研究速報
特集 9
研究速報

# 任意形状シェルの形態解析

The Shape Analysis of Free Form Shells

吉中　進*・川口健一*・半谷裕彦*
Susumu YOSHINAKA, Kenichi KAWAGUCHI and Yasuhiko HANGAI

## 1. は じ め に

大スパンを覆う軽量構造として，鉄筋コンクリートによる薄肉シェルが用いられることがある．薄肉シェルの力学的性状は，シェルの全体形状によって大きく異なる．従来は施工性等の理由から球の一部や円筒等，幾何学的に単純な形状が多く用いられてきた．これに対し，幾何学的単純さにとらわれない形状をもったシェルを任意形状シェルという．任意形状シェルの形状決定法として，つり下げた膜曲面を反転して得られる逆転曲面を利用する方法がある．一つの形態を生じさせる荷重を受けている柔軟な膜は，完全に張力だけかほとんど曲げモーメントのない形をしている．この形を逆さにして完全圧縮状態にする手法は昔から実験的に広く行われてきた．大規模なシェルについて最も成功したのは，1500ものシェルを建造したイスラー[3]である．数理解析では，Ramm[1]が最適化手法を用いた解法を提案している．大森[2]他は，変分法を応用した方法で形状決定を試みている．

本論文では，不安定構造の形状決定法を利用する形態解析法[4]を述べる．本解析法を用いることにより，力学的に合理的な形態のシェルを見つけることができる．また，応力状態を考慮した解析として1）感度解析を用いた場合，2）幾何学的付帯条件を緩めた場合，について解析する．さらに，連続体の膜モデルを考えスプライン関数を用い，面積を付帯条件として解析した．

## 2. 不安定構造の解析を用いた安定格子シェルの解析

まず膜曲面を格子で近似し，初期格子シェルを構成する（StepⅠ）．StepⅠで構成した格子シェルは不安定状態（$C_u$）にあり，荷重を載荷すると荷重モードに応じた安定状態（$C_s$）に変化する．$C_u$ から $C_s$ への移行過程の解析をStepⅡとする．StepⅡにおいて部材長は変化しないものと仮定する（不伸張変形の仮定）．本解析においてStepⅡが最も重要な仮定となり詳述する．節点座標値を $\mathbf{x}$，部材長を $\mathbf{l}$ とすると構造の幾何学的関係を表す変位速度 $\dot{\mathbf{x}}$ と伸び速度 $\dot{\mathbf{l}}$ との関係は，

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{l}} \tag{1}$$

ここに，Aは方向余弦を成分にもつ $m \times n$ 長方マトリクスである（$m$：全部材数，$n$：全自由度数）．節点座標値，部材長を任意のパラメータ $t$ の関数としマクローリン展開の2次項までを用いて，

$$\begin{aligned}\mathbf{l}(t) &= \mathbf{l}(0) + \dot{\mathbf{l}}(0)\,t + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{l}}(0)\,t^2 \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}(0) + \dot{\mathbf{x}}(0)\,t + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{x}}(0)\,t^2\end{aligned} \tag{2}$$

安定状態では $\dot{\mathbf{x}}$ と節点力ベクトル $\mathbf{f}$ は直交するので，

$$\dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{f} = 0 \tag{3}$$

(3)式を満たす $\dot{\mathbf{x}}$ を与える形状を増分手法を用いて求めればよい．またここで，(1)式の逆関係の計算にはムーア・ペンローズ型一般逆行列を用いた．$C_s$ 状態の形態は荷重との釣り合い状態にあり部材の軸力を決定する解析をStepⅢとする．軸力 $\mathbf{n}$ と $\mathbf{f}$ の間の関係式は，反傾原理より，

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{n} \tag{4}$$

上式より軸力 $\mathbf{n}$ は，

$$\mathbf{n} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{+}\mathbf{f} \tag{5}$$

軸力による部材長の変化を考慮した新しい釣合い状態（$C_e$）の解析をStepⅣとする．$C_e$ 状態の形状を逆転し，形態安定化をはかることにより軸力のみ（シェルの場合は面内力のみ）で荷重を支えることのできる曲面が得られるこ

*東京大学生産技術研究所　第5部

となる．

また以下の解析例において荷重は鉛直荷重のみ考え，節点の支配面積に応じた値を採用した．

**数値解析例**

Fig. 1 に示すような四辺固定格子シェルについて解析した．節点座標は荷重と固定境界からの距離のノルムを用いた(6)式によって決定した．

$$\zeta = \eta \frac{\|f_i\|}{\|f\|} \frac{\|l_i\|}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{6}$$

Fig. 2 は安定状態における格子シェルの形状を示す．Fig. 3 は StepⅢにおける軸力の分布を示す．一部の部材に圧縮が見られる．圧縮部材を取り除く方法を 3 章以下で述べる．

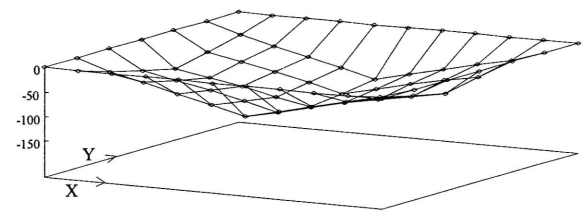



Fig. 1　Unstable Lattice Shell

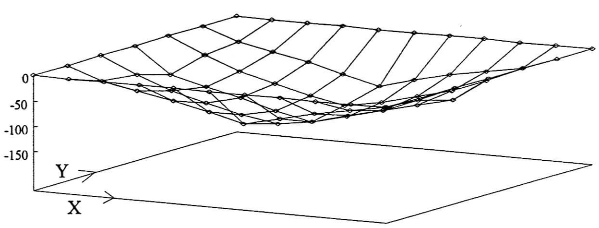
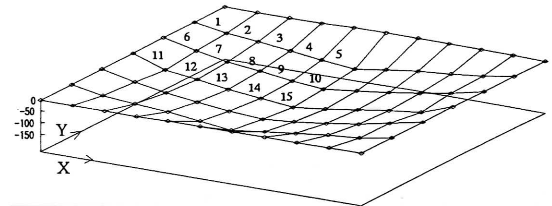
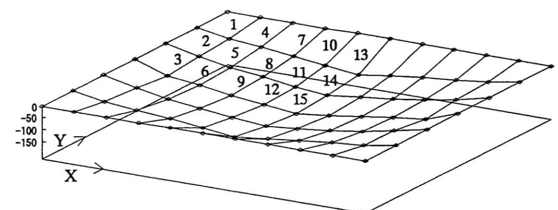



Fig. 2　Stable Lattice shell




| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Axial 1 | 17. 11 | Axial 6 | 6. 59 | Axial11 | 10. 91 |
| Axial 2 | 16. 94 | Axial 7 | 6. 34 | Axial12 | 9. 99 |
| Axial 3 | 16. 93 | Axial 8 | 6. 18 | Axial13 | 10. 19 |
| Axial 4 | 17. 06 | Axial 9 | 6. 05 | Axial14 | 10. 37 |
| Axial 5 | 17. 18 | Axial10 | 5. 92 | Axial15 | 10. 40 |

Fig. 3.1　Axial Force (X 軸方向)




| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Axial 1 | -5. 66 | Axial 6 | 5. 78 | Axial11 | 4. 08 |
| Axial 2 | -5. 75 | Axial 7 | 6. 92 | Axial12 | 3. 96 |
| Axial 3 | -5. 74 | Axial 8 | 6. 53 | Axial13 | -10. 45 |
| Axial 4 | 6. 32 | Axial 9 | 6. 38 | Axial14 | -8. 45 |
| Axial 5 | 5. 93 | Axial10 | 4. 41 | Axial15 | -8. 32 |

Fig. 3.2　Axial Force (Y 軸方向)

## 3. 応力状態を考慮した解析

### 3.1　感度解析

鉛直荷重をうける不安定リンク構造の安定化移行解析では部材に圧縮力が生じる場合があり，これは懸垂形状のシェルの形状決定に用いるには都合が悪い．そこで，圧縮のない全引張状態となる形状を見つけるために感度解析を行った．

設計パラメーターとして節点 $Z$ 座標をとり，設計変数を(7)式のように割り付けた．

$$Z = \bar{Z}_i(1+\alpha) \tag{7}$$

$\bar{Z}$：試設計の値，$\alpha$：設計変数

(4)式において $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ と $\mathbf{n}$ を設計関数に関して試設計の節点座標近傍でテイラー展開し，その 1 次項まで取ると，

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{\mathbf{T}} &= \bar{\mathbf{A}}^{\boldsymbol{T}} + \sum_{m=1}^{M} [\mathrm{A}^{\mathrm{T^I}}_{\mathrm{m}}]\,\alpha_{\mathrm{m}} \\ \{n\} &= \{\bar{n}\} + \sum_{m=1}^{M} \{n^{\mathrm{I}}_{\mathrm{m}}\}\,\alpha_{\mathrm{m}} \end{aligned} \tag{8}$$

不等式制約条件（圧縮の生じない条件）は，

$$\{n\} = \{\bar{n}\} + \sum_{m=1}^{M} \{n^{\mathrm{I}}_{\mathrm{m}}\}\,\alpha_{\mathrm{m}} \geq 0 \tag{9}$$

結局，(9)式を満たすような $\alpha$ を求め構造変更すればよいことになる．Fig. 4 に解析手順の概要を示す．

2 回の構造変更で得られた全引張状態の形状を Fig. 5 に示す．

### 3.2　幾何学的付帯条件を緩めた場合

ここで，部材に生じる内力を幾何学的付帯条件に対する反力であると考えると，付帯条件を緩めてやることにより，反力の分布をより連続的なものに変えることができると予想される．そこで，各部材長一定という条件の代わりに，ある特定の範囲における部材長の和を一定にするというよ

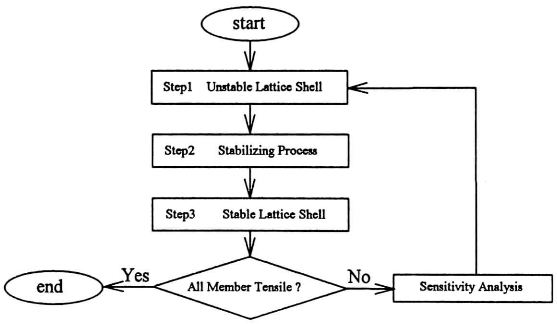



Fig. 4　Flow diagram of Sensitivity Analysis

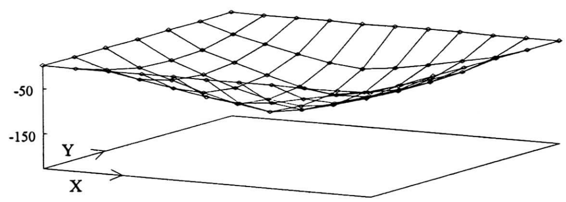



Fig. 5　Stable Lattice Shell

うに幾何学的付帯条件を緩めてやり，その範囲内では各節点が滑動できるということにする．

**数値解析例**

次の 4 つにの付帯条件の場合について解析した．括弧内は付帯条件の数を示す．

Type A：全部材長が一定，(104)．

Type B：各列毎の部材長の和が一定，(14)．

Type C：X, Y 軸方向の部材長の和が一定，(2)．

Type D：全ての部材長の和が一定，(1)．

Type A，Type B，Type C，Type D それぞれの安定格子シェルの形状を Fig 6.1～Fig 6.4 に示す．

付帯条件の数が少なくなるに従って，節点が矩形平面の中心方向に滑動している．

境界に接続している部材の軸力分布を Fig 7 に示す．

Type C では同一軸方向，Type D では境界に接続したすべての部材の軸力が同じになっていることがわかる．

ここで，部材反力について考察してみる．Type A における付帯条件は，各部材長一定であり，釣合い状態における反力は静定構造の場合 (5) 式で得られる軸力 $\mathbf{n}$ に等しい．Type D における付帯条件は，全部材長一定であり，釣合い状態では節点の変位速度ベクトル $\dot{\mathbf{x}}$ に対し，

$$\mathbf{a}^T\dot{\mathbf{x}}=0 \tag{10}$$

$$\mathbf{f}^T\dot{\mathbf{x}}=0 \tag{11}$$

が成り立つ．$\dot{\mathbf{x}}$ はベクトル $\mathbf{a}$ の零空間の任意ベクトルだから，式(10)，(11)を比較して，

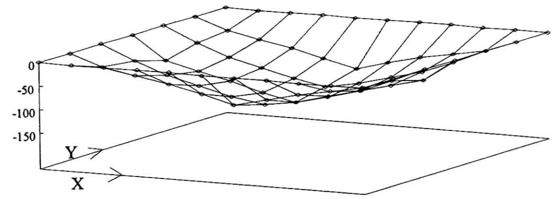



Fig. 6.1　Type A

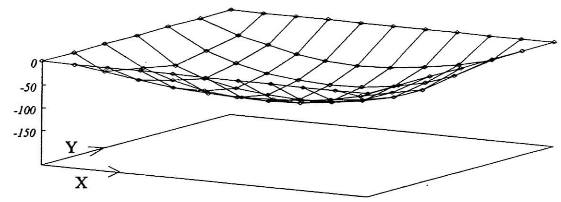



Fig. 6.2　Type B

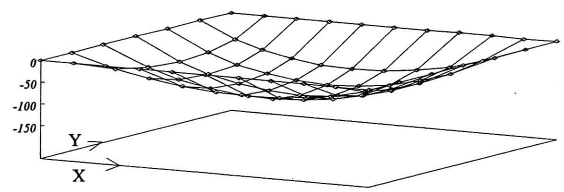



Fig. 6.3　Type C

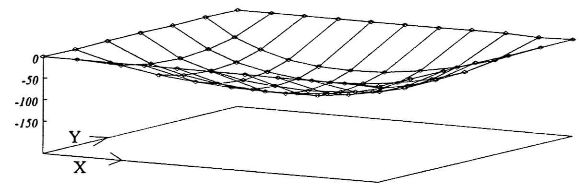



Fig. 6.4　Type D

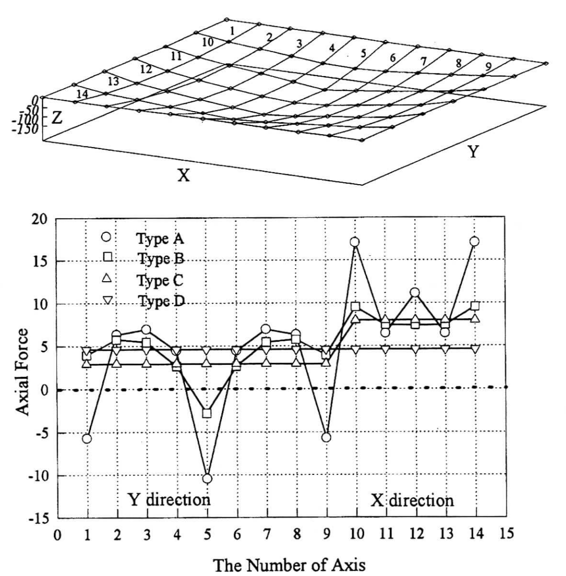



Fig. 7　Axial Force constrained to Fixed Joint

$$\lambda \mathbf{a}=\mathbf{f} \tag{12}$$

が成り立つ．ここで

$$\mathbf{a}=A^{T}\begin{Bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{Bmatrix} \tag{13}$$

である．$\lambda$ は全部材長一定の付帯条件に対する反力であり，式(5)，(12)，(13)より，

$$\lambda(\mathbf{AA}^{+})\begin{Bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{Bmatrix}=(\mathbf{A}^{+})^{T}\mathbf{f}=\mathbf{n} \tag{14}$$

本例のように静定構造の場合，$\mathbf{AA}^{+}=\mathbf{I}$ だから，安定形状において部材軸力は全て同じ値となり，その値は付帯条件に対する反力 $\lambda$ に等しいことがわかる．また Type B, Type C も同様に部材長の和が一定のグループにおいては，軸力がすべて等しくなることがわかる．

## 4. 面積を付帯条件とした連続体膜の解析

次に，不安定構造物の形態解析において面積を付帯条件とすることを考えた．B スプライン関数を用いて3次元空間内にデータ点を与えて，それらの点を補間する曲面を考える．

データ点 **X** と補間点 **x** の間の関係式は，

$$\mathbf{x}=\mathrm{BA}^{-1}\mathrm{X} \tag{15}$$

ここで，**A**：データ点の個数，スプラインの次数，**B**：データ点の分割区分数，スプラインの次数，により定まる．

膜の面積を微小要素の三角形の和として考える．

$$S=\sum_{m=1}^{M} S_m(\mathbf{x_i}, \mathbf{x_j}, \mathbf{x_k}) \tag{16}$$

$S$：全体の膜面積，$S_m$：微小要素の膜面積

$\mathbf{x_i}, \mathbf{x_j}, \mathbf{x_k}$：微小要素の三角形の節点座標

上式をパラメーター $t$ で微分し，境界処理をした後マトリクス表示すると，

$$\dot{\mathbf{S}}=\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} \tag{17}$$

膜面積を一定と仮定すると，

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}=\mathbf{0} \tag{18}$$

### 数値解析例

Fig. 1 に示すような格子シェルをスプライン関数を用いて膜要素で表現した Fig. 8 を等分布荷重を作用して解析した．データ点の自由度を Z 方向のみに限って解析したところ Fig. 9 のような安定形態が得られた．

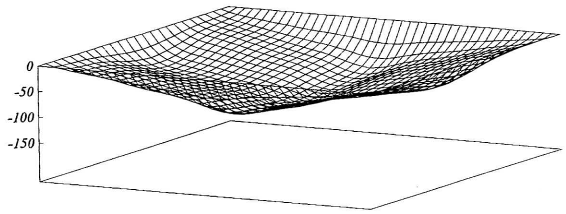



Fig. 8　Initial Shape

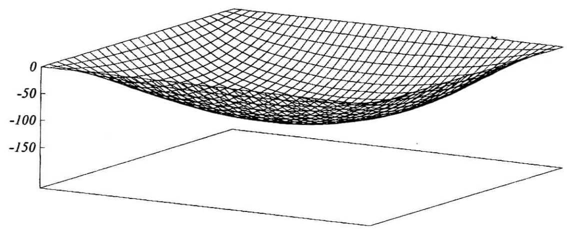



Fig. 9　Stable Shape

## 5. ま　と　め

本論文では不安定構造の形状決定法を用いた任意形状シェルの形態決定法を述べた．本解析法を用いることにより，軸力のみで荷重を支えることのできる格子シェルの形状を決定することができる．また，安定形状を逆転させたときに完全に圧縮状態になるような形態の決定法として，感度解析を用いた方法を提案した．さらに，幾何学的付帯条件を緩めてやることによって，力学的に有利な形態が得られることを示した．幾何学的付帯条件としては，ある範囲における部材長の和を一定にするという方法および連続体の膜において面積を一定にするという方法により解析した．

(1994年10月7日受理)

## 参 考 文 献

1) Ramm, E: Shape Finding method of shells, IASS Bulletin, vo. 33 (1992), pp. 89-99.
2) 大森：膜構造研究論文集 No 2, 1988, pp. 1-10.
3) Isler, H: The quality of shell design and construction, IASS Bulletin, vol. 32 (1992), pp. 67-71.
4) 半谷，川口：形態解析，培風館，1991.
5) 中桐：離散化モデルと構造シンセシス，培風館，1992.
6) 桜井：パソコンによるスプライン関数，東京電機大学出版局，1988