研 究 解 説　　UDC 539.42

3次元破壊力学

Three-Dimensional Fracture Mechanics

吉 川 暢 宏*・渡 辺 勝 彦*
Nobuhiro YOSHIKAWA and Katsuhiko WATANABE

三次元き裂の挙動を評価する際に有用であろうと考えられるき裂パラメータ CED の基本的力学関係について解説する．CED を用いることにより破壊様式評価の路が拓かれる．この問題は三次元破壊現象における基本的問題でありながら，既往のき裂パラメータを用いた議論では定量的検討はできなかった．それら CED の有効性の一端を数値解析の結果を交えて示す．

1. は じ め に

連続体力学は材料強度を数理的手段により評価する現実的な手法として受け入れられてきた[1]．破壊力学においても，二次元連続体中に存在するき裂周りの力学場が解析的に得られたことにより，その適用性への道が開かれた．しかしながら，現実のき裂周りの状況は連続体としての近似が適当であるとは言い難い．かといって個々の原子レベルで破壊現象を取り扱うことも現実的ではない．連続体力学の有用性を生かし現実的な材料強度評価を行うには，き裂挙動を評価するき裂パラメータに関する十分な検討が必要であると考えられる．

既往のき裂パラメータは二次元問題を出発点としている．次元が二から三に一つ増しただけで，とたんに微分方程式の解が得られなくなったり，扱うべき変数が膨大になり問題の取り扱いが非常に困難になったりした経験をお持ちの方は多いと思う．き裂パラメータに関する議論においても，より実際に近い三次元問題への拡張は容易ではなかった．その理由は，次元の増加だけではなく，三次元問題では本質的となる部分を出発点である二次元問題で考慮していなかったところにもあるように思われる．

本解説ではまず二次元連続体弾性論に基礎を置く従来のき裂の力学を紹介し，それを三次元き裂に拡張しようとして発生した問題点を示す．その解決策として提案されたき裂パラメータであるき裂エネルギ密度（Crack Energy Density, 以下CED）の基本的力学関係を示す．さらに数値解析例により，その有効性の一端を示す．

*東京大学生産技術研究所　第1部

2. 破壊力学の歴史

柿の種の袋を開くときのことを考えていただきたい．もし袋の端に切り込みが入っていれば，そこを起点として容易に袋を切り開くことができる．このように材料中に欠陥があると，そこを起点として容易に破壊が進行する．このような欠陥の存在が，材料の強度を極端に下げる原因となる．固体中に欠陥がない場合の理想強度と実際の強度の違いを力学的に最初に説明したのは Griffith である[2]．彼のモデルは二次元完全脆性体中のき裂進展をエネルギバランスに基づいて記述するものであり，力学量により破壊という物理現象が記述できそうに見えた．続いて登場したのが応力拡大係数であり，二次元線形弾性体中のき裂周りの応力・変位場を求めた Westergaard[3] の功績による．彼の求めた微分方程式の解によれば，き裂端近傍の応力はき裂端からの距離の $-1/2$ 乗に比例し，比例定数にあたるものを応力拡大係数とした．つまり，き裂端での応力は無限大となり，応力拡大係数をもってき裂端周りの応力場を表すパラメータとしたわけである．さらに，材料の構成条件を非線形弾性体（全ひずみ塑性体）にまで拡張するものとして J 積分が提案された[4),5]．J 積分も，二次元非線形弾性体中のき裂端周りの応力場（HRR 場[6),7]）を特徴づけるパラメータである．

応力拡大係数と J 積分は代表的なき裂パラメータとされている．これら共通の特徴は，二次元弾性論により解かれた連続体中の鋭いき裂周りの応力場を表している点である．その応力場が破壊現象を支配する第一の要因であれば，これらのパラメータを用いる破壊力学に何ら問題はない．しかしながら，現実の材料中のき裂端付近では全ひずみ塑性体とは異なる塑性変形が生じており，また連続体とは言い

難い状況であるのが一般的な認識である．このように，連続体近似が現実の状況と不一致であるにもかかわらず破壊力学が有効であるとされてきたのは，き裂端近傍の微視的状況は異なっていても，き裂端から離れたところの応力状態は似たようなものになっており，そのためき裂端付近の状況を反映する何らかのパラメータにはなっているであろうという仮設に基づく．現実の材料が，それらパラメータの定義された構成条件から大きくはずれない限りはそのような仮設も有効ではあるが，その適用範囲には限界がある．

さらに，それらパラメータが二次元弾性論の解より得られたものであることが，実際の破壊現象を取り扱う場合に無理を生じる状況をも生み出している．一般的な三次元状況を直接扱うのは煩雑であり，また本質を見失う可能性もあるため，まずは二次元問題で議論を行うのは常套手段である．しかしながらその場合であっても，まずは一般的な三次元問題での考察があり，そこから本質を失わない範囲で次元を落とす方法がとられるべきである．上記のき裂パラメータの場合はそのような考察無しで，まずは限定された条件下の二次元問題に対して微分方程式の解が与えられたということから始まった．したがって，それを一般的な三次元問題に拡張しようとするとき，問題の本質がつかみにくい状況となっている．そのため，二次元問題でのものとまったく同じ意味を持つように三次元問題に拡張することに成功しているとはいえない．つまり，一般の三次元問題では，連続弾性体であってもき裂端近傍の応力場を与える解が現在のところは得られておらず，き裂端近傍の応力場を表すパラメータとしてのき裂パラメータは求められていない[8)~11)]．それでも，なにかしらのパラメータでき裂の状態を評価したいということで，二次元問題での評価方法そのままで評価されたものを用いるやり方[12)~15)]，本来のき裂パラメータの意味を拡大解釈して定義をし直すやり方[16),17)]等がとられている．

3. 次元CEDの基礎式

前章で述べたような，構成条件の制約や次元の制約を受けずに，き裂端の状況をより適切に反映するパラメータとして提案されたのがCEDである[18)~20)]．CEDは“き裂端部を含む面内の各部が，負荷を受けていない初期の状態から現在までに担ってきたエネルギをその面内の単位面積当たりで表したもの”と定義される．概念的な定義であるが，その分一般性は高い．き裂モデルを具体的に定めることにより，この定義に基づく力学量による具体的定義が行われる．ここでは連続体力学に基づく切欠きモデル上で力学量としての定義を行うが，非連続モデル[21)~24)]，分子動力学モデル[25)]等の連続体力学の体系から少々はずれるモデル上でも，上記の概念定義に沿った具体的定義が行える．また，それら定義は構成則の制約を受けない．

連続体切欠きモデル（以下切欠きモデル）では，き裂端をき裂前縁に直交する面内での曲率半径ρの切欠きとしてモデル化する（図1）．この切欠き端と合同な半円形の経路をき裂端前方で連ねたものをもってき裂端を含む面とする[28)]．このモデルでは実質的なき裂進行領域としてこの厚さ2ρのき裂端を含む面を考えており，き裂進展も合理的に取り扱えるが[27)~30)]，ここでは議論を簡明にするためき裂の進展は考慮せず，き裂端のCEDについてのみ議論を行うものとする．き裂面とx_1-x_3平面が一致するように座標系をとると，点$(x_1, x_2, x_3) = (X_1, 0, X_3)$でのCEDは，この切欠きを表す径路$\Gamma_0(X_1, X_3)$上の積分として式(1)で定義される．

$$\mathscr{E}(t, X, X_3) = \int_{\Gamma_2(X_1, X_3)} W dx_2 \tag{1}$$

ここでWはひずみエネルギ密度であり，σ_{ij}, ε_{ij}を応力，ひずみ，tを時間として式(2)で与えられる．

$$W = \int_0^t \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} dt \tag{2}$$

切欠きモデルでのCEDは切欠き半径ρの大きさに依存する．しかしながら十分小さいρに対してはCEDは一定値となる[30)]．また，ひずみエネルギ密度は座標系に依存せず一意に定まるので，き裂面とx_1-x_3平面が一致するように座標系をとる限りにおいてはCEDも座標系によらないものとなっている．この性質は，CEDの面密度としての特質を端的に表すものである．

式(1)で定義されるCEDは，連続体に対するエネルギ保存則により領域積分表示が可能である[26)]．

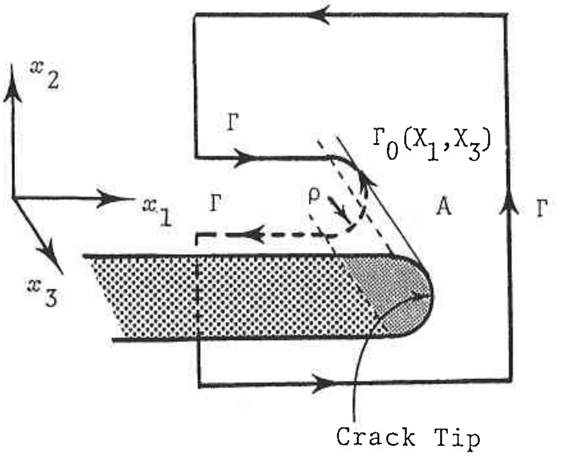


図1　切欠きモデルでのCED

$$\mathscr{E}_J(t, X_1, X_3) = \int_\Gamma (W dx_2 - T_i u_{i,1} d\Gamma) - \int_A (\sigma_{i3} u_{i,1})_{,3} dA$$
$$+ \int_A \Big[M_{,1} - \int_0^t \Big\{ \Big(B_i \frac{\partial u_i}{\partial t} dt \Big)_{,1} \Big\}$$
$$+ \Big(\sigma_{ij,j1} \frac{\partial u_i}{\partial t} dt - u_{i,1} \frac{\partial \sigma_{ij,j}}{\partial t} dt \Big)$$
$$+ \Big(\sigma_{ij,1} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} dt - \varepsilon_{ij,1} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} dt \Big) \Big] dA \quad (3)$$

ここで，T_iは表面力，u_iは変位，Mは運動エネルギ，B_iは体積力であり，$(\ )_{,j} = d(\ )/dx_j$である．また，Γは$\Gamma_0(X_1, X_{13})$の両端に連結する任意の径路であり，Aは$\Gamma + \Gamma_0(X_1, X_3)$で囲まれる面積である．二次元静弾性問題に対しては，式(3)の領域積分表示されたCEDはJ積分に一致し，J積分あるいは応力拡大係数が定義される特殊な条件下においてそれらと一対一に対応する．

数値解析によりCEDを評価する際には，式(1)の定義式に基づくよりも，式(3)の領域積分で評価する方が精度良い値が得られる．しかしながら，領域積分による評価では，CEDのトータルの値しか得られない．トータルの値で議論をする限りにおいては，J積分等の既往のき裂パラメータとCEDの決定的な違いは見えにくい．それらき裂パラメータとCEDの差を3次元問題で特にきわだたせ，CEDのひずみエネルギ面密度としての性質が端的に現れるのが以下に示す各せん断変形寄与分への分離である．二次元問題では力学状態を平面ひずみあるいは平面応力にわけて別々に議論を行える．言い方を換えれば，平面応力あるいは平面ひずみ状態にあるとの仮設がまず行われるわけである．厚い部材中のき裂周りでは平面ひずみ状態に近い状態が実現され，薄い部材中のき裂周りでは平面応力に近いと定性的には考えられていたが，その違いを定量的に議論することはこれまで不可能であった．それぞれの力学状態に対応して平面応力型と平面ひずみ型の破壊様式があり，おのおので破壊靱性値が異なるが，その破壊様式の違いを定量的に同定する方法はこれまで無かった．その理由は前章でも述べたように，既往のき裂パラメータが二次元での定義を出発点としており，二次元問題ではそのような違いは自明なものとして与えられているためである．

式(1)のCEDの定義式中，ひずみエネルギ密度Wは次の4成分に分離できる．

$$W_{12} = \int_0^t \Big\{ \frac{1}{3}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) + 2\sigma_{12} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial t} \Big\} dt \quad (4)$$

$$W_{23} = \int_0^t \Big\{ \frac{1}{3}(\sigma_{22} - \sigma_{33}) \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) + 2\sigma_{23} \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial t} \Big\} dt \quad (5)$$

$$W_{31} = \int_0^t \Big\{ \frac{1}{3}(\sigma_{33} - \sigma_{11}) \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}) + 2\sigma_{31} \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial t} \Big\} dt \quad (6)$$

$$W_V = \int_0^t \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) dt \quad (7)$$

$$W = W_{12} + W_{23} + W_{31} + W_V \quad (8)$$

W_{12}はx_1-x_2面内のせん断変形によるひずみエネルギの寄与分と考えられ，W_{23}とW_{31}についても同様にx_2-x_3面内とx_3-x_1面内のせん断変形による寄与分であると考えられる．また，W_Vは全ひずみエネルギ密度から$W_{12} + W_{23} + W_{31}$を除いたものであり，体積ひずみによる寄与分であると考えられる．これらせん断変形寄与分の意味をつかみやすくするため，主応力・主ひずみ方向とx_1, x_2, x_3方向が一致するように座標系をとる場合で考える．$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$を主応力，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$を主ひずみとすると，$W_{12}$は式(9)となり，図2よりこの成分は$x_1$-$x_2$面内の最大せん断応力による寄与分であることがわかる．

$$W_{12} = \int_0^t \frac{1}{3}(\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) dt \quad (9)$$

以上のひずみエネルギ寄与分の分離に対応して，CEDも各面内のせん断変形寄与分と体積ひずみによる寄与分に分離できる．

$$\mathscr{E}_{12}(t, X_1, X_3) = \int_{\Gamma_0(X_1, X_3)} W_{12} dx_2 \quad (10)$$

$$\mathscr{E}_{23}(t, X_1, X_3) = \int_{\Gamma_0(X_1, X_3)} W_{23} dx_2 \quad (11)$$

$$\mathscr{E}_{31}(t, X_1, X_3) = \int_{\Gamma_0(X_1, X_3)} W_{31} dx_2 \quad (12)$$

$$\mathscr{E}_V(t, X_1, X_3) = \int_{\Gamma_0(X_1, X_3)} W_V dx_2 \quad (13)$$

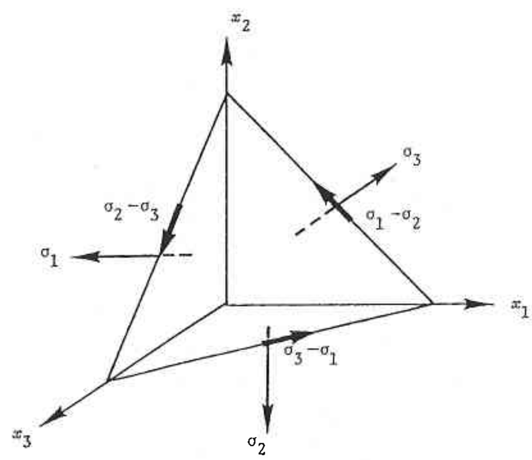


図2　各面内の最大せん断応力

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_{12}+\mathscr{E}_{23}+\mathscr{E}_{31}+\mathscr{E}_{V} \tag{14}$$

以上のCED各寄与分と破壊様式の関係を，図3に示す貫通き裂材で考えてみる．き裂材の板厚2Dが厚いときには図4 (a)の点線上でのすべりで代表されるx_1-x_2面内のせん断変形が支配的となり平面ひずみ型で破壊が進行し，板厚が薄いと図4 (b)に示すx_1-x_3面内のせん断変形が支配的となり平面応力型で破壊が進行すると考えられている．この場合はx_1-x_2面内のせん断変形に対応する$\mathscr{E}_{12}$が平面ひずみ型破壊に関与し，x_2-x_3面内のせん断変形に対応する$\mathscr{E}_{23}$が平面応力型破壊に関与すると予想される．破壊様式を決定づける因子については，現実の破壊現象との対応に関して詳細な検討がさらに必要であると考えられるが，現在のところそのような観点で提示されているパラメータは，ここで述べたCEDの各成分以外ない．

4. 弾塑性問題への適用

以上に述べたCEDを用いてき裂材を評価するとどのような議論が行えるかを数値解析例により示す．解析に用いたき裂材は図3に示す中央貫通き裂材である．D＝0.5 mm（全厚1.0 mm）の薄いき裂材と，D＝60.0mm（全厚120 mm）の厚いき裂材の2種類のき裂材を解析対象とした．荷重はき裂材上下面にx_2方向一様引張り応力σを与えた．解析は有限要素法により六面体8節点アイソパラメトリック要素を用いて行った．材料定数は，ヤング率をE＝210.7 GPa，ポアソン比をν=0.3，降伏応力をσ_Y=392.0 MPa，ひずみ硬化率H'をヤング率の1/100とし，構成則はMisesの結合流れ則に従うものとした．

まず，弾性問題としてσ=9.8 MPaを負荷した場合の結果を示す．領域積分により評価されるCEDのき裂前縁に

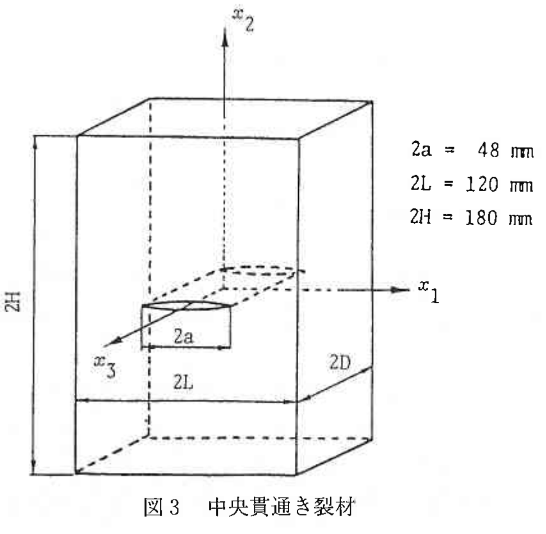
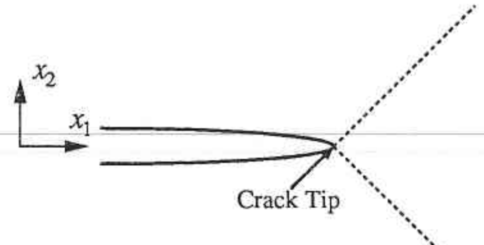
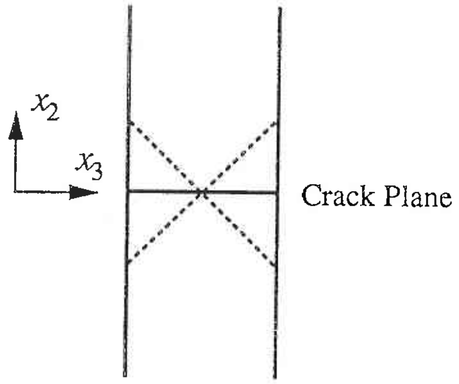


図3　中央貫通き裂材



(a)$\mathscr{E}$12

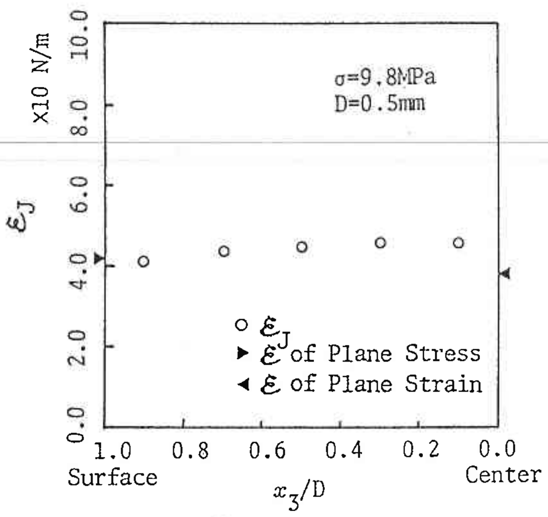


(b)$\mathscr{E}$23

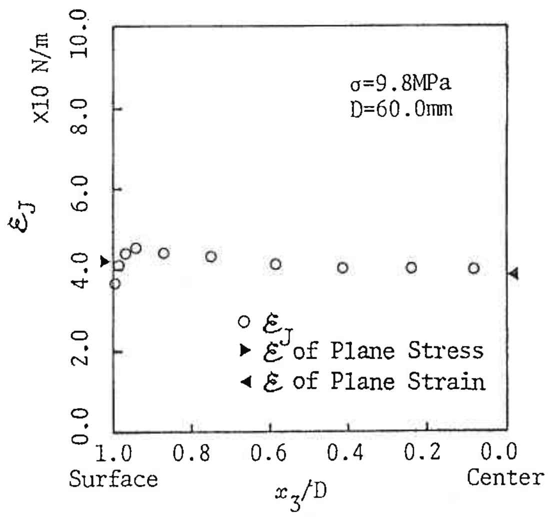
図4　CEDのせん断変形寄与分と破壊様式

沿った分布を示すのが図5である．参考のため図中左端に二次元平面応力解析により得られるCEDを，右端には平面ひずみのCEDを示す．D＝0.5 mmの薄いき裂材では板厚全域にわたりCEDが平面応力のものに近い．この結果は，薄いき裂材では平面応力状態に近いという予見に一致するかに見える．D＝60.0 mmの厚いき裂材では，ある程度自由表面から離れると平面ひずみのCEDに近くはなっているが，自由表面付近ではCEDの急激な減少がみられる．この自由表面付近でのCEDの急激な変化はBoundary Layer Effectと呼ばれ[14),15)]三次元き裂問題ではいまだに解析的説明がなされていない現象である．定性的推定によれば，き裂材であっても表面付近では平面応力場に近い状態であると考えられており，実際の破壊もシェアーリップを生じる平面応力型であることが多い．しかしながら，数値解析の結果からはき裂パラメータが平面応力のものとは大きく異なり，推測と解析結果が大きく異なったことが，この現象が注目された原因である．従来のき裂パラメータを用いた評価では，以上のようなトータルのパラメータ値に注目した議論しか行えなかったため，さらに踏み込んだ議論は行えなかった．

CEDの各せん断変形寄与分を用いると，連続的に変化するき裂端の変形様式に関する議論がさらに行える．前述のき裂材の$\mathscr{E}_{12}$, $\mathscr{E}_{23}$, $\mathscr{E}_V$のトータルの$\mathscr{E}$に対する割合を図6に示す．図中の記号は，▲が$(\mathscr{E}_{12}+\mathscr{E}_{23}+\mathscr{E}_{31})/\mathscr{E}=(\mathscr{E}-\mathscr{E}_V)/\mathscr{E}$を，■が$\mathscr{E}_{12}/\mathscr{E}$を示す．この場合は$\mathscr{E}_{31}$がほ

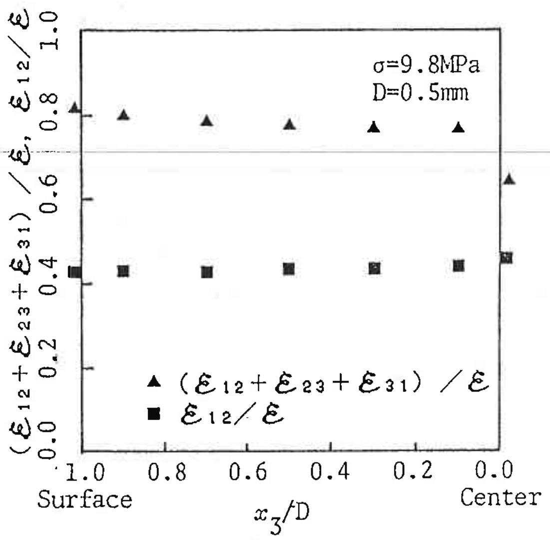


(a) D=0.5 mm

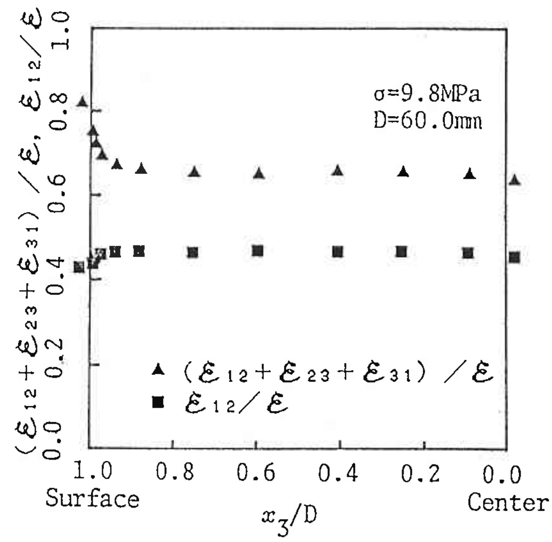


(b) D=60 mm

図 5　き裂前縁に沿ったCEDの変化 (σ=9.8 MPa)



(a) D=0.5 mm

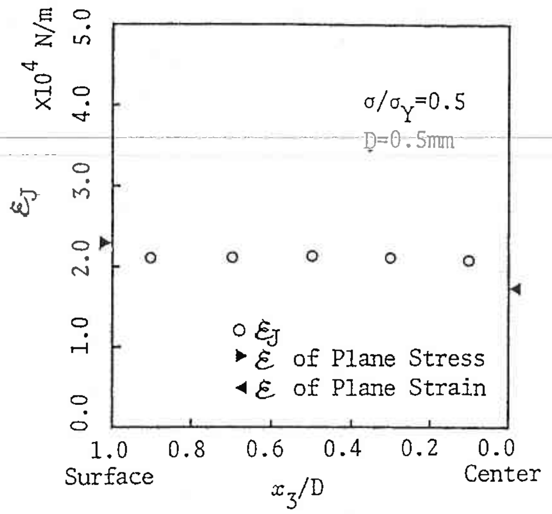


(b) D=60 mm

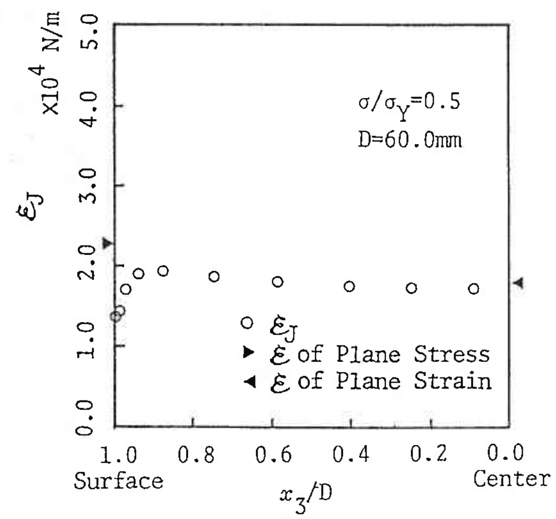
図 6　き裂前縁に沿ったCEDの各せん断変形寄与分の変化 (σ=9.8 MPa)

ぼ零であったので，▲と■の差が$\mathscr{E}_{23}/\mathscr{E}$を示すと考えてよい．また，図中左端に二次元平面応力条件下で評価されたそれらの値を，右端には平面ひずみでのそれらの値を示す．この結果からは，薄いき裂材(D=0.5 mm)では厚さ方向全域にわたり平面応力の各寄与分の割合に近いものになっており，トータルのCEDの値のみならず変形様式も平面応力状態のものに近いことが定量的に示される．厚いき裂材(D=60.0 mm)の解析結果からは，き裂材中央部ではトータルのCED値もそうであったように変形様式も平面ひずみに近い状態となっており，自由表面付近ではトータルのCED値は平面応力のものとは異なっていたが，変形様式は平面応力状態に近いことが明らかになった．以上のように，CEDのせん断変形寄与分に注目すれば，既往のき裂パラメータでは定量的議論が不可能であった変形様式に関する議論が容易に行えるわけである．

さらに荷重を増し，塑性変形が進み$\sigma/\sigma_Y=0.5$となったときのCEDおよび各寄与分の評価結果を図7および図8に示す．薄いき裂材ではCEDトータルの値は相変わらず全域にわたり平面応力のそれに近いが，各寄与分の割合はき裂材内部で平面応力のものからはずれていることがわかる．これは，塑性変形の進行にともない応力の再配分が進んだ結果と考えられる．厚いき裂材では，き裂材中央部ではCEDトータルの値，各寄与分の割合とも平面ひずみのものに近く，き裂材表面ではトータルの値は減少するが各寄与分の割合は平面応力のものに近くなっている．また平面応力と平面ひずみでの各寄与分の割合を比較すると，双方とも塑性変形の進行にともない体積変形寄与分である

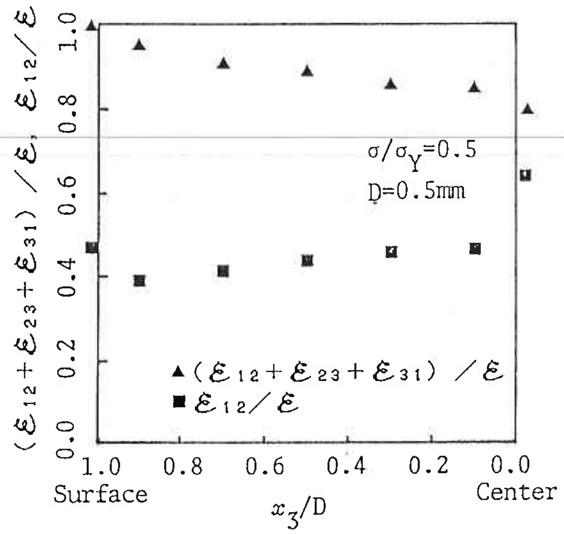


(a) D=0.5 mm

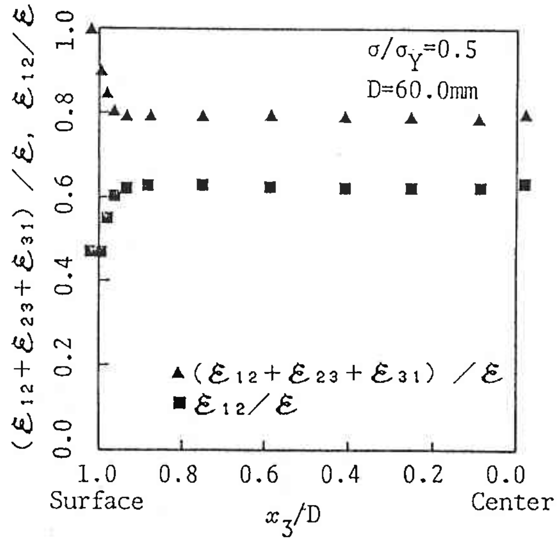


(b) D=60 mm

図7　き裂前縁に沿ったCEDの変化 (σ/σY=0.5)



(a) D=0.5 mm



(b) D=60 mm

図8　き裂前縁に沿ったCEDの各せん断変形寄与分の変化 (σ/σY=0.5)

$\mathscr{E}_V$ の割合が減少し，平面応力では $\mathscr{E}_{23}$ の割合が増加し，平面ひずみでは $\mathscr{E}_{12}$ の割合が増加している．この結果は，平面応力型破壊では図4 (b) に示す x_2-x_3 面内のせん断変形が支配的となり，平面ひずみ型破壊では図4 (a) に示す x_1-x_2 面内のせん断変形が支配的となる事実を定量的に説明できるものとなっている．

5. クリープ問題への適用

CEDが構成関係の制約を受けないき裂パラメータであることを示す例として，クリープ問題に対する適用例を示す．クリープ問題では，一定荷重下であってもクリープひずみにより時々刻々応力場が変化する．そのため，変化するき裂周りの応力場を明らかにすることにはいまだ成功していない．そのため，応力拡大係数あるいは J 積分にあたるものは二次元問題といえども提案されていない．ただし，クリープひずみが他のひずみに対し支配的となる定常クリープ状態においては，J 積分の変位とひずみに関わる項を形式的にそれらの時間変化分とした修正 J 積分が提案されている[31]．

解析に用いたき裂材は前章で用いた板厚 D=0.5 mm と D=60.0 mm の二種類の中央貫通き裂材である．材料は塑性ひずみの生じない弾性クリープ状態にあるとし，単軸引張りにおいてクリープひずみ速度と応力の関係が Norton 則に帰結する Mises 型クリープ構成関係[32]に従うものとし，Norton 則の指数 n=7.0とした．またヤング率とポアソン比は前章のものと同じである．

荷重条件も前章同様，き裂材の上下面で x_2 方向に単純引張り応力 σ =58.8 MPa が与えられるものとした．荷重

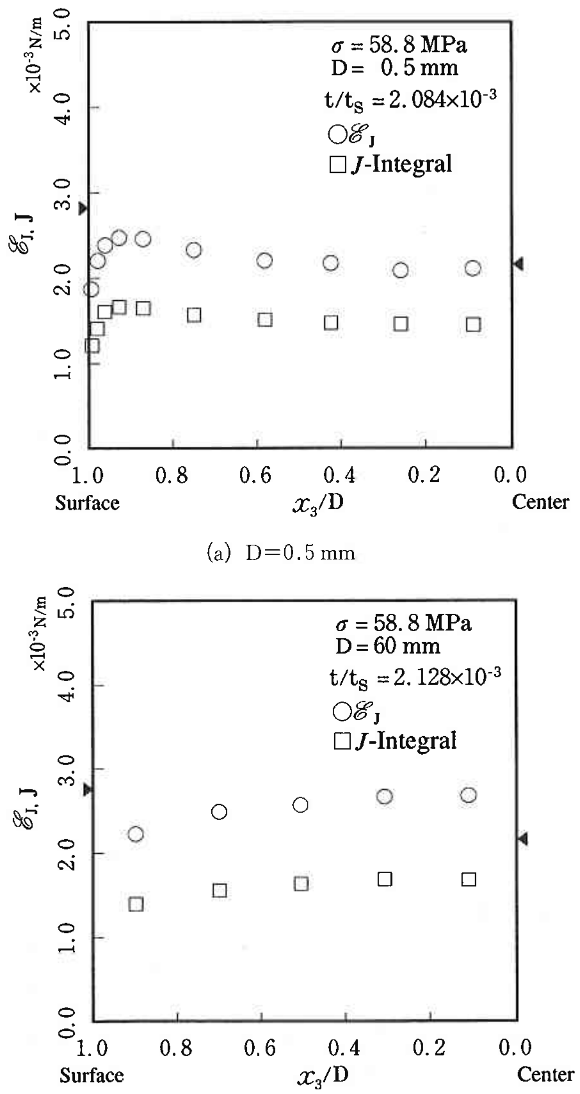
負荷後の時間 t については，き裂材の残断面平均荷重 $\sigma_{net}=\{L/(L-a)\}\sigma$ を平滑材に与えたときにクリープひずみと弾性ひずみが等しくなる時間 t_s で無次元化して表す．

$t/t_s=2.15\times10^{-3}$ における各き裂材の CED の評価結果を図9に示す．図中には参考のため J 積分の評価結果も示す．また，左端および右端には二次元平面応力および平面ひずみでの解析結果も示してある．負荷直後のクリープひずみの小さい状態では CED と J 積分の値はほぼ等しい．しかしながら，クリープひずみの増加にともない CED は増加していくのに対し，J 積分は不変である．この結果は，CED はクリープ損傷の蓄積を評価し得るき裂パラメータであるのに対し，J 積分はそうではないことを示すものである．

この場合の CED の各寄与分の割合を図10に示す．表示の仕方は図6および図8と同じである．この結果からは，薄いき裂材と厚いき裂材の自由表面付近では平面応力に近い変形様式が実現されているが，厚いき裂材の中央付近の変形様式は平面ひずみのものからはずれていることがわかる．つまり，クリープを生じる破壊現象では，平面ひずみ型の破壊が発生しにくいことを示唆する結果であるといえる．

6. お　わ　り　に

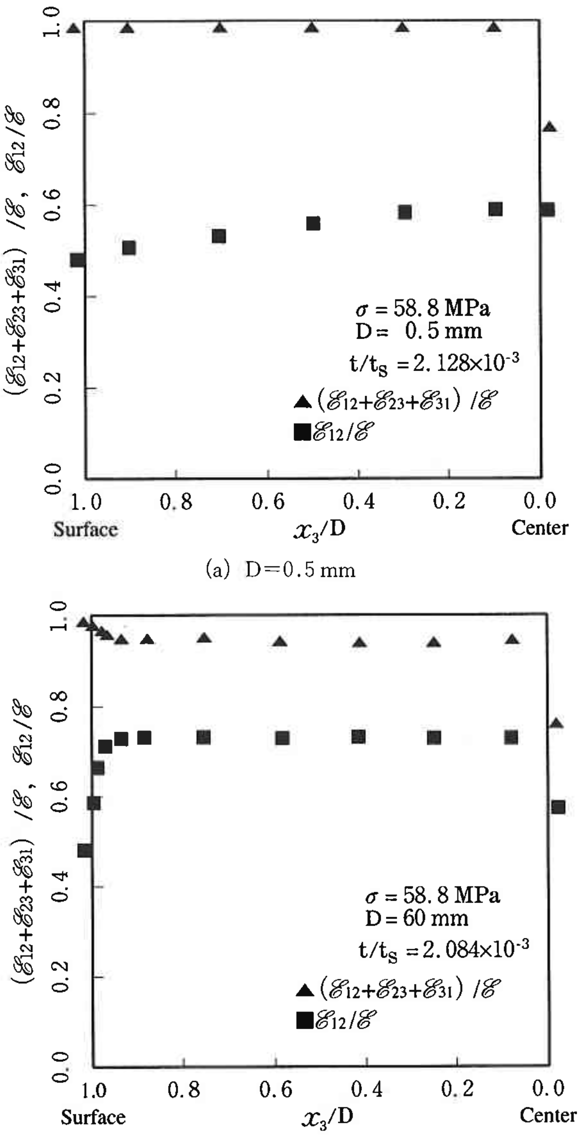
以上に示した，き裂パラメータに関する検討は，連続体力学の立場からのアプローチである．その範囲内でも，三次元の状況をあらかじめ考慮するのとしないのとでは，大



(a) D=0.5 mm

(b) D=60 mm

図9　き裂前縁に沿った CED の変化（クリープ問題）



(a) D=0.5 mm

(b) D=60 mm

図10　き裂前縁に沿った CED の各せん断変形寄与分の変化（クリープ問題）

きな違いがあることを示したつもりである．近年の計算機能力の増大は著しく，分子動力学を応用した破壊現象の記述も試みられている．原子個々の挙動をスーパーパラレルコンピューティングで扱える時代が近々やってくるのかもしれない．その場合でも安易に二次元問題からというやり方ではなく，まずは一般的三次元問題での検討が望まれる．

(1994年5月17日受理)

参 考 文 献

1) S.P. Timoshenko: History of Strength of Materials, Dover Publications, New York, 1983.
2) A.A. Griffith: The phenomena of rupture and flow in solids, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser.A, 221, 1920, pp. 163-189.
3) H.M. Westergaard: Bearing Pressures and Cracks, Journal of Applied Mechanics, 1939, pp. A49-A53.
4) J.D. Eshelby: Solid State Physics, Academic Press, 3, 1956, pp. 79-144.
5) J.R. Rice: A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks, Journal of Applied Mechanics, 35, 1967, pp. 379-385.
6) J.W. Hutchinson: Singular Behavior at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material, Journal of Mech. Phys. Solids, 16, 1968, pp. 13-31.
7) J.R. Rice and G.F. Rosengren: Plane Strain Deformation Near a Crack Tip in a Power Law Hardening Material, Journal of Mech. Phys. Solids, 16, 1968, pp. 1-12.
8) M.K. Kassir and G.C. Shi: Three dimensional crack problems, Mechanics of fracture, Vol. 2, Noordhoff international publishing leyden, 1974.
9) J.P. Benthem: State of stress at the vertex of a quarter-infinite crack in a half-space, Int. J. Solids Structures, Vol. 13, 1977, pp. 479-492.
10) E.S. Folias: On the Three-Dimensional Theory of Cracked Plates, Journal of Applied Mechanics, 42-3, 1975, pp. 663-673.
11) 高久田和夫：き裂先端近傍における応力の特異性，日本機械学会講演論文集，No. 830-9, 1983, pp. 189-196.
12) I.S. Raju and J.C. Newman, Jr.: Stress intensity factor for a wide range of semi-eliptical survade cracks in finite-thickness plates, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 11, 1979, pp. 817-829.
13) 角　洋一，山本善之：貫通き裂の応力拡大係数に及ぼす三次元影響，日本機械学会論文集（A編），44巻378号，1978，pp. 413-422.
14) 村上敬宣，石田　誠：任意形状表面き裂の応力拡大係数の解析と表面近傍の応力場，日本機械学会論文集（A編），51巻464号，1985，pp. 1050-1056.
15) 三好俊郎，吉田有一郎：三次元表面き裂の応力拡大係数の自由表面近傍における挙動，日本材料学会，第4回破壊力学シンポジウム講演論文集，1987，pp. 120-124.
16) 宮本　博，菊池正紀，石田克己：三次元のJ積分に関する研究（第一報，弾性体中の貫通き裂，表面き裂のJ積分），日本機械学会論文集（A編），49巻439号，1983，pp. 314-321.
17) 久保司郎，大路清嗣：3次元き裂のJ積分に関する理論的考察，材料，第30巻335号，1981，pp. 796-802.
18) 渡辺勝彦：破壊力学パラメータとしてのき裂エネルギ密度概念の提唱とその役割と考え方，日本機械学会論文集（A編），47巻416号，1981，pp. 406-415.
19) 渡辺勝彦：弾塑性き裂のき裂エネルギ密度とエネルギ解放率，日本機械学会論文集（A編），48巻433号，1982，pp. 1226-1236.
20) 渡辺勝彦：径路独立積分の基礎となる保存則の考え方とき裂エネルギ密度の径路独立積分による評価について，日本機械学会論文集（A編），50巻453号，1984，pp. 894-903.
21) 渡辺勝彦，畔上秀幸：き裂前縁を含む面の非連続性を考慮したき裂モデルの提案とそのき裂パラメータ評価への適用，日本機械学会論文集（A編），51巻469号，1985，pp. 2154-2161.
22) 渡辺勝彦，佐藤　裕：非連続き裂モデルに関する基礎的検討（一般的構成方程式とき裂パラメータ評価），日本機械学会論文集（A編），53巻488号，1987，pp. 786-794.
23) 渡辺勝彦，佐藤　裕，吉川暢宏：非連続モデルのき裂問題への適用性（第一報，連続分布転位弾塑性き裂モデルとの対応），日本機械学会論文集（A編），54巻506号，1988，pp. 1879-1886.
24) 渡辺勝彦，佐藤　裕，吉川暢宏：非連続モデルのき裂問題への適用性（第二報，弾塑性き裂モデルとしての基礎的検討），日本機械学会論文集（A編），54巻506号，1988，pp. 1887-1894.
25) 市村重博，佐藤　裕，渡辺勝彦：原子配列の動的解法と静的解法に関する一考察，日本機械学会第6回計算力学講演会講演論文集，No. 930-71，pp.181-182.
26) 渡辺勝彦，吉川暢宏：三次元き裂におけるき裂エネルギー密度，日本機械学会論文集（A編），53巻487号，1987，pp. 573-580.
27) 渡辺勝彦，畔上秀幸：き裂エネルギ密度による安定成長き裂の破壊抵抗評価（第1報，基本関係の導出と評価方法の提案），日本機械学会論文集（A編），52巻475号，1986，pp. 727-735.
28) 渡辺勝彦，畔上秀幸，平野八州男：き裂エネルギ密度による安定成長き裂の破壊抵抗評価（第2報，薄板延性き裂への適用），日本機械学会論文集（A編），52巻475号，1986，pp. 736-743.
29) 渡辺勝彦，畔上秀幸，平野八州男：き裂エネルギ密度による安定成長き裂の破壊抵抗評価（第3報，薄板延性き裂破壊抵抗の板厚効果），日本機械学会論文集（A編），52巻480号，1986，pp. 1891-1898.
30) 渡辺勝彦，番　政広：き裂エネルギ密度の$\mathcal{E}_J$積分による評価について（弾性およびクリープき裂の場合），日本機械学会論文集（A編），51巻466号，1985，pp. 1563-1570.
31) 大路清嗣，小倉敬二，久保司郎：クリープき裂問題におけるJ積分の応用，日本機械学会論文集（A編），740-11，1974，pp. 207-210.
32) 大谷隆一，駒井謙治郎　共編：総合材料強度学講座7　環境・高温強度学，オーム社，1984，pp. 275-346.