってきたが、本論文ではその手法を拡張し、変位指定の形態解析法を提案する。

## 2. 基 礎 方 程 式

構造形態を表現する座標パラメータを  $x$  とし、3 個のグループに分類する (図 1)。

$x_h$  : 変位指定を受ける座標パラメータ (自由度  $h$ )

$x_f$  : 形態変化を受ける座標パラメータで未知量  
(自由度  $f$ )

$x_c$  : 固定 (境界) 座標パラメータ

\*東京電力(株)電力技術研究所

\*\*東京大学生産技術研究所 第 5 部

有限要素法、差分法、ガラーキン法等により荷重・変位関係を求め、境界処理を行うと次式に帰着できる。

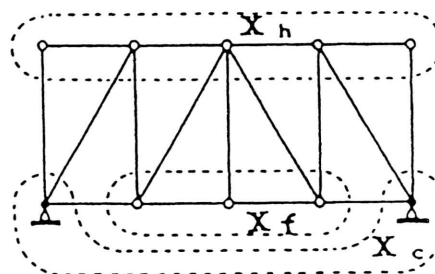
$$f = K(x_f) d \quad (1)$$

ここに、 $f$  :  $n$  次外力ベクトル、 $K$  :  $(n, n)$  型剛性マトリクス、 $d$  :  $n$  次変位ベクトル、 $n$  : 全自由度数 ( $h+f$ ) である。荷重の作用による構造物の変形後の形態を、式(2)で指定する場合を考える。

$$Ad = g \quad (2)$$

ここに、 $A$  :  $(m, n)$  型制約条件マトリクス、 $g$  : 制約条件ベクトル、 $m$  : 制約条件数 ( $m < n$ ) とする。この場合、変位指定の形態解析問題は、式(2)を制約条件とする式(1)の解析問題に帰着できる。

制約条件を全て独立であるとするとき  $\text{rank}(A) = m$  となる。 $A$  のランクと行数が一致しているため、 $A$  はフルランクであり、 $A$  の一般逆行列を  $A^+$  とすると次式が成立する<sup>8)</sup>。



$x_h$  : 変位指定を受ける座標パラメータ

$x_f$  : 形態変化を受ける座標パラメータ

$x_c$  : 固定 (境界) 座標パラメータ

図 1 座標パラメータ分類

$$A^+ = A^T (AA^T)^{-1} \quad (3)$$

$$AA^+ = I_m \quad (4)$$

ただし,  $A^+A = I_n$  は一般には成立しない.

式(2)を制約条件とする式(1)の解析問題は, 別の表現をすると, 変位に関する制約条件付きの全ポテンシャルエネルギー関数  $\Pi$  の最小化問題となる. ここで,

$$\Pi = \frac{1}{2} d^T K d - f^T d \quad (5)$$

式(2)を制約条件とする式(5)の最小化問題の定式化に, Lagrange 乗数法を適用する. Lagrange 乗数ベクトル  $\lambda$  を導入し,  $d$  と  $\lambda$  を未知量とする制約条件無しの最小化問題に変換する. その場合の全ポテンシャルエネルギー関数として次式を採用する.

$$\Pi_k = \frac{1}{2} d^T K d - f^T d + \lambda^T (Ad - g) \quad (6)$$

$d$  と  $\lambda$  の各成分で偏微分し, 零と置くことにより,  $d$  と  $\lambda$  を未知量とする次の連立方程式が得られる. つまり,

$$Kd - f + A^T \lambda = 0 \quad (7)$$

$$Ad = g \quad (8)$$

$r$  を式(9)とすると, 式(7)は式(10)となる.

$$r = A^T \lambda \quad (9)$$

$$Kd + r = f \quad (10)$$

ここで,  $K$  は  $x_f$  の関数であるから, 式(10)を次式のように書き換えると  $r$  も  $x_f$  の関数となる. つまり,

$$r(x_f) = f - K(x_f) d \quad (11)$$

解となる形態を  $\bar{x}_f$  で表すと, 式(7), (8)において,  $K(x_f) d = f$ ,  $Ad = g$  の両式を満足することから,

$$r(\bar{x}_f) = 0 \quad (12)$$

以上より, 変位指定の形態解析は以下のように定式化される.

「 $x_f$  を形態変化を示す未知ベクトルとする. このとき,

$$K(x_f) d + r(x_f) = f \quad (13)$$

$$Ad = g \quad (14)$$

において,  $r(\bar{x}_f) = 0$  となる  $\bar{x}_f$  を求めよ.

式(10)より  $r$  は制約条件, 式(2)を満足するために, 節点に作用する仮定の荷重と考えられる. つまり, 解形態以外では  $r \neq 0$  となる.

### 3. 変位指定の構造形態解析の定式化

式(8)より制約条件ベクトル  $g$  の消去を行う. そのため  $d$  を次式で  $u$  に変換する.

$$d = u + A^+ g \quad (15)$$

上式を式(10), (8)に代入し, 式(4)を用いると,

$$Ku + r = h \quad (16)$$

$$Au = 0 \quad (17)$$

ここに,

$$h = f - KA^+ g \quad (18)$$

式(9), (17)より

$$u^T r = u^T (A^T \lambda) = (Au)^T \lambda = 0 \quad (19)$$

上式は,  $u$  と  $r$  が直交していることを示す. そこで,  $L$  を  $n$  次元の部分空間,  $L^\perp$  を  $n$  次元の  $L$  に対する直交補空間とすると式(19)より,  $u$  と  $r$  は直交しているから,

$$u \in L, \quad r \in L^\perp \quad (22)$$

ここで,  $P_L$ :  $n$  次元空間から  $L$  上への正射影マトリクス,  $P_{L^\perp}$ :  $n$  次元空間から  $L^\perp$  上への正射影マトリクス,  $a$ :  $n$  次元空間のベクトルとすると次式が成立する.

$$u = P_L a \quad (21)$$

$$r = P_{L^\perp} a \quad (22)$$

また, 式(21), (22)を式(16)に代入すると,

$$[KP_L + P_{L^\perp}] a = h \quad (23)$$

上式の係数マトリクスは  $n$  次正方マトリクスであり, 非特異の場合には,

$$a = [KP_L + P_{L^\perp}]^{-1} h \quad (24)$$

となる. 式(24)を式(21), (22)に代入すると,

$$u = P_L [KP_L + P_{L^\perp}]^{-1} h \quad (25)$$

$$r = P_{L^\perp} [KP_L + P_{L^\perp}]^{-1} h \quad (26)$$

式(15), (26)より,

$$d = P_L [KP_L + P_{L^\perp}]^{-1} (f - KA^+ g) + A^+ g \quad (27)$$

$$r = P_{L^\perp} [KP_L + P_{L^\perp}]^{-1} (f - KA^+ g) \quad (28)$$

となる. 式(25), (26)で,

$$K_{(L)}^{-1} = P_L [KP_L + P_{L^\perp}]^{-1} \quad (29)$$

## 研 究 速 報

$$K_{(L\perp)}^{(-1)} = P_{L\perp} [K P_L + P_{L\perp}]^{-1} \quad (30)$$

と置くと,  $K_{(L\perp)}^{(-1)}$  は  $K$  の Bott・Duffin 逆行列と呼ばれる.

以上より, 正射影マトリクス  $P_L$ ,  $P_{L\perp}$  が得られれば, Bott・Duffin 逆行列を用いることにより式(27), (28)は容易に解くことができる. 正射影マトリクス  $P_L$ ,  $P_{L\perp}$  の自動化作成法については, 文献<sup>8)</sup>を参照していただきたい.

式(12)より, 解形態  $\bar{x}_f$  に対して

$$r(\bar{x}_f) = P_{L\perp} [K(\bar{x}_f) P_L + P_{L\perp}]^{-1} h = 0 \quad (31)$$

となる.

## 4. 数 値 解 析

本論文で提案した解析法の有効性を確認するために, 図2に示す解析モデル(平面トラス)の数値解析を行う. トラス部材はすべて同一であり, 断面積  $A=1.0 \text{ cm}^2$ , ヤング率  $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  とする. 上弦節点に同一の鉛直方向荷重 ( $P=1.0 \text{ kg}$ ) を作用させる. このときの節点1, 2, 3の変位を図3に示す.

## 4.1. 数値解析1 (変位モード指定の構造形態解析)

数値解析1では, 変形後の変位モードを指定する. 節点1, 2, 3の鉛直方向変位を,

$$DY1 : DY2 : DY3 = 1.0 : 1.2 : 1.1 \quad (32)$$

として設定する. 節点4のX座標値  $X(4)$  とY座標値  $Y(4)$  を未知座標パラメータとし, 式(32)を満足するトラス構造形態を求める. 式(2)の制約条件を具体的に示すと,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{d\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\{d\} = \{DX1 \text{ } DY1 \text{ } DX2 \text{ } DY2 \text{ } DX3 \text{ } DY3 \text{ } DX4 \text{ } DY4\}^T \quad (34)$$

となり, 変位モードのみを指定する場合は式(2)の  $Ad=g$  において,  $g=0$  となる. なお, 変位モード指定を  $DY1 : DY2 : DY3 = 1.0 : 1.0 : 1.0$  (つまり, 上弦節点に変形後も水平を保つ) とした場合の解形態, および解を求めるための収束計算法の比較については, 文献<sup>7)</sup>を参照していただきたい. 本研究で提案した構造形態解析法では, 式(31)における  $|r|$  が零となる座標パラメータ  $(X(4), Y(4))$  が, 指定した変位モードを満足する構造形態である.  $|r|$  と  $X(4)$ ,  $Y(4)$  の関係を図4 (鳥瞰図), 図5 (等高線図) に示す. 図5においてA点,  $(X(4)=-38.9 \text{ cm}, Y(4)=76.9 \text{ cm})$ , B点  $(X(4)=-53.1 \text{ cm}, Y(4)=36.8 \text{ cm})$  の2点で  $|r|=0$  となる. つまり, 指定した変位モードを

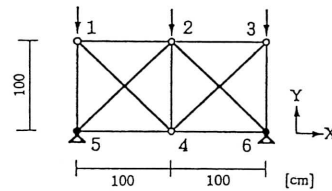


図2 解析モデル

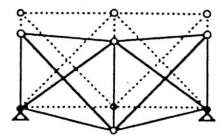
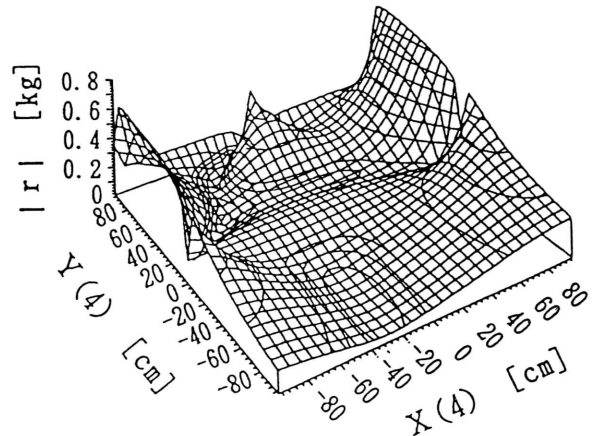
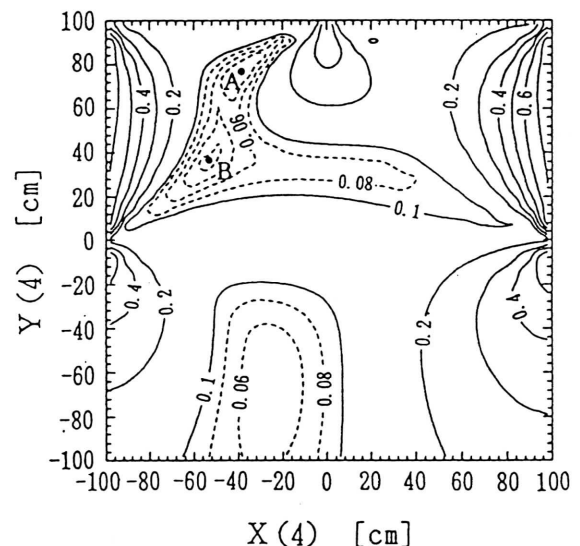
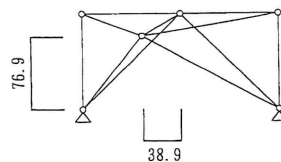
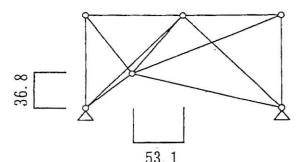


図3 変位図

図4  $|r| - Y(4), X(4)$  関係 (鳥瞰図)図5  $|r| - Y(4), X(4)$  関係 (等高線図)

(a) 解形態1 (A点)



(b) 解形態2 (B点)

図6 解形態

満足する解形態である。これらの構造形態を図 6 (a), (b) に示す。なお、この解析モデルでは解の唯一性は成立しておらず、2 個の解が存在している。

#### 4.2. 数値解析 2 (変位指定の構造形態解析)

次に制約条件として、荷重の作用による部材 1 および部材 2 の水平方向からの回転角を指定する。この指定した変位 (回転角) を満足するトラスの構造形態を、節点 4 の Y 座標値、つまり  $Y(4)$  を未知座標パラメータとして求める。制約条件を図 7 を参照して具体的に示すと、部材 1, 2 の回転角  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  と節点変位の関係は次式となる。

$$\tan \theta_1 = \frac{DY1 - DY2}{l + DX2 - DX1} = \alpha_1 \quad (35)$$

$$\tan \theta_2 = \frac{DY2 - DY3}{l + DX3 - DX2} = \alpha_2 \quad (36)$$

上式を式(2)の  $Ad=g$  の形で表現すると、次式となる。

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & -\alpha_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 1 & -\alpha_2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{d\} \\ = \begin{bmatrix} \alpha_1 l \\ \alpha_2 l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

変位を指定する場合は、式(2)の  $Ad=g$  において  $g \neq 0$  となる。ここで変位指定として、

$$\alpha_1 = \tan \theta_1 = -\tan \theta_2 = 0.5 \times 10^{-5} \quad (38)$$

を条件として設定する。

式(31)における  $|r|$  と  $Y(4)$  の関係を図 8 に示す。 $Y(4) = 38.4 \text{ cm}$  で  $|r| = 0$  となり、指定した変位を満足する構造形態が得られる。このときの解形態を図 9 に示す。

#### 5. ま と め

本論文では、与えられた荷重の作用下において、指定した変位モードまたは変位を満足する構造形態解析法を述べた。形態解析法は構造解析における逆問題のひとつとして、高度な非線形問題に属している。そのため、解の存在条件や解の唯一性をはじめ、解析法自身においても未解決の課題は多い。本研究では、指定した変位モード、または変位を満足する構造解析法のひとつの定式化を提案し、具体例に適用した。

(1994年10月14日受理)

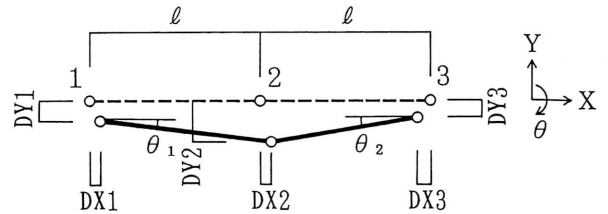


図 7 変位指定を受ける節点の変位

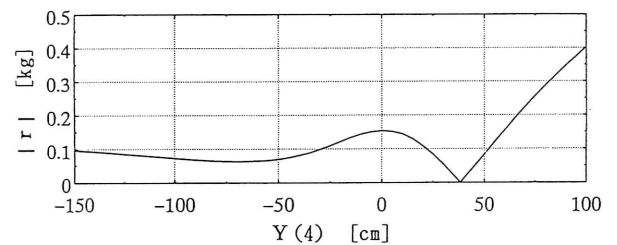


図 8  $|r|$  -  $Y(4)$  関係

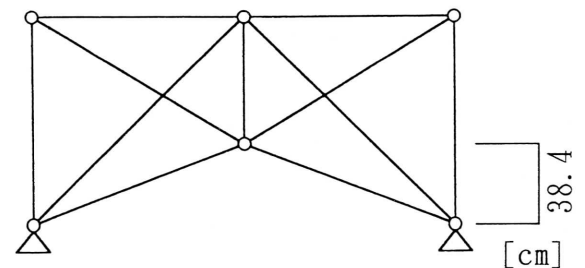


図 9 解形態

#### 参 考 文 献

- 1) 梅谷陽二：骨の形態と成長変形法，日本機械学会誌，第79巻，693号，1976，pp. 749-754.
- 2) 尾田十八：有限要素法による強度的最適形状の決定法，日本機械学会誌，第79巻，691号，1976，pp. 4-12.
- 3) 中桐滋，野口裕久，谷周一：応力に基づく構造形状の有限要素法シンセシス，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第12巻，1988，pp. 97-102.
- 4) 中村恒善，大崎純：曲率半径をサブパラメータとした振動数領域に対する最適円筒状立体トラス生成法，構造工学論文集，35B，pp. 103-110，1989.
- 5) 半谷裕彦，関富玲：ホモログ変形を制約条件とする立体トラス構造の形態解析，日本建築学会論文報告集，第405号，pp. 97-102，1989.
- 6) 吉川暢宏，中桐滋：有限要素法によるフレーム構造のホモロジー設計，第42回応用力学連合会講演予稿集，pp. 93-94，1993.
- 7) 半谷裕彦，原田和明：変位モード指定の構造形態解析法，日本建築学会論文報告集，第453号，pp. 95-100，1993.
- 8) 半谷裕彦，川口健一：形態解析—一般逆行列とその応用—，培風館，1991.