

研 究 速 報

特 集 7
研 究 速 報

最悪誤差を低減するロバスト・ホモロジー設計

Robust Homology Design
for Reducing Error Index in Worst Case

吉 川 暢 宏*

Nobuhiro YOSHIKAWA

1. は じ め に

ロバスト制御とは“制御対象の特性が多少変化しても性能が著しく劣化しない頑健な制御”を意味する¹⁾。本研究でもロバストという用語を類似の意味で用い、ロバストな設計とは“荷重あるいは構造パラメータが不確定に変動しても機能が著しく劣化しない構造を設計すること”を指す。

既往の最適構造設計は、構造応答に関する制約条件の下での最小重量設計を求めることが主目的であり²⁾、設計時に構造力学の立場から考慮すべき主たる機能は“破損しないこと”であった。近年、宇宙構造等の先進構造が現実味を帯びるに至り、制御系を積極的に活用して高性能を実現することが図られている。その場合には、構造系と制御系の相関を考慮した最適設計により、厳しい要求を満足する高機能構造が得られる³⁾。それらの要求は、位置、形状、姿勢等の幾何学的性状の制御精度に対するものが多い^{4), 5)}。

ホモロジー設計は、幾何学的性状を制御し高機能を実現しようとする場合の最適構造設計の一手法であり、“変形前、中、後において、構造の一部における幾何学的性状を所定のものとする”ホモロガス変形を利用する設計方法である^{6)~10)}。その最初の実構造への適用は大口径電波望遠鏡の設計においてであり、反射面を放物面に保持することにより、解像性能の向上が図られた^{6), 7)}。

これまで、数値計算によるホモロジー設計方法がいくつか提案されているが、いずれも確定構造に確定荷重が加わることを前提としている^{8)~10)}。本研究では、モデルの誤差を許容し、荷重の不確定変動等にさらされてもホモロガス変形が大きく乱されないロバスト・ホモロジー設計の定式を提示する。定式にあたっては、不確定変数を凸包内に限り最悪状態を探索する凸包モデル^{11), 12)}を用いる。その最悪状態での誤差指標を低減することをもってロバスト性が

向上したものとみなす。構造は有限要素によりモデル化され、荷重のみが不確定に変動するものとして定式化を行う。格子フレームにおいて直線ホモロガス変形を実現する数値計算例により手法の妥当性を示す。

2. 凸包モデルによる最悪状態の探索

凸包モデルでは、構造パラメータあるいは荷重の不確定性を表す N 個の不確定変数 ε_n を導入し、それらの存在範囲を式(1)で表される凸包内に限る。

$$q^2 \{\varepsilon\}^T [\Omega] \{\varepsilon\} \leq 1 \quad (1)$$

$\{\varepsilon\}$ は ε_n を並べた列ベクトルである。先験情報より定数 q とマトリックス $[\Omega]$ が決定され、凸包の大きさと形状が定められる。不確定変数がある値をとる頻度は凸包内(境界を含む)ではすべて等しいものとし、不確定変数の確率密度は考えない¹²⁾。凸包内の不確定変数で表される事象を考え得る事象とし最悪状態を探索する¹¹⁾。

本研究では誤差の自乗和(分散)を念頭に置き、注目する誤差指標が式(2)の形で書けるものとする。

$$\Delta^2 = \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} \quad (2)$$

ただし $[D]$ は正定値である。式(1)の凸包内(境界を含む)の点で、この誤差指標を最大(最悪状態)とするのは、式(1)の凸包が式(2)の楕円に内接する場合の接点である。不確定変数が2個の場合を模式的に描くと図1となる。斜線で表された式(1)の凸包と式(2)の楕円の接点により最悪状態が与えられる。

数理的には、この最悪状態は式(3)の汎関数の停留条件である式(4)と(5)を満足する点として探索される。

$$\Pi = \Delta^2 - \mu (q^2 \{\varepsilon\}^T [\Omega] \{\varepsilon\} - 1) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon} = 2([D] - \mu q^2 [\Omega]) \{\varepsilon\} = \{0\} \quad (4)$$

*東京大学生産技術研究所 第1部

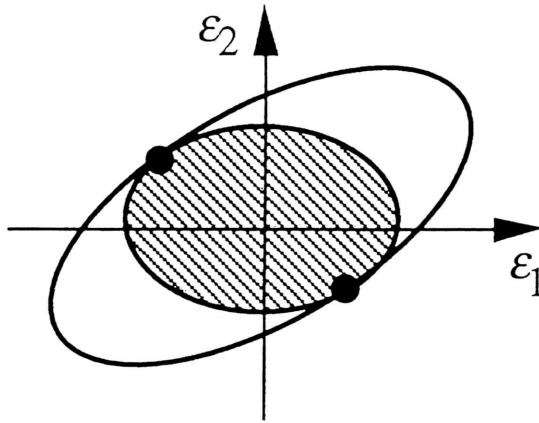


図1 不確定変数モデルの凸包モデル

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mu} = q^2 \{\varepsilon\}^T [\Omega] \{\varepsilon\} - 1 = 0 \quad (5)$$

式(4)は、 μq^2 を固有値とし $\{\varepsilon\}$ を固有ベクトルとする固有値問題とみなすことができる。式(5)はその場合の規準化条件である。 $\mu q^2 = \lambda$ と改めて書き直すと、停留条件を満足する場合の誤差指標は式(6)で表される。

$$\Delta^2 = \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} = \mu q^2 \{\varepsilon\}^T [\Omega] \{\varepsilon\} = \mu = \lambda / q^2 \quad (6)$$

つまり、式(4)の固有値問題を解いて得られる最大固有値により最大の誤差指標が与えられ、対応する固有ベクトルが最悪状態を表す不確定変数である。

3. ホモロジー設計の定式

有限要素に離散化された静的荷重を受ける線形弾性構造の、境界条件処理後の剛性方程式は式(7)となる。

$$[K] \{u\} = \{f\} \quad (7)$$

$[K]$ は $L \times L$ の剛性マトリックス、 $\{u\}$ は節点変位ベクトル、 $\{f\}$ は節点力ベクトルである。ホモロガス変形の制約は節点変位間関係として与えられる。制約が課される J 個の節点ごとに関係式を導出し、まとめて式(8)と書く。

$$\{H(u)\} = \{0\} \quad (8)$$

$\{H(u)\}$ は成分 J のベクトル関数であり、各成分の形式はホモロガス変形の制約の与え方に依存して決定される。また、同一のホモロガス変形の制約が同一の $\{H(u)\}$ によって表されるとは限らない。初期の試設計に関する剛性方程式を解いて得られる節点変位が式(8)を満足していれば、その構造が目標とするホモロジー設計である。しかし、そのような場合はきわめてまれである。そこで、 M 個の構

造パラメータ P_m で構造変更を行うものとし、設計変数 α_m を式(9)の形で割り付ける。

$$P_m = \bar{P}_m (1 + \alpha_m) \quad (9)$$

以下、上付き棒記号は試設計の値であることを示す。肩符 I と添字 m で設計変数 α_m に関する一階感度を表すものとする、構造変更による節点変位の変化は式(10)と一次近似できる。

$$\{u\} = \{\bar{u}\} + \sum_{m=1}^M \{u_m^I\} \alpha_m \quad (10)$$

u_m^I は構造変更後も式(7)の剛性方程式が成立するように、式(11)に従い算出される。

$$\{u_m^I\} = -[\bar{K}]^{-1} [K_m^I] \{\bar{u}\} \quad (11)$$

式(10)で一次近似された節点変位のうち、ホモロガス変形の制約に関わるものを式(8)の左辺に代入し整理すると、構造決定方程式が式(12)と書ける。

$$[A] \{\alpha\} = \{b\} \quad (12)$$

$[A]$ は $J \times M$ の長方マトリックス、 $\{\alpha\}$ は設計変数ベクトル、 $\{b\}$ は定数ベクトルである。 $[A]$ のムーア・ペンローズ一般逆行列 $[A]^{-}$ を用いて式(12)を解くと、

$$\{\alpha\} = [A]^{-} \{b\} + ([I] - [A]^{-} [A]) \{h\} \quad (13)$$

となる¹³⁾。ここで $[I]$ は単位行列、 $\{h\}$ は任意の列ベクトルである。上式右辺の第一項を特解、第二項を補解とよぶ。補解に $\{h\}$ が含まれることからわかるように、式(13)の解には任意性があるので、制約をさらに課して解を一意に決定する必要がある。これまでは設計変更量最小の解に対応する特解のみを用いて解を決定していた^{9), 10)}。本研究では、ロバスト・ホモロジー設計の要件より $\{h\}$ を決定する。

4. ロバスト・ホモロジー設計の定式

本研究では、荷重のみが不確定に変動するとして定式を行う。有限要素法では、荷重は離散化され節点荷重としてモデル化される。 N 個の節点荷重 f_n に式(14)の形で不確定変数 ε_n を割り付ける。

$$f_n = f_n^e (1 + \varepsilon_n) \quad (14)$$

以下、肩符 e は期待値荷重に関することを示す。 ε_n の存在範囲を先験情報に従って式(1)の形で設定することにより、荷重の期待値周りでの変動範囲が定められる。不確定変数の導入により、式(7)の剛性方程式は式(15)と書き換えられる。

研 究 速 報

$$[K] \{u\} = \{f^e\} + [F] \{\varepsilon\} \quad (15)$$

ここで $[F]$ は $L \times N$ のマトリックスである。その n 列の成分は、 f_n に対応する成分のみ f_n^e であり、それ以外は零である。構造変更による試設計周りの変動と不確定荷重の変動を考慮すると、節点変位は式(16)で近似される。

$$\{u\} = \{\bar{u}\} + \sum_{m=1}^M \{u_m^I\} \alpha_m + \sum_{n=1}^N \left(\sum_{m=1}^M \{u_{mn}^{II}\} \alpha_m + \{u_n^I\} \right) \varepsilon_n \quad (16)$$

ここで、 $\{\bar{u}\}$ は期待値荷重に対する試設計の変位、 $\{u_m^I\}$ は期待値荷重に対する変位の設計変数 α_m に関する一階感度、 $\{u_n^I\}$ は不確定変数 ε_n に関する変位の一次変化率、 $\{u_{mn}^{II}\}$ は不確定変数 ε_n に関する変位の一次変化率の設計変数 α_m に関する一階感度であり、以下の諸式により算出される。

$$\{\bar{u}\} = [\bar{K}]^{-1} \{f^e\} \quad (17)$$

$$\{u_m^I\} = -[\bar{K}]^{-1} [K_m^I] \{\bar{u}\} \quad (18)$$

$$\{u_n^I\} = [\bar{K}]^{-1} [F] \{\varepsilon_n^I\} \quad (19)$$

$$\{u_{mn}^{II}\} = -[\bar{K}]^{-1} [K_m^I] \{u_n^I\} \quad (20)$$

$\{\varepsilon_n^I\}$ は ε_n に対応する成分のみを 1、それ以外を零とするベクトルである。式(10)の右辺との差にあたる式(16)右辺第 3 項は荷重の不確定変動による変位の変動分である。

前章のホモロジー設計の定式では、荷重の不確定変動を考慮していない。したがって、式(13)で決定される構造に式(14)でモデル化される不確定荷重が加わると、ホモロガス変形からの不確定なずれが生じる。そのずれを表す誤差指標を式(2)の形で定義すれば、2 章の議論に基づき最悪状態が探索される。その誤差指標が許容量以上であるときに、許容量以下に低減する設計が本研究で目標とするロバスト・ホモロジー設計である。

本研究では、式(8)左辺のベクトル関数 $\{H(u)\}$ の各成分の自乗和を誤差指標とする。

$$\Delta^2 = \|\{H(u)\}\|^2 \quad (21)$$

目的とするホモロガス変形が成立しているとき $\{H(u)\} = \{0\}$ が成立するので、この誤差指標はホモロガス変形の制約が課された節点ごとの誤差の自乗和（分散）に対応する。式(13)で決定される設計変数に従い変更された構造に、式(14)の不確定変動する荷重が加わるときの誤差指標は、式(21)に式(16)で近似した節点変位を代入して得られる式により予測される。式(13)で決定される設計変数は、式(10)の一次近似の範囲内で式(8)の制約条件を満足する。したがって、式(16)で近似した節点変位を代入後の $\{H(u)\}$ の各成分は荷重の

不確定変動分である式(16)の右辺第 3 項に関わる項のみで表される。不確定変数 ε_n の高次項を省略し整理することにより誤差指標が式(2)の形で定義できる。

2 章で述べたように、誤差指標の最大値（最悪状態）は式(4)の固有値問題を解くことにより求められる。上記のごとく誤差指標を定義すると、式(2)あるいは式(4)中の $[D]$ の各成分は設計変数 α_m の関数となる。式(4)を解いて得られる固有値 $\lambda = \mu q^2$ のうち最大のものに注目し、設計変数に関する感度解析を行うことにより、構造変更による最大固有値の変化が式(22)の形で一次近似できる。

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sum_{m=1}^M \lambda_m^I \alpha_m \quad (22)$$

ただし、 λ_m^I は固有値の α_m に関する一階感度である¹⁴⁾。

式(6)に従い最大固有値により求められる誤差指標の最大値が許容量以上である場合に、最大固有値を許容値 λ^* とする設計変数の決定方程式は式(23)となる。

$$\{\lambda^I\}^T \{\alpha\} = \lambda^* - \bar{\lambda} \quad (23)$$

ここで $\{\lambda^I\}$ は式(22)の一階感度を成分とする列ベクトルである。期待値荷重に対してホモロガス変形が達成される構造は、式(13)により決定される設計変数により得られるので、式(13)の $\{\alpha\}$ が式(23)を成立させるように任意の列ベクトル $\{h\}$ を決定すればよい。求解にあたって特解のみを用いることとすれば、式(24)により $\{\alpha\}$ が決定できる。

$$\{h\} = \left[\{\lambda^I\}^T ([I] - [A]^{-1} [A]) \right]^{-1} (\lambda^* - \bar{\lambda} - \{\lambda^I\}^T [A]^{-1} \{b\}) \quad (24)$$

以上のロバスト・ホモロジー設計と既往のホモロジー設計^{5), 6)}の差を模式的に図 2 に示す。この図は期待値荷重周りで荷重が不確定に変動したときの誤差指標の変化の様子を表す。既往のホモロジー設計を行うと、期待値荷重 ($\varepsilon = 0$) に対しては誤差指標は零となるが、 $-1/q \leq \varepsilon \leq 1/q$ の範囲で不確定変動する荷重に対して、誤差指標の最大値が $\varepsilon = 1/q = -1/q$ で Δ_{\max}^2 となる。ロバストなホモロジー設計を行い設計変数 α を決定すると、期待値荷重

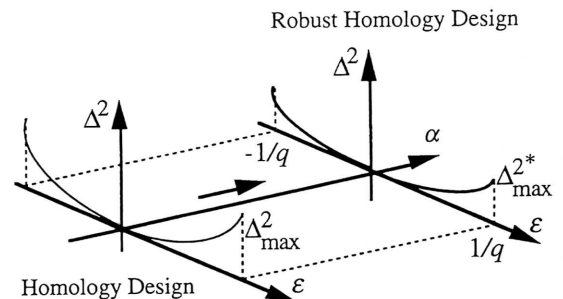


図 2 ロバスト・ホモロジー設計による誤差指標の低減

($\varepsilon = 0$) に対して誤差指標が零となり, かつ誤差指標の最大値が Δ_{\max}^{2*} まで低減できる.

5. 数 値 計 算 例

定式の妥当性を図 3 の格子フレームを用いた数値計算例を通じて示す. 構造は四隅を単純支持され, 期待値荷重として中央リブに沿って鉛直下向きに 0.1 N/mm の等分布荷重が加わるものとする. 部材断面は円形とし, 試設計におけるその直径を 50 mm とする. 1 部材 1 要素として曲げとねじりを考慮した有限要素に分割し, ヤング率: $E = 70.0 \text{ GPa}$, セン断弾性係数: $G = 26.9 \text{ GPa}$ とする. 設計変数は各部材の断面直径に割り付ける.

等分布荷重を受ける部材を真直かつ無負荷の状態と平行に保持する変形を, 目標とするホモログス変形とする. 具体的には, 節点 3 の鉛直方向たわみ w_3 を基準とし, 節点 1, 2, 4, 5 のたわみがそれに等しいとして, 式(8)の $\{H(u)\}$ の各成分を $w_1 - w_3 \dots$ のように与える. 式(14)の形で不確定変数を節点 1 ~ 5 の節点荷重に割り付け, 不確定変数の存在範囲を半径 1 の超球内 (つまり式(1)の q を 1, $[\Omega]$ を単位行列) とする.

従来方法⁹⁾により式(12)の特解のみを用いてホモロジー設計を行った場合, 荷重の不確定変動により引き起こされる最悪状態の誤差パラメータ Δ^2 は 40.0 mm^2 であった.

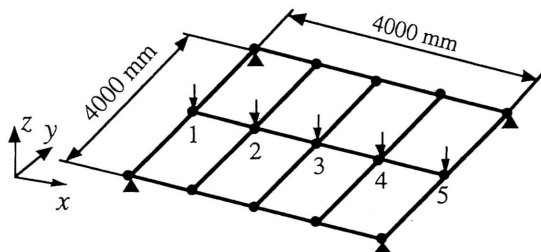


図 3 分布荷重を受ける格子フレーム

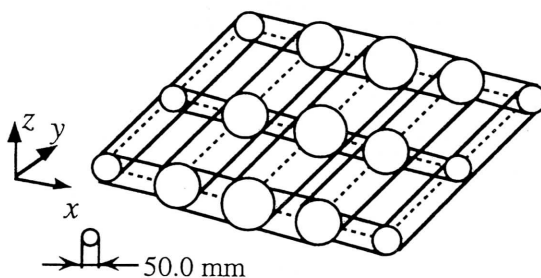


図 4 ロバスト・ホモロジー設計により得られた構造

そこで最悪状態の誤差パラメータを 0.1 mm^2 とするロバスト・ホモロジー設計を行った. 得られた構造の断面直径を図 4 に示す.

6. ま と め

期待値荷重に対してホモログス変形を成立させ, 荷重の不確定な変動に対してロバストなホモロジー設計を提示した. 不確定変動を表現するモデルとして凸包モデルを用い, 誤差指標の最大値 (最悪状態) を低減するように設計変数を決定した.

凸包モデルによる不確定性の表現は, 不確定変数の確率密度あるいは相関等の情報を切り捨てる方法とみられることもできる. そのため, 既往の確率論に基づく方法に比べ簡便な定式が行える利点がある反面, 確率密度等から得られる子細な情報を生かさないという欠点もある. ロバストな設計を行うにあたっての凸包モデルの利害得失については, 確率密度あるいは相関を考慮した方法との比較を通じて今後さらに検討する必要がある. (1994年10月7日受理)

参 考 文 献

- 1) 木村, 計測と制御, 30-8 (1991), pp. 647-654.
- 2) Optimization of Large Structural Systems, NATO ASI Series E: Applied Sciences, Vol. 231 (1993), Rozvany, G.I. (Ed.), Kluwer Academic Publishers.
- 3) 梶原, 長松, 日本機械学会論文集 (C編), 60-570 (1994), pp. 368-373.
- 4) 松崎, 日本機械学会誌, 97-910 (1994), pp. 778-780.
- 5) 木田, 小松, 機械の研究, 45-12 (1993), pp. 1273-1279.
- 6) von Hoerner, S., Proc. ASCE, Journal of the Structural Division, 93-ST5 (1967), pp. 461-485.
- 7) 森本, 他4名, 三菱電機技報, 56-7 (1982), pp. 17-20.
- 8) Hangai, Y., Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 39, Proc. 39th Japan National Congress for Applied Mechanics, Ed. JNCTAM, Science Council of Japan, Univ. of Tokyo Press (1990), pp. 11-28.
- 9) 吉川, 中桐, 日本機械学会論文集 (A編), 59-560 (1993), pp. 286-290.
- 10) 中桐, 吉川, 日本機械学会論文集 (C編), 59-566 (1993), pp. 159-164.
- 11) Ben-Heim, Y. and Elishakoff, I.: Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics, Elsevier, (1990).
- 12) Ben-Heim, Y., Structural Safety, Elsevier, 14-4 (1994), pp. 227-245.
- 13) ラオ=ミトラ (渋谷・田辺訳), 一般逆行列とその応用, 東京図書, (1973).
- 14) Fox, R.L. and Kapoor, M.P., AIAA Journal, 6-12 (1968), pp. 2426-2429.