特 集 11
研 究 速 報

形態制御構造におけるアクチュエータ配置理論

Arrangement Theory of Actuators for Shape Control of Structure

半 谷 裕 彦*・金 井 頼 利**
Yasuhiko HANGAI and Yoritoshi KANAI

1. 研 究 目 的

空間構造は形態抵抗型構造で，使用時の形態によって外乱に対して抵抗能力が左右される．特に，軽量空間構造（膜やケーブル等による複合型空間構造など）では，環境条件や目標によって異なる形態に変化することが容易であることから，形態自身を環境条件に応じて制御する「形態制御構造」の開発が要望される．本研究では，アクチュエータを組み込んだ構造システムを形態制御構造として取り上げ，指定した形状を保持しながら振動するための形態制御法を扱う．アクチュエータにより形態制御を行う場合，指定した形状を保持できるためには，適当なアクチュエータの配置が必要となる．本論文では，トラス構造を具体例として，アクチュエータの配置を理論的に求めるための解析法を提案する．

2. 動的形態制御の基礎方程式

離散的に表現した運動方程式を次式とする

$$M\ddot{d}+Kd=f \tag{1}$$

ここに M：質量マトリックス，K：剛性マトリックス，d：変位ベクトル，f：外力ベクトル，$(\dot{\ })=d/dt$，である．形態制御として振動中に指定した形状を保持することを採用する．この条件を定式化すると

$$Ad=g \tag{2}$$

ここに，A：(m, n) 型制約条件マトリックス g：m 次制約ベクトル，m：制約条件数，n：全自由度数（$m<n$）．

式(1), (2)を Lagrange 乗数ベクトル λ を導入し，d と λ を未知量とする停留問題に変換する．その場合の Lagrange 関数は次式となる．

$$L=\frac{1}{2}\dot{d}^T M\dot{d}+\frac{1}{2}d^T Kd-f^T d+\lambda^T(Ad-g) \tag{3}$$

d と λ の各成分で偏微分し，零とおくことにより d と λ を未知量とする運動方程式が得られる．つまり，

$$M\ddot{d}+Kd+r=f \tag{4}$$

$$Ad-g=0 \tag{5}$$

ここに

$$r=A^T\lambda \tag{6}$$

式(4)の r は外力ベクトルと同一の成分を持ち，式(5)の制約条件を満足するために与える節点力を意味している．形態制御構造では，この節点力をアクチュエータで与えることになる．

3. 形態制御構造の課題

制約条件を満足するために与える節点力を構造物の内部に組み込んだアクチュエータによって制御する．

図1に示すトラス構造を用いて具体例を示す．(a)の基本トラスを制御するため，(b)に示すように$\overline{12}$, $\overline{45}$, $\overline{78}$部材をアクチュエータで置き換えてみる（図中，□印の部材で示す）．次節で詳細に述べるように，各アクチュエータの制御力（軸力）を n_b（$b=1\sim k$, k：アクチュエータ数）とするとき n_b による構造物全体の制御力 R は次式で得られ，

$$R=Bn \tag{7}$$

このとき，次の課題が生じる．

課題1：$R=r$ となるアクチュエータの配置は存在するか．

課題2：$R=r$ となるアクチュエータの配置が存在すると

*東京大学生産技術研究所　第5部
**職業能力開発大学

き，各アクチュエータの制御力の評価．

課題3：$R=r$となるアクチュエータの配置が存在しないとき，外部にどのようにアクチュエータを配置すればよいか．

課題3は図1(c)に示すように，外部に新しい節点を設け，アクチュエータを配置することを意味している．

4. 制　御　力 R

図3に示すように，デカルト座標において，節点iと節点jを結ぶトラス部材をa(a=1～e, e：部材数）とする．節点座標ベクトルと方向余弦ベクトルを次式とする．

$$x_i=\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix},\quad x_j=\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix},\quad \lambda_a=\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix}_a \tag{8}$$

部材長をl_aとすれば

$$l_a=[(x_j-x_i)^T(x_j-x_i)]^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

式(9)を用いると方向余弦ベクトルは次式となる．

$$\lambda_a=\frac{1}{l_a}(x_j-x_i) \tag{10}$$

次に，アクチュエータを考える．図3に示すように節点i, jを結ぶアクチュエータをb(b=1～k)とする．アクチュエータbに作用している軸力をn_bとし，n_bに釣合っている節点力を節点i, jにおいて次式とする．

$$R_{ib}=\begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ R_{iz} \end{bmatrix}_b,\quad R_{jb}=\begin{bmatrix} R_{jx} \\ R_{jy} \\ R_{jz} \end{bmatrix}_b \tag{11}$$

このとき，アクチュエータbの釣合式は，

$$\begin{bmatrix} -\lambda_a \\ \lambda_a \end{bmatrix} n_b=\begin{bmatrix} R_i \\ R_j \end{bmatrix}_b \tag{12}$$

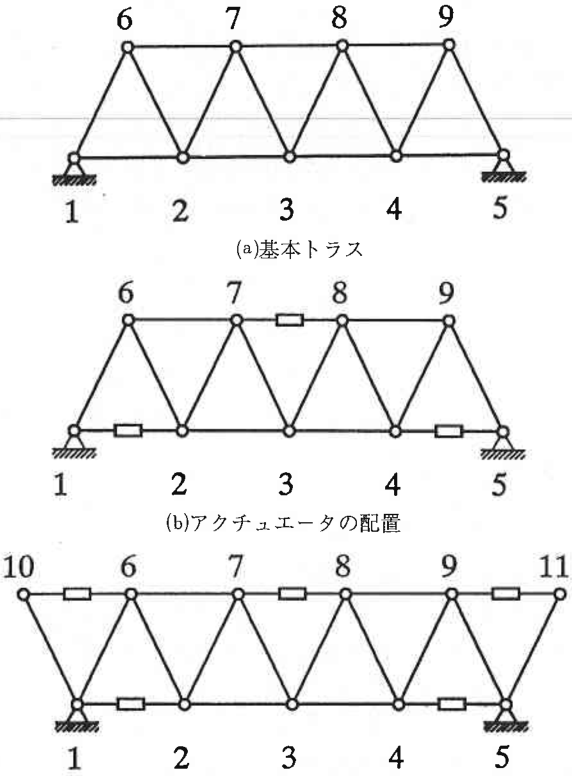
上式を全アクチュエータについてまとめると

$$R=Bn \tag{13}$$

上式は，式(7)に対応する式である．

5. アクチュエータ配置の存在条件と制御力

式(2)の制約条件はすべて独立とする．つまり，



(a)基本トラス

(b)アクチュエータの配置

(c)基本トラスの変更

図1　トラス部材のアクチュエータによる置換

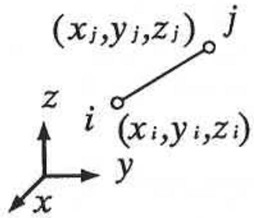


図2　トラス部材

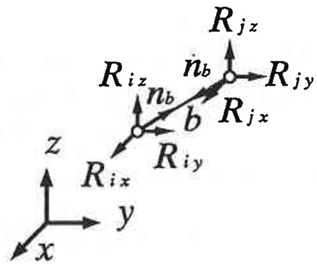


図3　制御力と節点力

$$rank(A)=m \tag{14}$$

上式より式(2)の独立な列ベクトルはm個である．k個のアクチュエータを式(13)の係数マトリックスのランクがkとなるように配置する．つまり，

$$rank(B)=m \tag{15}$$

k個のアクチュエータによって指定した形状を保つに必要な節点力を確保するには$R=r$が成立すればよい．式(13)の左辺をrで置き換えて，

$$Bn=r \tag{16}$$

上式のnを未知量とする連立方程式と考え，解も持つ条件式を作ると

$$[I-BB^{+}]r=o \tag{17}$$

ここに B^{+} は B の Moore-Penrose 型一般逆行列である[1]．上式は，基本トラスの部材をアクチュエータで置き換えることにより，制御ができることを示している．

式(16)より，アクチュエータの制御力 n は

$$n=B^{+}r \tag{18}$$

上式が課題2に対する解析法を意味している．

6. アクチュエータの外部配置

基本トラスの全部材をアクチュエータで置き換えても式(17)を満足させることができない場合には，アクチュエータを基本トラス以外の節点を外部に設けて配置する必要がある．この力学的意味は，$r=A^{T}\lambda$ における A^{T} の独立な列ベクトルを B の列ベクトルでは表現出来ないことである．そのため，A^{T} の列ベクトルを表現できるように外部にアクチュエータを配置すればよい（図(c)）．

7. 付帯条件付き運動方程式の解法

式(4)，(5)より d と r を求める解法を述べる．まず，式(5)より制約ベクトル g を消去する．そのため，次式で与える新しくベクトル u を導入する．

$$u=d-A^{+}g \tag{19}$$

上式を式(4)，(5)に代入すると

$$M\ddot{u}+Ku+r=h \tag{20}$$

$$Au=o \tag{21}$$

ここに

$$h=f-M\frac{d^{2}}{dt^{2}}(A^{+}g)-KA^{+}g \tag{22}$$

ここで u と r の直交性を示す．式(6)，(21)を用いて，

$$u^{T}r=u^{T}A^{T}\lambda=(Au)^{T}=o \tag{23}$$

L を n 次元空間の部分空間とし，$L^{\perp}$ を n 次元空間の L に対する直交補空間とする．式(23)より u と r は直交しているから，$u\in L$，$r\in L^{\perp}$ となる．そこで，P_{L}：L 上への正射影マトリックス，$P_{L^{\perp}}$：$L^{\perp}$ 上への正射影マトリックス，a：n 次元空間ベクトルとすると次式が成立する．

$$u=P_{L}a,\quad r=P_{L^{\perp}}a \tag{24}$$

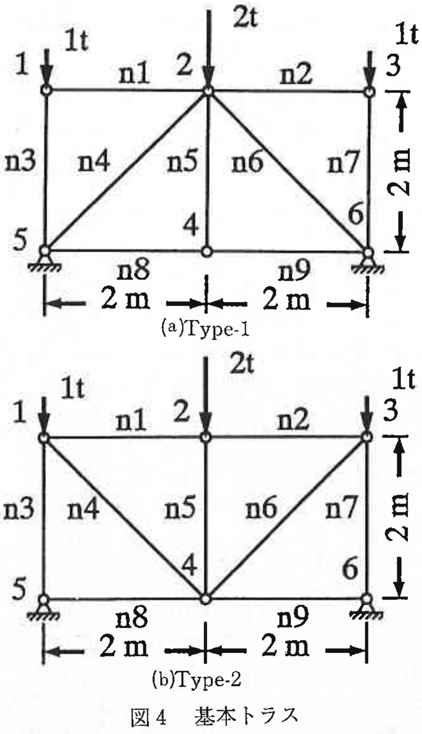
上式を式(20)に代入すると

$$MP_{L}\ddot{a}+[KP_{L}+P_{L^{\perp}}]a=h \tag{25}$$

上式より a を計算し，式(24)に代入することにより，u と r が得られる事になる．さらに式(19)より d が求まる．

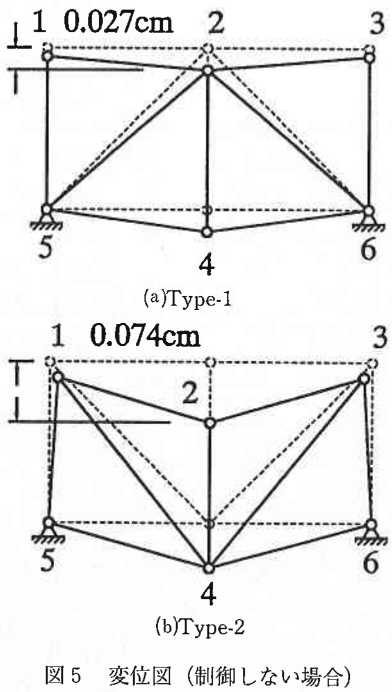
8. アクチュエータ配置の具体例

図4に示す2個のトラスを用いてアクチュエータ配置の



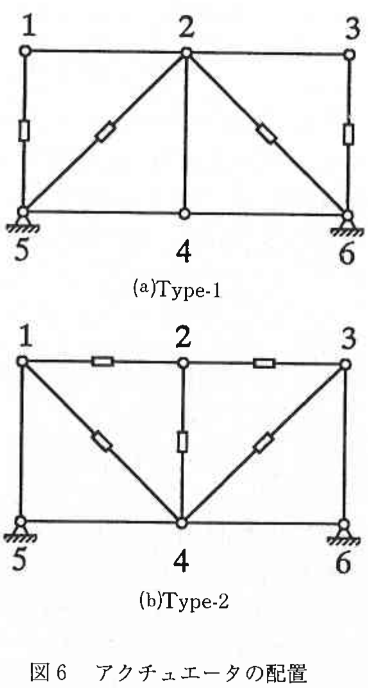
(a)Type-1　(b)Type-2

図4　基本トラス



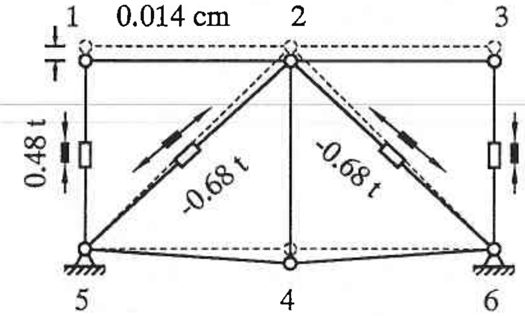
(a)Type-1　(b)Type-2

図5　変位図（制御しない場合）

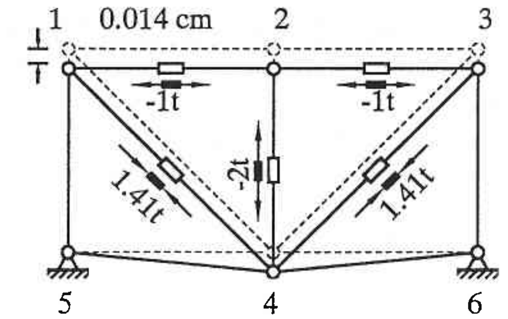


(a)Type-1　(b)Type-2

図6　アクチュエータの配置



(a)Type-1



(b)Type-2

図7　変位とアクチュエータ力

具体例を述べる．アクチュエータ配置のみを扱うには静的解析で十分であるので，本節では式(25)の代わりとして次式を用いる．

$$[KP_L+P_{L\perp}]a=h,\quad h=f-KA^{+}g \tag{26}$$

上式より a を求め，式(24)に代入すると

$$r=P_{L\perp}[KP_L+P_{L\perp}]^{-1}h \tag{27}$$

図4に示すトラスにおいて，ヤング率：$2.1\times10^{6}\,\mathrm{kg/cm^2}$，断面積：$10\,\mathrm{cm^2}$とする．また制約条件として，上部節点の鉛直方向位を同一とする（節点1，2，3は常に同一直線上にある）．このとき，$dy_1=dy_2=dy_3$ であるから，式(2)の係数マトリックスは次式となる．

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&-1&0&0\end{bmatrix} \tag{28}$$

荷重として，図4に示す荷重を作用する．図5に制御しない場合の変位モードを示す．この場合には節点1，2，3は制約条件を満足していないことがわかる．式(27)を用いて r を求めると，

$$\begin{array}{cc} \text{Type-1} & \text{Type-2} \\ r=\begin{bmatrix}0\\478\\0\\-955\\0\\478\\0\\0\end{bmatrix}, & r=\begin{bmatrix}0\\1000\\0\\-2000\\0\\1000\\0\\0\end{bmatrix}\end{array} \tag{29}$$

次に，式(18)を用いて n を求めると，

$$\begin{array}{cc} \text{Type-1} & \text{Type-2} \\ r=\begin{bmatrix}n1\\n2\\n3\\n4\\n5\\n6\\n7\\n8\\n9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\478\\0\\-675\\-675\\480\\0\\0\end{bmatrix}, & r=\begin{bmatrix}-1000\\-1000\\0\\1000\sqrt{2}\\-2000\\1000\sqrt{2}\\0\\0\\0\end{bmatrix}\end{array} \tag{30}$$

上式で零でない部材をアクチュエータで置き換えればよいことになるから，図6に示すようなアクチュエータ配置が得られる．Type-1のアクチュエータは，すべて支持節点に結合されている．一方Type-2では，アクチュエータはすべて自由節点間に配置されている．このときの変位とアクチュエータ力を図7に示す．節点1，2，3は同一の鉛直変位となっていることがわかる．

9. 結　　論

本論文はアクチュエータを構造に組み込むことによって構造の形状を制御する形態制御構造を扱っている．構造物が制御可能か否かは構造物の幾何学的形状と制約条件によって決まる．本論文では形態制御構造を考える上での基礎となるアクチュエータの配置理論を述べた．

(1994年7月8日受理)

参 考 文 献

1) 半谷，川口：形態解析，培風館，1991.
2) 金井，半谷：変位制約を持つ構造物の動的制御，第18回構造工学における数値解析法シンポジュウム，1994.
3) 半谷，原田：変位モード指定の構造形態解析法，日本建築学会構造系論文報告集，第453号，1993，pp. 95-100.